1 Комплексный логарифм.

1.1 Ветви логарифма.

Спор о логарифмах. Математики долгое время не знали, что нужно понимать под логарифмом отрицательного и мнимого числа. В 1712 году между Лейбницем и И. Бернулли начался спор о логарифмах отрицательных чисел, продолженный затем Даламбером и Эйлером. В одном из писем к И. Бернулли (от 16 марта 1712 г.) Лейбниц, рассматривая соотношение 1 /(-1) = (-1) /1, утверждал, что это равенство отношений нельзя принять за действительное, так как здесь отношение большего к меньшему равно отношению меньшего к большему, и заключил, что это мнимое равенство. Рассматривая логарифмы отрицательных чисел, Лейбниц считал их мнимыми. Бернулли не согласился с этим утверждением и попытался доказать, что ln (–x) = ln x и, следовательно, ln (–1)=0. Суть вопроса вскрыл Эйлер, осознавший многозначность логарифмов.

Так как формула Эйлера однозначно определяет значение экспоненты в комплексной плоскости, то естественно определить логарифм как обратную к экспоненте функцию. Проблема заключается в том, что экспонента периодична с периодом $2\pi i$.

Логарифмы вещественных чисел. Естественное предположение, что логарифмы вещественных чисел вещественны приходит к противоречию с основным свойством логарифмов для отрицательных чисел. Для положительных чисел, это при предположение вещественности оказывается совместимым с основным свойством логарифмов. А именно, определяя логарифм числа меньшего единицы как взятое со знаком минус значение логарифма обратной величины, мы определим монотонную вещественную функцию $\ln x$, удовлетворяющую основному свойству логарифмов и обратную экспоненте.

Основные ветви логарифма. Имея определение логарифма для положительных чисел, мы можем определить логарифм всех комплексных чисел, формулой

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z \tag{1}$$

Функция, определяемая этой формулой, называется *главной ветвью логарифма.* Она непрерывна в верхней полуплоскости, обратна к экспоненте и удовлетворяет основному свойству логарифмов $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$, в положительной полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Определим $\arg^+ z \in [0, 2\pi)$ из условия $z = |z|e^{i \arg^+(z)}$. Тогда *положительную ветвь логарифма* $\ln^+(z)$ определим следующим образом:

$$\ln^+ z = \ln |z| + i \arg^+ z \tag{2}$$

Функция $\ln^+ z$ обратна экспоненте и непрерывна всюду, за исключением положительных чисел. Для $\ln^+ z$ основное свойство логарифмов выполнено в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$. В верхней полуплоскости главная и положительная ветви совпадают $\ln z = \ln^+ z$. В нижней полуплоскости они отличаются на $i\pi$.

1.2 Логарифм как интеграл.

Производная экспоненты и логарифма. Поскольку для бесконечно-малого dz будет $e^{dz} = e^{dx}(\cos dy + i \sin dy) \approx (1+dx)(1+idy) \approx 1+dz$, постольку $e^{z+dz} - e^z = e^z e^{dz} \approx e^z dz$. То есть производная от e^z равна e^z. Зная производную экспоненты, производную логарифма можно определить на основании следующей теоремы общего характера.

Теорема 1.1. *Если функция $f(z)$, непрерывная в точке z_0, является обратной в окрестности z_0 к дифференцируемой в точке $w_0 = f(z_0)$ функции $g(z)$, с ненулевой производной $g'(w_0) \neq 0$, то $f(z)$ дифференцируема в z_0 и $f'(z_0) = 1/g'(w_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим сходящуюся последовательность $z_k \to z_0$, $z_k \neq z_0$. Положим $w_k = f(z_k)$ Тогда $w_k \to w_0$ и $gw_k = z_k$, поэтому

$$\lim \frac{f(z_k) - f(z_0)}{z_k - z_0} = \lim \frac{w_k - w_0}{g(w_k) - g(w_0)} = \frac{1}{g'(w_0)} \tag{3}$$

□

Если $L(z)$ является непрерывной функцией, обратной e^z, то $L'(z) = 1/(e^{L(z)})' = 1/z$. Таким образом, производная логарифма равна $\frac{1}{z}$ для любой непрерывной ветви логарифма.

Теорема 1.2. *Интеграл формы $\frac{dz}{z}$ по прямолинейному отрезку $[1,z]$ равен $\ln(z)$.*

Доказательство. Поскольку главная ветвь логарифма имеет производную $1/z$, постольку формула Ньютона-Лейбница дает $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln(z) - \ln 1 = \ln z$. □

В применении к положительным числам интегральное определение логарифма позволяет распространить базовое неравенство

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

для всех $x > -1$. При отрицательных x оно получается интегрированием по ориентированному отрезку $[x, 0]$ неравенств

$$\frac{dt}{1+x} \leq \frac{dt}{1+t} \leq dt,$$

справедливых ввиду отрицательности dt.

Интегрирование по цепям Последовательность простых ориентированных дуг $\Gamma = \{\Gamma_k = [z_{k-1}, z_k]\}_{k=1}^n$ мы будем называть *цепью* и обозначать $[z_0, \dots z_n]$. Дуги цепи будем называть ее звеньями. Объединение звеньев цепи называется ее телом. Началом цепи называется начало ее первого звена, концом — конец последнего звена. Интеграл формы по цепи определяется как сумма интегралов по ее звеньям. Для форма имеет вид $f'(z)dz$, где функция $f(z)$ определена на теле цепи, то интеграл по цепи по формуле Ньтона Лейбница выразится суммой $\sum_{k=1}^n (f(z_k) - f(z_{k-1}) = f(z_n) - f(z_0)$, то есть формула Ньютона-Лейбница оказывается справедливой и для цепей

$$\int_\Gamma f'(z)dz = f(z_n) - f(z_0) \tag{4}$$

Лемма 1.1. *Если цепь* $\Gamma = [z_0 \dots z_n]$ *такова, что* $z - w$ *неотрицательно при любом* $z \in \Gamma$*, то* $\int_\Gamma = \ln(z_n - w) - \ln(z_0 - w)$*, а если* $z - w$ *неположительно, то* $\int_\Gamma = \ln^+(z_n - w) - \ln^+(z_0 - w)$.

Доказательство. Функция $\ln(z-w)$ при данном w определена и непрерывна на Γ и имеет производную $\frac{1}{z-w}$. По формуле Ньютона-Лейбница получаем. $\int_\Gamma \frac{dz}{z-w} = \ln(z_n - w) - \ln(z_0 - w)$ Dj втором случае неположительность $z - w$ гарантирует непрерывность $\ln^+(z - w)$ на Γ, и те же аргументы, что были приведены выше, позволяют получить аналогичный результат. $\square$

1.3 Вращение цепей.

Мнимую часть $\int_\Gamma \frac{d\zeta}{z-\zeta}$ мы будем называть *вращением цепи вокруг точки* z и обозначать $\Delta_z \arg \Gamma$.

Если начало цепи совпадает с ее концом, то цепь называется замкнутой.

Лемма 1.2. *Вращение* $\Delta_z \arg \Gamma$ *непрерывно зависит от* w.

Доказательство. Вращение цепи, очевидно, равно сумме вращений ее звеньев. Вращение цепи не изменится, если какое-то ее звено Γ_k подразбить, заменив на цепь с началом z_{k-1}, концом z_k и телом как у Γ_k. Поэтому мы можем считать, что звенья цепи имеют длины меньшие, чем расстояние от тела цепи до точки z. В таком случае для любого звена цепи Γ_k все звено содержится в полуплоскости, ограниченной прямой проходящей через w и перпендикулярной $z_k - w$. Следовательно, вращение любого звена выражается разностью аргументов, которая, непрерывно зависит от z, а потому непрерывно зависит от z и сумма вращений всех звеньев цепи, то есть вращение цепи. $\square$

Теорема 1.3. *Вращение замкнутой цепи* Γ *относительно любой точки* w *равно* $2\pi k$ *для некоторого целого* k*. Если* $(z - w)$ *не принимает положительных или отрицательных значений при* $z \in \Gamma$*, то* $\Delta_w \arg \Gamma = 0$.

Доказательство. Не теряя общности, можно ограничиться рассмотрением вращения около нуля и считать звенья цепи $[z_0 \dots z_n$ достаточно мелкими, чтобы на каждом из них была определена непрерывная ветвь логарифма. Обозначим ее $\log_k(z)$. Тогда вращение звена Γ_k относительно 0 представляется разностью $\log_k(z_k) - \log_k(z_{k-1})$, а вращение всей цепи — суммой разностей $\sum_{k=1}^n \log_k(z_k) - \log_k(z_{k-1})$ Рассмотрим также $\delta_k = \log_{k+1} z_k - \log_k z_k$.

$$\sum_{k=1}^{n} \log_k(z_k) - \log_k(z_{k-1}) = \log_n z_n + \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k - \log_1$$

силу равенства $z_0 = z_n$), постольку и их сумма такова. Если же $\mathrm{Re}(z-w) \geq 0$, то $\log_k(z)$ можно выбрать равными главной ветви логарифма. В таком случае все δ_k и разность $\log_n z_n - \log_1 z_0$ равны нулю. $\square$

Будем говорить, что простая дуга $\Gamma = [z_0, z_1]$ *трансверсально* пересекает отрезок $[a, b]$, если пересечение этой дуги с прямой, на которой лежит отрезок содержится во внутренности этого отрезка, а начало и конец дуги лежат по разные стороны от этой прямой.

Лемма 1.3. *Дана замкнутая цепь* Γ *и отрезок* $[a,b]$*, трансверсально пересекающий какое-то одно звено цепи* $[z_0,z_1]$ *и не пересекающий остальных ее звеньев. Тогда*

$$\Delta_b \arg\Gamma - \Delta_a \arg\Gamma = \pm 2\pi,$$

где знак в правой части совпадает со знаком $\operatorname{Im}\dfrac{z_0-z_1}{b-a}$.

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, будем предполагать что отрезок $[a,b]$ лежит на вещественной оси, $a<b$, и 0 является точкой пересечения этого отрезка и звена $\Gamma_1=[z_0,z_1]$ цепи Γ. Вращение Γ_1 относительно a вычисляется по той же формуле, что и двузвенной ломаной $[z_0,0,z_1]$, потому что и Γ_1 и эта ломаная не пересекают вещественной оси левее a. Аналогично вращение Γ_1 и ломаной относительно b вычисляются по одной формуле 1.1. Поэтому утверждение леммы достаточно доказать для модифицированной цепи Γ', в которой звено Γ_1 заменено ломаной $[z_0,0,z_1]=\Gamma'_1$.

Пусть $\Gamma^-=[z_1,z_2,\dots z_n=z_0]$ обозначает цепь, полученную удалением звена Γ_1 из Γ. Тогда

$$\Delta_t \arg\Gamma' = \Delta_t \arg\Gamma^- + \Delta_t \arg\Gamma'_0 \tag{5}$$

Так как все указанные функции непрерывно, за исключением нуля, зависят от $t\in[a,b]$, то при $t<0$ левая часть, которая может принимать лишь значения типа $2\pi k$ сохратяет свое значение в точке a, а при $t>0$ сохраняет свое значение в точке b. В частности, для любой положительной последовательности $\varepsilon_k\to 0$ получим:

$$\begin{aligned}&\Delta_b \arg\Gamma = \Delta_b\arg\Gamma' = \lim \Delta_{\varepsilon_k}\arg\Gamma' =\\ &\qquad \lim\Delta_{\varepsilon_k}\arg\Gamma^- + \lim\Delta_{\varepsilon_k}\arg\Gamma'_0 = \Delta_0\arg\Gamma^- + \arg^+(z_1) - \arg^+(z_0)\end{aligned}$$

Аналогичное вычисление для последовательности $-\varepsilon_k$ дает результат

$$\Delta_a\Gamma = \Delta_0\arg\Gamma^- + \arg(z_1) - \arg(z_0)$$

Вычитая одно из другого получаем

$$\Delta_b\arg\Gamma - \Delta_a\arg\Gamma = (\arg^+ z_1 - \arg z_1) - (\arg^+ z_0 - \arg z_0) \tag{6}$$

Если z_1 лежит в верхней полуплоскости, то первая скобка обращается в нуль, а вторая равна 2π и формула дает -2π. Если в нижней, то первая равна 2π, а вторая 0. и формула дает 2π. □

Теорема 1.4. *Пусть дана область плоскости* D*, ограниченная простой замкнутой кусочно-выпуклой кусочно гладкой кривой. Тогда для любой замкнутой ориентированной цепи без самопересечений,* Γ *тело которой совпадает с границей области* $\Delta_z\arg\Gamma=0$*, если точка не принадлежит области и* $|\Delta_z\arg\Gamma|=2\pi$*, если* z *лежит внутри области.*

Доказательство. Рассмотрим внутреннюю точку области w. Звенья цепи, подразбив Γ, если требуется, можем считать выпуклыми кривыми. Рассмотрим луч L, выходящий из w, который не проходит через концы звеньев цепи и не является касательным ни к какому звену. Тогда он пересечет любое звено цепи не более чем в двух точках. Подразбив эти звенья мы можем добиться того, чтобы каждое звено пересекалось не лучом не более чем в одной точке. Пусть $w_1, w_2, \dots w_m$ последовательность точек пересечения, упорядоченных в порядке возрастания расстояния до z. Так как сегмент луча $[w, w_1]$ принадлежит области, то сегмент $[w_1, w_2]$ не может ей принадлежать, иначе точка w_1 не была бы граничной. По тем же соображениям сегмент $[w_2, w_3]$ должен принадлежать области. То есть принадлежащие и не принадлежащие области интервалы строго чередуются. Выберем в каждом интервале (w_i, w_{i+1}) точку v_i.

Пусть $[z_{k-1}, z_k]$ и $[z_{l-1}, z_l]$ суть звенья цепи Γ пересекающие луч L соответственно в точках w_1 и w_2 соответственно. Так как при обходе вдоль цепи область всегда остается с одной и той же стороны, то точки z_k и z_l должны располагаться по одну и туже сторону от луча. Поэтому изменения вращения цепи при переходе от w к точке v_1 и от точки v_1 к v_2 противоположны по знаку. Поэтому переход пары, подряд идущих точек не меняет вращения.

$\square$