ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОЦЕНКИ НОРМЫ ОПЕРАТОРОВ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ОБРАЗОМ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА НА СИМПЛЕКСАХ

Астафуров Г.О.

Гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром играют важную роль в современном анализе и его приложениях. Так называется гильбертово пространство H, состоящее из числовых функций, заданных на некотором множестве X, для которого линейный функционал $\mathrm{Ev}_x\colon H \ni f \mapsto f(x)$ вычисления значения в точке $x \in X$ непрерывен на H для каждого $x \in X$. В силу теоремы Рисса каждый такой функционал однозначно задается скалярным умножением на некоторую функцию $K(x,\ \cdot\,) \in H$, т.е. $\mathrm{Ev}_x(f) = \big(f, K(x,\ \cdot\,)\big)$ для всех $f \in H$. Функция двух переменных $K(x,y)$ называется воспроизводящим ядром пространства H. Гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром является, например, пространство Соболева $H^k(X)$, где X ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^d$ с кусочно-гладкой границей, а k целое число большее, чем $d/2$. Пространство $H^k(X)$ состоит из классов эквивалентности вещественных квадратично интегрируемых на X функций, обобщенные производные которых до k-го порядка включительно квадратично интегрируемы на X. Скалярное произведение на $H^k(X)$ может быть введено различными эквивалентными друг другу способами. Мы будем придерживаться следующего определения скалярного произведения в $H^k(X)$:

$$(f,g) = \int_X \ (fg + c(X)\langle D^k f, D^k g\rangle)d\mu,$$

где $c(X)$ положительный параметр, зависящий от формы области X, μ мера Лебега в $\mathbb{E}^d$, а $\langle D^k f, D^k g\rangle$ определяется выражением $\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\overline{1,d}^k}\left(\partial_{e_{i_1}} \dots \partial_{e_{i_k}} f\right)\left(\partial_{e_{i_1}} \dots \partial_{e_{i_k}} g\right)$ для произвольно выбранного ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_d$ в $\mathbb{E}^d$.

В работе исследуется важный для приложений частный случай, когда $X = \mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$ – d-мерный симплекс, т.е. выпуклая оболочка $d+1$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости. На множестве всех d-симплексов транзитивно действует группа $\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^d)$ невырожденных аффинных преобразований. При этом действии воспроизводящие ядра пространств Соболева на различных симплексах оказываются связанными друг с другом. В докладе будет подробно разобрано действие подгруппы подобий $G \subset \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^d)$ на воспроизводящие ядра. С пространством $H^k(\mathcal{T})$ тесно связано конечномерное подпространство $\mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T}) \subset H^k(\mathcal{T})$ полиномиальных функций степени не выше $k-1$. Для функций $f \in H^k(\mathcal{T})$ имеет место эквивалентность: $f \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T}) \ \Leftrightarrow\ \int_X \langle D^k f, D^k f\rangle d\mu = 0$. В докладе будет исследовано ортогональное разложение воспроизводящего ядра

$$K(x,\cdot\,) \in H^k(\mathcal{T}) = \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{P}_{k-1}^{\perp}(\mathcal{T}).$$

Приложением полученных результатов является довольно точный и практически реализуемый способ оценки нормы линейного непрерывного оператора $A\colon H^k(\mathcal{T}) \to H^k(\mathcal{T})$ с полиномиальным образом $\mathrm{Im}A \subset \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T})$. Будут продемонстрированы оценки норм на конкретных примерах операторов A, возникающих в вычислительной практике. В заключение будет рассмотрено практическое применение данных идей в доказательстве сходимости численного метода коротких характеристик для приближенного решения уравнения переноса излучения.