Переход к смешанному обучению создает условия для систематической работы в цифровой среде с визуальными образовательными ресурсами и решает проблему визуализации учебного материала.

Само понятие «визуализация образов» определяется нами как общий приём представления изучаемой информации или явления в удобном и обозримом для дальнейшего анализа виде.

Визуализация образов выступает как одно из направлений такого сложного понятия как «визуальное мышление», введенного в науку в середине XX века американским психологом и педагогом Р. Арнхеймом, который утверждал, что зрительное восприятие имеет значительное превосходство над другими способами познания.

Будем рассматривать направление визуализации образов как особую форму деятельности человека, содержанием которой является оперирование и манипулирование наглядными образами.

Смешанное обучение с использованием цифровых инструментов и технологий, направленных на применение визуализации образов, продемонстрировало наибольшую эффективность в обучении стереометрии, а также, что разработанные методические рекомендации по проектированию цифровой образовательной среды для уроков геометрии в рамках смешанного обучения позволяют разнообразить применяемые методы, формы, средства обучения и учитывать специфику организации такой работы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БРУННА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Ф. М. Малышев

(Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия)

E-mail address: malyshevfm@mi-ras.ru

Теорема (Брунна, 1887). *Пусть в двух параллельных гиперплоскостях L_0, L_1 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 1$, содержатся выпуклые тела P_0, P_1 одинакового n-мерного объёма $v > 0$, P_1 не получается из P_0 параллельным переносом, и пусть P — сечение выпуклой оболочки их объединения гиперплоскостью L, параллельной L_0, L_1 и находящейся строго между ними. Тогда n-мерный объём v' тела P будет строго больше v.*

Теорема (Брунна–Минковского). *Пусть P_0, P_1 два выпуклых тела в $\mathbb{R}^n$ одинакового объёма $v > 0$, не получающиеся одно из другого параллельным* *переносом, и пусть* $0 < t < 1$. *Тогда объём* v'' *тела* $P = (1-t)P_0 + tP_1$ *строго больше* v.

Утверждения этих теорем эквивалентны, поскольку $v' = v''$ при некотором t. Основные приложения связаны со второй формулировкой теоремы. Первоначально, как заметил Минковский, Брунном было доказано неравенство $v' \geqslant v$ [1]. Позже Брунн устранил пробел в доказательстве. Доказательство Минковского неравенства $v'' > v$ появилось через год после его смерти [2]. Подробней см. в [3]. Новые далеко не простые доказательства многих авторов неравенства $v'' > v$ появляются (в связи с многочисленными обобщениями и приложениями теоремы Брунна–Минковского) вплоть до настоящего времени. Все они исходят из второй формулировки теоремы, в условиях особенности: $L_0 = L = L_1$, вносящей дополнительные существенные трудности. Закрепилось даже мнение, что исключение равенства $v'' = v$ наиболее трудная часть в доказательстве теоремы, из-за чего она обычно цитируется без доказательств. Теорема относится к основам теории выпуклых многогранников, поэтому желательно простое элементарное её доказательство, явно указывающее на неравенство $v' > v$. Простые доказательства неравенства $v' \geqslant v$ хорошо известны.

При $L_0 \neq L \neq L_1$ больше простора для геометрической интуиции, предоставляющей элементарное основанное на рассечениях Брунна доказательство неравенства $v' > v$, доступное при $n = 2$ школьникам, а сама идея доказательства распространяется на все размерности $n \geqslant 3$. До работы [3] таких доказательств не было известно.

Рассечения Брунна позволяют свести доказательство вначале к случаю, когда P_0, P_1 являются выпуклыми многогранниками, а затем к упрощению P_0 до симплекса. После чего многогранник P_1 вписываем в минимальный симплекс Δ, гомотетичный P_0. Затем P_1 расширяем до многогранника $\widetilde{P}_1$. Если опорная гиперплоскость Δ содержит только одну фиксированную вершину $A \in \Delta$, то параллельную ей опорную гиперплоскость P_1 не учитываем при задании $\widetilde{P}_1$. Если опорная гиперплоскость Δ не содержит A или вместе с A содержит ещё одну вершину Δ, то параллельные ей опорные гиперплоскости P_1 и $\widetilde{P}_1$ совпадают. После этого гиперплоскостью в $\mathbb{R}^{n+1}$, опорной для P_0 и содержащей ребро P_0, отсечём от $\widetilde{P}_1$ такой многогранник, что оставшийся многогранник $\widehat{P}_1$ будет иметь объём v. В результате по сравнению с P объём соответствующего $\widetilde{P}$ увеличится на одну величину, а объём $\widehat{P}$ уменьшится по сравнению с $\widetilde{P}$ на большую величину, поэтому $v' > \widehat{v} \geqslant v$.

При $n = 2$, когда P_0 является треугольником, а P_1 произвольным выпуклым многоугольником той же площади, доказательство неравенства $v' > v$

можно включать в школьный курс по стереометрии в качестве несложного упражнения.

Список литературы

[1] Brunn H. Uber Ovale und Eiflachen. Inag. Diss. Munchen, 1887. 86 p.

[2] Minkowski H. Geometrie der Zahlen. Leipzig-Berlin, 1896, 1910. 278 p.

[3] Малышев Ф.М. Завершение доказательства теоремы Брунна элементарными средствами // Чебышевский сборник. 2021. V. 22, №2. C. 160–182.

ВЫБОР СОПРОВОЖДАЮЩЕГО ПЯТИГРАННИКА ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ${}^2R_5$

Б. М. Мамадалиев

(Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан)

E-mail address: mamadaliyev_botirjon@mail.ru

Изучение двумерной поверхности в ${}^2R_5$ связано со сложностью выбора линейно независимых векторов в точках поверхности, которые называют сопровождающим пятигранником [1].

В данной работе в классе специально выбранных поверхностей докажем метод выбора линейно независимых векторов для двумерной поверхности в ${}^2R_5$.

Пусть $F_2 \subset {}^2R_5$ в системе координат $O\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_4,\ \vec{e}_5\right\}$ задана векторным уравнением

$$r\left(u,\, v\right) = x_1\left(u\right)\vec{e}_1 + x_2\left(u\right)\vec{e}_2 + z\left(u,\, v\right)\vec{e}_3 + y_1\left(v\right)\vec{e}_4 + y_2\left(v\right)\vec{e}_5,$$

причем $\left(\vec{e}_i\,\cdot\,\vec{e}_j\right) = 0$, $\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = \vec{e}_3^{\,2} = 1$, $\vec{e}_4^{\,2} = \vec{e}_5^{\,2} = -1$.

Касательные векторы координатных линий

$$\vec{r}_u\left(u,\ v\right) = x'_{1u}\left(u\right)\vec{e}_1 + x'_{2u}\left(u\right)\vec{e}_2 + z'_u\left(u,\ v\right)\vec{e}_3$$
$$\vec{r}_v\left(u,\ v\right) = z'_v\left(u,\ v\right)\vec{e}_3 + y'_{1v}\left(v\right)\vec{e}_4 + y'_{2v}\left(v\right)\vec{e}_5$$

.

Рассмотрим векторы $\vec{N}_1 = x'_{2u}\vec{e}_1 - x'_{1u}\vec{e}_2$, $\vec{N}_2 = y'_{2v}\vec{e}_4 - y'_{1v}\vec{e}_5$ и $\vec{N} = \left[\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{N}_1,\ \vec{N}_2\right]$ векторное произведение четырех векторов в ${}^2R_5$ [2], [3].

Теорема 1. *Векторы* $\left\{\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{n}_1,\ \vec{n}_2,\ \vec{n}\right\}$ *образуют сопровождающий пятигранник двумерной поверхности* F_2 *в* ${}^2R_5$.

Здесь $\vec{n}_1,\ \vec{n}_2,\ \vec{n}$ — единичные векторы, коллинеарные векторам $\vec{N}_1,\ \vec{N}_2,\ \vec{N}$ соответственно.