Ответ на вопрос Дж.Кэннона-Ст.Уйэмента

О. Фролкина

Последовательность множеств $X_1, X_2, \ldots \subset \mathbb{R}^N$ сходится гомеоморфно к множеству $X_0 \subset \mathbb{R}^N$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое целое число n, что $i \geqslant n$ влечет существование гомеоморфизма $h_i : X_0 \cong X_i$, перемещающего каждую точку не более, чем на ε.

Из сепарабельности пространства вложений $Emb(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^N)$ вытекает: Пусть $\mathcal{F}$ — несчетное семейство попарно непересекающихся гомеоморфных копий компакта $\mathfrak{X}$ в $\mathbb{R}^N$; тогда существует такая последовательность $X_0, X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{F}$, что $X_i \neq X_0$ для каждого $i > 0$, и $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ сходится гомеоморфно к X_0.

В 1970 году J.W. Cannon, S.G. Wayment поставили вопрос:

Предположим, что $X_0, X_1, X_2, \ldots \subset \mathbb{R}^N$ — последовательность попарно непересекающихся континуумов, гомеоморфно сходящихся к X_0. Верно ли, что существует несчетное семейство попарно непересекающихся гомеоморфных копий X_0 в $\mathbb{R}^N$?

Cannon–Wayment получили положительный ответ при дополнительном предположении: $X_0, X_1, X_2, \ldots$ вложены в $\mathbb{R}^N$ эквивалентно друг другу, т.е. могут быть получены друг из друга гомеоморфизмами всего пространства $\mathbb{R}^N$.

Оказывается, даже при этом предположении не всегда удается найти искомое несчетное семейство так, чтобы все его элементы были вложены эквивалентно пределу $X_0 \subset \mathbb{R}^N$. Это подтверждается примерами.

Для $N = 2$ см. работы J.H. Roberts 1930 и R.H. Bing 1951; пространства X_0 имеют довольно сложную структуру.

Для $N = 3$ или $N \geqslant 5$, Cannon и Wayment построили последовательность $X_0, X_1, X_2, \ldots$ попарно непересекающихся диких $(N-1)$-сфер в $\mathbb{R}^N$ так, что: $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ сходится гомеоморфно к X_0; $(\mathbb{R}^N, X_i) \cong (\mathbb{R}^N, X_0)$ для каждого i; но нет возможности найти несчетное множество попарно непересекающихся $(N-1)$-сфер в $\mathbb{R}^N$, каждая из которых вложен эквивалентно X_0. (Последнее утверждение о невозможности опирается при $N = 3$ на теорему R.H. Bing 1957–1961, а при $N \geqslant 5$ вытекает из теоремы J.L.Bryant 1968 вместе с результатами А.В.Чернавского 1973 и R.J.Daverman 1973). Случай $N = 4$ не был покрыт примерами Cannon–Wayment и оставался открытым вопросом. В данной работе мы отвечаем на этот вопрос, предъявляя для всякого $N \geqslant 4$ серии специальных вложений: для $(N-1)$-сфер; для более широкого класса компактов положительной размерности; и для канторовых множеств.