Система дифференциальных уравнений над банаховой алгеброй

Александр Клейн

Аннотация. С целью изучения однородной системы линейных дифференциальных уравнений рассмотрел векторное пространство над D-алгеброй с делением и теорию собственных значений в некоммутативной D-алгебре с делением. Поскольку произведение в алгебре некоммутативно, я рассматриваю две формы произведения матриц (раздел 2) и два вида собственных чисел (раздел 4). Потом я рассмотрю разделы 5, 6, 7, в которых я рассматриваю решение однородной системы дифференциальных уравнений.

Содержание

Aleks_Kleyn@MailAPS.org.
http://AleksKleyn.dyndns-home.com:4080/ http://arxiv.org/a/kleyn_a_1.
http://sites.google.com/site/AleksKleyn/ http://AleksKleyn.blogspot.com/.

1. Соглашение

Соглашение 1.1. *Пусть A - свободная алгебра с конечным или счётным базисом. При разложении элемента алгебры A относительно базиса $\overline{\overline{e}}$ мы пользуемся одной и той же корневой буквой для обозначения этого элемента и его координат. В выражении a^2 не ясно - это компонента разложения элемента a относительно базиса или это операция возведения в степень. Для облегчения чтения текста мы будем индекс элемента алгебры выделять цветом. Например,*

$$a = a^{i} e_{i}$$

□

Соглашение 1.2. *Мы будем пользоваться соглашением Эйнштейна о сумме, в котором повторяющийся индекс (один вверху и один внизу) подразумевает сумму по повторяющемуся индексу. В этом случае предполагается известным множество индекса суммирования и знак суммы опускается*

$$c^{i} v_{i} = \sum_{i \in I} c^{i} v_{i}$$

Я буду явно указывать множество индексов, если это необходимо. □

2. Бикольцо

Пусть A - ассоциативная алгебра с делением над коммутативным кольцом D. Мы также будем говорить, что A - ассоциативная D-алгебра.

Левый или правый модуль V над D-алгеброй A с делением называется A-векторным пространством.

Согласно традиции произведение матриц a и b определено как произведение строк матрицы a и столбцов матрицы b.

Пример 2.1. *Пусть $\overline{\overline{e}}$ - базис правого векторного пространства V. Мы представим базис $\overline{\overline{e}}$ как строку матрицы*

$$e = \begin{pmatrix} e_{1} & ... & e_{n} \end{pmatrix}$$

Мы можем представить координаты вектора v как вектор столбец

$$v = \begin{pmatrix} v^{1} \\ ... \\ v^{n} \end{pmatrix}$$

Поэтому мы можем представить вектор v как традиционное произведение матриц

$$v = \begin{pmatrix} e_{1} & ... & e_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{1} \\ ... \\ v^{n} \end{pmatrix} = e_{i} v^{i}$$

□

Пример 2.2. *Пусть $\overline{\overline{e}}$ - базис левого векторного пространства V Мы представим базис $\overline{\overline{e}}$ как строку матрицы*

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & ... & e_n \end{pmatrix}$$

Мы можем представить координаты вектора v как вектор столбец

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ ... \\ v^n \end{pmatrix}$$

Однако мы не можем представить вектор

$$v = v^i e_i$$

как традиционное произведение матриц

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ ... \\ v^n \end{pmatrix} \qquad e = \begin{pmatrix} e_1 & ... & e_n \end{pmatrix}$$

так как это произведение не определено. □

Из примеров 2.1, 2.2 следует, что мы не можем ограничиться традиционным произведением матриц и нам нужно определить два вида произведения матриц. Чтобы различать эти произведения, мы вводим новые обозначения.

Определение 2.3. *Пусть число столбцов матрицы a равно числу строк матрицы b.* ${}_*{}^*$**-произведение** *матриц a и b имеет вид*

$$\begin{cases} a{}_*{}^*b = \begin{pmatrix} a^i_k b^k_j \end{pmatrix} \\ (a{}_*{}^*b)^i_j = a^i_k b^k_j \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a^1_1 & ... & a^1_p \\ ... & ... & ... \\ a^n_1 & ... & a^n_p \end{pmatrix} {}_*{}^* \begin{pmatrix} b^1_1 & ... & b^1_m \\ ... & ... & ... \\ b^p_1 & ... & b^p_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^1_k b^k_1 & ... & a^1_k b^k_m \\ ... & ... & ... \\ a^n_k b^k_1 & ... & a^n_k b^k_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a{}_*{}^*b)^1_1 & ... & (a{}_*{}^*b)^1_m \\ ... & ... & ... \\ (a{}_*{}^*b)^n_1 & ... & (a{}_*{}^*b)^n_m \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.2}$$

${}_*{}^*$*-произведение может быть выражено как произведение строк матрицы a и столбцов матрицы b.* □

Определение 2.4. *Пусть число строк матрицы a равно числу столбцов матрицы b.* ${}^*{}_*$**-произведение** *матриц a и b имеет вид*

$$\begin{cases} a{}^*{}_*b = \begin{pmatrix} a^k_i b^j_k \end{pmatrix} \\ (a{}^*{}_*b)^i_j = a^k_i b^j_k \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & ... & a_m^1 \\ ... & ... & ... \\ a_1^p & ... & a_m^p \end{pmatrix} {}^*{}_* \begin{pmatrix} b_1^1 & ... & b_p^1 \\ ... & ... & ... \\ b_1^n & ... & b_p^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^k b_k^1 & ... & a_m^k b_k^1 \\ ... & ... & ... \\ a_1^k b_k^n & ... & a_m^k b_k^n \end{pmatrix} \tag{2.4}$$
$$= \begin{pmatrix} (a{}^*{}_*b)_1^1 & ... & (a{}^*{}_*b)_m^1 \\ ... & ... & ... \\ (a{}^*{}_*b)_1^n & ... & (a{}^*{}_*b)_m^n \end{pmatrix}$$

${}^*{}_*$-произведение может быть выражено как произведение столбцов матрицы a и строк матрицы b. □

Замечание 2.5. *Мы будем пользоваться символом ${}_*{}^*$- или ${}^*{}_*$- в имени свойств каждого произведения и в обозначениях. Мы можем читать символ ${}_*{}^*$ как rc-произведение (произведение строки на столбец) и символ ${}^*{}_*$ как cr-произведение (произведение столбца на строку). Для совместимости обозначений с существующими мы будем иметь в виду ${}_*{}^*$-произведение, когда нет явных обозначений.* □

Определение 2.6. *Матрица $\delta = (\delta_j^i)$ является единицей для обоих произведений.* □

Определение 2.7. *Мы определим* **${}_*{}^*$-степень** *матрицы a, пользуясь рекурсивным правилом*

$$a^{0_*{}^*} = \delta \tag{2.5}$$

$$a^{n_*{}^*} = a^{n-1_*{}^*}{}_*{}^*a \tag{2.6}$$

□

Теорема 2.8.

$$a^{1_*{}^*} = a \tag{2.7}$$

Определение 2.9. *Матрица $a^{-1_*{}^*}$ - это* **${}_*{}^*$-обратный элемент** *матрицы a, если*

$$a_*{}^*a^{-1_*{}^*} = \delta \tag{2.8}$$

Матрица a называется ${}_*{}^*$-невырожденной, если существует ${}_*{}^*$-обратная матрица. □

Определение 2.10. *Матрица $a^{-1^*{}_*}$ - это* **${}^*{}_*$-обратный элемент** *матрицы a, если*

$$a^*{}_*a^{-1^*{}_*} = \delta \tag{2.9}$$

Матрица a называется ${}^*{}_*$-невырожденной, если существует ${}^*{}_*$-обратная матрица. □

3. Квазидетерминант

Согласно [1], page 3 у нас нет определения детерминанта в случае алгебры с делением. [1] Тем не менее, мы можем определить квазидетерминант, который

[1]В алгебре кватернионов профессор Кирчей пользуется двойным определителем (смотри определение в разделе [4]-2.2) для решения системы линейных уравнений и для решения

в конечном итоге даёт похожую картину. В определении 3.1, я следую определению [1]-1.2.2.

[1] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh, R. Wilson, Quasideterminants, eprint arXiv:math.QA/0208146 (2002)

Определение 3.1. **$\binom{j}{i}$-${}_*{}^*$-квазидетерминант** $n\times n$ *матрицы a - это формальное выражение*

$$\det({}_*{}^*)^j_i\, a=((a^{-1_*{}^*})^i_j)^{-1} \tag{3.1}$$

Мы можем рассматривать $\binom{j}{i}$-${}_*{}^*$-квазидетерминант как элемент матрицы

$$\begin{aligned}\det({}_*{}^*)\,a&=\begin{pmatrix}\det({}_*{}^*)^1_1\,a&...&\det({}_*{}^*)^1_n\,a\\ ...&...&...\\ \det({}_*{}^*)^n_1\,a&...&\det({}_*{}^*)^n_n\,a\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}((a^{-1_*{}^*})^1_1)^{-1}&...&((a^{-1_*{}^*})^n_1)^{-1}\\ ...&...&...\\ ((a^{-1_*{}^*})^1_n)^{-1}&...&((a^{-1_*{}^*})^n_n)^{-1}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.2}$$

которую мы будем называть **${}_*{}^*$-квазидетерминантом**. □

Теорема 3.2. *Рассмотрим матрицу*

$$\begin{pmatrix}a^1_1&a^1_2\\ a^2_1&a^2_2\end{pmatrix}$$

Тогда

$$\det({}_*{}^*)a=\begin{pmatrix}a^1_1-a^1_2(a^2_2)^{-1}a^2_1&a^1_2-a^1_1(a^2_1)^{-1}a^2_2\\ a^2_1-a^2_2(a^1_2)^{-1}a^1_1&a^2_2-a^2_1(a^1_1)^{-1}a^1_2\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$\det({}^*{}_*)a=\begin{pmatrix}a^1_1-a^2_1(a^2_2)^{-1}a^1_2&a^1_2-a^2_2(a^2_1)^{-1}a^1_1\\ a^2_1-a^1_1(a^1_2)^{-1}a^2_2&a^2_2-a^1_2(a^1_1)^{-1}a^2_1\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$$a^{-1_*{}^*}=\begin{pmatrix}(a^1_1-a^2_1(a^2_2)^{-1}a^1_2)^{-1}&(a^2_1-a^1_1(a^1_2)^{-1}a^2_2)^{-1}\\ (a^1_2-a^2_2(a^2_1)^{-1}a^1_1)^{-1}&(a^2_2-a^1_2(a^1_1)^{-1}a^2_1)^{-1}\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

задачи о собственных значениях (смотри раздел [4]-2.5). Я ограничился рассмотрением квазидетерминантов, так как меня интересует более широкий класс алгебр.

[4] Ivan Kyrchei, Linear differential systems over the quaternion skew field, eprint arXiv:1812.03397 (2018)

4. Собственное значение матрицы

Пусть a - $n\times n$ матрица A-чисел и E - $n\times n$ единичная матрица.

Определение 4.1. *A-число b называется* **${}_*{}^*$-собственным значением** *матрицы a, если матрица $a-bE$ - ${}_*{}^*$-вырожденная матрица.* □

Определение 4.2. *Пусть A-число b является ${}_*{}^*$-собственным значением матрицы a. A-столбец v называется* **${}_*{}^*$-собственным столбцом** *матрицы a, соответствующим ${}_*{}^*$-собственному значению b, если верно равенство*

$$a{}_*{}^*v=bv \tag{4.1}$$

□

Определение 4.3. *Пусть A-число b является ${}_*{}^*$-собственным значением матрицы a. A-строка v называется* **${}_*{}^*$-собственной строкой** *матрицы a, соответствующей ${}_*{}^*$-собственному значению b, если верно равенство*

$$v{}_*{}^*a=vb \tag{4.2}$$

□

Определение 4.4. *A-число b называется* **${}^*{}_*$-собственным значением** *матрицы a, если матрица $a-bE$ - ${}^*{}_*$-вырожденная матрица.* □

Определение 4.5. *Пусть A-число b является ${}^*{}_*$-собственным значением матрицы a. A-столбец v называется* **${}^*{}_*$-собственным столбцом** *матрицы a, соответствующим ${}^*{}_*$-собственному значению b, если верно равенство*

$$v{}^*{}_*a=vb \tag{4.3}$$

□

Определение 4.6. *Пусть A-число b является ${}^*{}_*$-собственным значением матрицы a. A-строка v называется* **${}^*{}_*$-собственной строкой** *матрицы a, соответствующей ${}^*{}_*$-собственному значению b, если верно равенство*

$$a{}^*{}_*v=bv \tag{4.4}$$

□

5. Дифференциальное уравнение $\dfrac{dx}{dt}=ax$

Теорема 5.1. *Пусть A - некоммутативная D-алгебра. Для любого $b\in A$ существует подалгебра $Z(A,b)$ D-алгебры A такая, что*

$$c\in Z(A,b)\Rightarrow cb=bc \tag{5.1}$$

D-алгебра $Z(A,b)$ называется **центром A-числа** *b.*

Теорема 5.2. *Если $a\in Z(A,b)$, то $b\in Z(A,a)$.*

Определение 5.3. *Мы назовём отображение*

$$y=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \tag{5.2}$$

экспонентой. □

Теорема 5.4. *Пусть A - банахова D-алгебра и $a \in A$. Отображение*
$$f : t \in R \rightarrow e^{at} \in A$$
имеет разложение в ряд Тейлора
$$e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n t^n \tag{5.3}$$

Доказательство. Теорема является следствием утверждения $t \in Z(A, a)$. □

Теорема 5.5 важна для рассмотрения систем дифференциальных уравнений.

Теорема 5.5. *Пусть A - банахова ассоциативная D-алгебра и a, $c \in A$. Из условия*
$$c \in Z(A, a) \tag{5.4}$$
следует
$$e^{at} c = c e^{at} \tag{5.5}$$

Теорема 5.6. *Пусть A - банахова D-алгебра и $a \in A$. Тогда*
$$e^{at} a = a e^{at} \tag{5.6}$$

Доказательство. Теорема является следствием теоремы 5.5, если мы положим $c = a$. □

Теорема 5.7. *Пусть*
$$f : R \rightarrow A$$
отображение поля действительных чисел R в банахову D-алгебра A. Производная порядка n отображения f является отображением
$$t \in R \rightarrow \frac{d^n f(t)}{dt^n} \in A$$

Теорема 5.8. *Пусть A - банахова D-алгебра и $a \in A$. Производная порядка n отображения*
$$f : t \in R \rightarrow e^{at} \in A$$
имеет вид
$$\frac{d^n e^{at}}{dt^n} = e^{at} a^n = a^n e^{at} \tag{5.7}$$

Теорема 5.9. *Пусть A - банахова D-алгебра с делением и $a \in A$. Для любого A-числа c отображение*
$$x = e^{at} c \tag{5.8}$$
является решением дифференциального уравнения
$$\frac{dx}{dt} = ax \tag{5.9}$$
Множество решений дифференциального уравнения (5.9) является правым A-векторным пространством
$$e^{at} A \subset \mathcal{R} A^R$$
порождённым отображением $x = e^{at}$.

Доказательство. Равенство
$$\frac{dx}{dt}=\frac{de^{at}c}{dt}=\frac{de^{at}}{dt}c=ae^{at}c=ax$$
является следствием теоремы 5.8.

Мы записали произвольную константу, от которой зависит решение, справа от экспоненты. Чтобы ответить на вопрос, можем ли мы записать константу справа от экспоненты, мы рассмотрим лемму 5.10.

Лемма 5.10. *Пусть A - банахова D-алгебра и $a\in A$. Для любых A-чисел c_1, c_2, отображение*
$$x=c_1e^{at}c_2\tag{5.10}$$
является решением дифференциального уравнения (5.9) тогда и только тогда, когда $c_1\in Z(A,a)$.

Доказательство. Равенство
$$\frac{dx}{dt}=\frac{dc_1e^{at}c_2}{dt}=c_1\frac{de^{at}}{dt}c_2=c_1ae^{at}c_2$$
является следствием теоремы 5.8. Если $c_1\notin Z(A,a)$, то условие
$$c_1a=ac_1\tag{5.11}$$
не верно и отображение (5.10) не является решением дифференциального уравнения (5.9). ⊙

Согласно теореме 5.5, если $c_1\in Z(A,a)$, то отображение (5.10) принимает вид
$$x=c_1e^{at}c_2=e^{at}c_1c_2\tag{5.12}$$
и является отображением вида (5.8).

Следовательно, множество решений (5.8) является правым A-векторным пространством. □

Теорема 5.11. *Пусть A - банахова D-алгебра с делением и $a\in A$. Для любого A-числа c отображение*
$$x=ce^{at}\tag{5.13}$$
является решением дифференциального уравнения
$$\frac{dx}{dt}=xa\tag{5.14}$$
Множество решений дифференциального уравнения (5.14) является левым A-векторным пространством
$$Ae^{at}\subset\mathcal{L}A^R$$
порождённым отображением $x=e^{at}$.

6. Дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = a_*{}^* x$

Пусть A - банахова D-алгебра с делением. Система дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx^1}{dt} = a^1_1 x^1 + ... + a^1_n x^n \\
&...... \\
&\frac{dx^n}{dt} = a^n_1 x^1 + ... + a^n_n x^n
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

где $a^i_j \in A$ и $x^i : R \to A$ - A-значная функция действительной переменной, называется однородной системой линейных дифференциальных уравнений.

Положим

$$
x = \begin{pmatrix} x^1 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix} \qquad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ ... \\ \frac{dx^n}{dt} \end{pmatrix}
$$

$$
a = \begin{pmatrix} a^1_1 & ... & a^1_n \\ ... & ... & ... \\ a^n_1 & ... & a^n_n \end{pmatrix}
$$

Тогда мы можем записать систему дифференциальных уравнений (6.1) в матричной форме

$$
\frac{dx}{dt} = a_*{}^* x \tag{6.2}
$$

6.1. Решение в виде экспоненты $x = e^{bt}c$.

Мы будем искать решение системы дифференциальных уравнений (6.2) в виде экспоненты

$$
x = e^{bt}c = \begin{pmatrix} e^{bt}c^1 \\ ... \\ e^{bt}c^n \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} c^1 \\ ... \\ c^n \end{pmatrix} \tag{6.3}
$$

Теорема 6.1. *Пусть b - ${}_*{}^*$-собственное значение матрицы a. Из условия*

$$
b \in \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n} Z(A, a^i_j) \tag{6.4}
$$

следует, что матрица отображений (6.3) является решением системы дифференциальных уравнений (6.2) для ${}_*{}^*$-собственного столбца c.

Доказательство. Согласно теореме 5.8, равенство

$$
\frac{dx}{dt} = \frac{de^{bt}}{dt}c = e^{bt}bc = a_*{}^* x = a_*{}^*(e^{bt}c) \tag{6.5}
$$

является следствием равенств (6.2), (6.3). Согласно теореме 5.5, равенство

$$
e^{bt}bc = e^{bt}(a_*{}^* c) \tag{6.6}
$$

является следствием равенства (6.5) и утверждения (6.4). Поскольку выражение e^{bt}, вообще говоря, отлично от 0, равенство

$$a_*{}^*c = bc$$

является следствием равенства (6.6). Согласно определению 4.1, A-число b является ${}_*{}^*$-собственным значением матрицы a и матрица c является ${}_*{}^*$-собственным столбцом матрицы a, соответствующим ${}_*{}^*$-собственному значению b. □

Теорема 6.2. *Пусть b является ${}_*{}^*$-собственным значением матрицы a и не удовлетворяют условию* (6.4). *Если элементы ${}_*{}^*$-собственного столбца c удовлетворяют условию*

$$c^i = c_1^i p \quad p \in A \quad p \neq 0 \tag{6.7}$$

$$c_1^i \in Z(A,b) \qquad i = 1, ..., n \tag{6.8}$$

то матрица отображений (6.3) *является решением системы дифференциальных уравнений* (6.2).

Доказательство. Согласно теореме 5.8, равенство

$$\frac{dx}{dt} = \frac{de^{bt}}{dt}c = be^{bt}c_1p = a_*{}^*x = a_*{}^*(e^{bt}c_1)p \tag{6.9}$$

является следствием равенств (6.2), (6.3), (6.7). Согласно теореме 5.5, равенство

$$bc_1e^{bt} = (a_*{}^*c_1)e^{bt} \tag{6.10}$$

является следствием равенства (6.9) и утверждений (6.7), (6.8). Поскольку выражение e^{bt}, вообще говоря, отлично от 0, равенство

$$a_*{}^*c_1 = bc_1$$

является следствием равенства (6.10). Согласно определению 4.1, A-число b является ${}_*{}^*$-собственным значением матрицы a и матрица c_1 является ${}_*{}^*$-собственным столбцом матрицы a, соответствующим ${}_*{}^*$-собственному значению b. Согласно теореме 13.9 матрица c является ${}_*{}^*$-собственным столбцом матрицы a, соответствующим ${}_*{}^*$-собственному значению b. □

Пусть ${}_*{}^*$-собственное значение b не удовлетворяют условию (6.4). Пусть элементы ${}_*{}^*$-собственного столбца c не удовлетворяют условию (6.7), (6.8). Тогда матрица отображений (6.3) не является решением системы дифференциальных уравнений (6.2).

Теорема 6.3. *Пусть $ev(a_*{}^*x)$ - множество ${}_*{}^*$-собственных значений матрицы a, для которых существует решение системы дифференциальных уравнений* (6.2). *Пусть $b \in ev(a_*{}^*x)$. Множество $V(a_*{}^*x, b)$ решений* (6.3) *системы дифференциальных уравнений* (6.2) *является правым A-векторным пространством столбцов.*

6.2. **Решение в виде экспоненты $x = ce^{bt}$.** В статье [5], на странице 35, авторы предлагают рассмотреть решение в виде экспоненты

$$x = ce^{bt} \tag{6.11}$$

Равенство

$$a_*{}^*(ce^{bt}) = cbe^{bt} \tag{6.12}$$

является следствием равенств (6.2), (6.11). Поскольку выражение e^{bt}, вообще говоря, отлично от 0, равенство

$$a_*{}^*c = cb \tag{6.13}$$

является следствием равенства (6.12).

[4] Ivan Kyrchei, Linear differential systems over the quaternion skew field, eprint arXiv:1812.03397 (2018)
[5] Kit Ian Kou, Yong-Hui Xia. Linear Quaternion Differential Equations: Basic Theory and Fundamental Results. eprint arXiv:1510.02224 (2017)

На основании равенства (6.13) авторы статей [4], [5] вводят определение правого собственного значения, определённое равенством (6.13), чтобы отличить от левого собственного значения, которое мы определяем равенством

$$a_*{}^*c = bc$$

Согласно лемме 5.10, если матрица отображений (6.11) является решением системы дифференциальных уравнений (6.2), то вектор c удовлетворяет условию

$$c^{\boldsymbol{i}} \in Z(A,b) \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1},...,\boldsymbol{n}$$

В этом случае, мы можем рассматривать матрицу отображений

$$x = e^{bt}c$$

вместо матрицы отображений (6.11) и нам не надо рассматривать определение правого собственного значения.

6.3. Метод последовательного дифференцирования.

Теорема 6.4. *Последовательно дифференцируя систему дифференциальных уравнений (6.2) мы получаем цепочку систем дифференциальных уравнений*

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a^{n_*{}^*}{}_*{}^*x \tag{6.14}$$

Теорема 6.5. *Решение системы дифференциальных уравнений (6.2) при начальном условии*

$$t = 0 \qquad x = \begin{pmatrix} x^{\boldsymbol{1}} \\ ... \\ x^{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix} = c = \begin{pmatrix} c^{\boldsymbol{1}} \\ ... \\ c^{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$x = e^{ta_*{}^*}{}_*{}^*c \tag{6.15}$$

7. Дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = x^*{}_*a$

Пусть A - банахова D-алгебра с делением. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{dx^1}{dt} = x^1 a^1_1 + ... + x^n a^1_n\\
&......\\
&\frac{dx^n}{dt} = x^1 a^n_1 + ... + x^n a^n_n
\end{aligned} \tag{7.1}$$

где $a^i_j \in A$ и $x^i : R \to A$ - A-значная функция действительной переменной, называется однородной системой линейных дифференциальных уравнений.

Положим

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix} \qquad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ ... \\ \frac{dx^n}{dt} \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} a^1_1 & ... & a^1_n \\ ... & ... & ... \\ a^n_1 & ... & a^n_n \end{pmatrix}$$

Тогда мы можем записать систему дифференциальных уравнений (7.1) в матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = x^*{}_*a \tag{7.2}$$

Мы будем искать решение системы дифференциальных уравнений (7.2) в виде экспоненты

$$x = ce^{bt} = \begin{pmatrix} c^1 e^{bt} \\ ... \\ c^n e^{bt} \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} c^1 \\ ... \\ c^n \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

Теорема 7.1. *Пусть b - ${}^*{}_*$-собственное значение матрицы a. Из условия*

$$b \in \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n} Z(A, a^i_j) \tag{7.4}$$

следует, что матрица отображений (7.3) является решением системы дифференциальных уравнений (7.2) для ${}^*{}_*$-собственного столбца c.

Доказательство. Согласно теореме 5.8, равенство

$$\frac{dx}{dt} = x^*{}_*a \tag{7.5}$$

является следствием равенств (7.2), (7.3). Согласно теореме 5.5, равенство

$$cbe^{bt} = (c^*{}_*a)e^{bt} \tag{7.6}$$

является следствием равенства (7.5) и утверждения (7.4). Поскольку выражение e^{bt}, вообще говоря, отлично от 0, равенство

$$c^*{}_*a = cb$$

является следствием равенства (7.6). Согласно определению 4.4, A-число b является ${}^*{}_*$-собственным значением матрицы a и матрица c является ${}^*{}_*$-собственным столбцом матрицы a, соответствующим ${}^*{}_*$-собственному значению b. □

Теорема 7.2. *Пусть b является ${}^*{}_*$-собственным значением матрицы a и не удовлетворяют условию (7.4). Если элементы ${}^*{}_*$-собственного столбца c удовлетворяют условию*

$$c^i = pc_1^i \quad p \in A \quad p \neq 0 \tag{7.7}$$

$$c_1^i \in Z(A, b) \qquad i = 1, ..., n \tag{7.8}$$

то матрица отображений (7.3) является решением системы дифференциальных уравнений (7.2).

Доказательство. Согласно теореме 5.8, равенство

$$\frac{dx}{dt} = x^*{}_*a \tag{7.9}$$

является следствием равенств (7.2), (7.3), (7.7). Согласно теореме 5.5, равенство

$$e^{bt}c_1 b = e^{bt}(c_1{}^*{}_*a) \tag{7.10}$$

является следствием равенства (7.9) и утверждений (7.7), (7.8). Поскольку выражение e^{bt}, вообще говоря, отлично от 0, равенство

$$c_1{}^*{}_*a = c_1 b$$

является следствием равенства (7.10). Согласно определению 4.4, A-число b является ${}^*{}_*$-собственным значением матрицы a и матрица c_1 является ${}^*{}_*$-собственным столбцом матрицы a, соответствующим ${}^*{}_*$-собственному значению b. Согласно теореме 13.10 матрица c является ${}^*{}_*$-собственным столбцом матрицы a, соответствующим ${}^*{}_*$-собственному значению b. □

Пусть ${}^*{}_*$-собственное значение b не удовлетворяют условию (7.4). Пусть элементы ${}^*{}_*$-собственного столбца c не удовлетворяют условию (7.7), (7.8). Тогда матрица отображений (7.3) не является решением системы дифференциальных уравнений (7.2).

Теорема 7.3. *Пусть $ev(x^*{}_*a)$ - множество ${}^*{}_*$-собственных значений матрицы a, для которых существует решение системы дифференциальных уравнений (7.2). Пусть $b \in ev(x^*{}_*a)$. Множество $V(x^*{}_*a, b)$ решений (7.3) системы дифференциальных уравнений (7.2) является левым A-векторным пространством столбцов.*

8. Эллиптическая тригонометрия

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= x^2 \\ \frac{dx^2}{dt} &= -x^1 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Матрица a имеет вид

$$a=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

Поскольку коэффициенты матрицы a - действительные числа, то уравнение для определения собственных значений имеет вид

$$\begin{vmatrix}-b&1\\-1&-b\end{vmatrix}=b^2+1=0 \tag{8.2}$$

Очевидно, корни уравнения (8.2) зависят от выбора D-алгебры A.

Теорема 8.1. *В алгебре кватернионов, уравнение* (8.2) *имеет бесконечно много корней*

$$b=b^1i+b^2j+b^3k$$

таких, что

$$(b^1)^2+(b^2)^2+(b^3)^2=1$$

Согласно теореме 6.1, решение системы дифференциальных уравнений, соответствующее собственному числу b, имеет вид

$$x=e^{bt}\begin{pmatrix}c_b^1\\c_b^2\end{pmatrix} \tag{8.3}$$

где H-столбец

$$\begin{pmatrix}c_b^1\\c_b^2\end{pmatrix}$$

является собственным вектором матрицы a. Коэффициенты c_b^1, c_b^2, которые соответствуют данному собственному значению b, удовлетворяют уравнению

$$-bc_b^1+c_b^2=0$$

Следовательно, соответствующее решение системы дифференциальных уравнений (8.1) имеет вид

$$x^1=e^{bt}\qquad x^2=e^{bt}b \tag{8.4}$$

Если мы хотим найти решение системы дифференциальных уравнений (8.1), которое удовлетворяет начальному условию

$$t=0\quad x^1=0\quad x^2=1$$

то вначале возникает впечатление, что у нас слишком большой выбор.

Линейная комбинация двух решений системы дифференциальных уравнений (8.1) является решением системы дифференциальных уравнений (8.1). Мы начнём с рассмотрения линейной комбинации двух решений вида (8.4) так как в этом случае константы линейной комбинации определены однозначно.

Таким образом, мы ищем решение в форме

$$\begin{aligned}x^1&=e^{b_1t}C_1+e^{b_2t}C_2\\x^2&=e^{b_1t}b_1C_1+e^{b_2t}b_2C_2\end{aligned} \tag{8.5}$$

Согласно начальным условиям, система уравнений

$$
\begin{aligned}
C_1 + C_2 &= 0\\
b_1C_1 + b_2C_2 &= 1
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

является следствием равенства (8.5). Равенство

$$
\begin{aligned}
C_2 &= -C_1\\
(b_1 - b_2)C_1 &= 1
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

является следствием системы уравнений (8.6).

Пример 8.2. *Положим* $b_1 = i$, $b_2 = j$. *Равенство*

$$
(i - j)C_1 = 1 \tag{8.8}
$$

является следствием системы уравнений (8.7). *Равенство*

$$
C_1 = \frac{1}{2}(-i + j) \tag{8.9}
$$

является следствием равенства (8.8). *Наша задача - проверить является ли отображение*

$$
\begin{aligned}
x^{1} &= (e^{it} - e^{jt})\frac{j-i}{2}\\
x^{2} &= (ie^{it} - je^{jt})\frac{j-i}{2}
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

решением системы дифференциальных уравнений (8.1). *Равенство*

$$
\begin{aligned}
\frac{dx^{1}}{dt} &= (ie^{it} - je^{jt})\frac{j-i}{2} = x^{2}\\
\frac{dx^{2}}{dt} &= (i^2e^{it} - j^2e^{jt})\frac{j-i}{2} = -x^{1}
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

является следствием равенства (8.10). *Следовательно, отображение* (8.10) *является решением системы дифференциальных уравнений* (8.1), *которое удовлетворяет начальному условию*

$$
t = 0 \quad x^{1} = 0 \quad x^{2} = 1
$$

□

Теорема 8.3. *Общее решение системы дифференциальных уравнений*

$$
\begin{aligned}
\frac{dx^{1}}{dt} &= x^{2}\\
\frac{dx^{2}}{dt} &= -x^{1}
\end{aligned}
\tag{8.12}
$$

может быть представлено в виде

$$
\begin{aligned}
x^{1} &= \sin t\ c_1^{1} + \cos t\ c_2^{1}\\
x^{2} &= \cos t\ c_1^{2} - \sin t\ c_2^{2}\\
c_1^{1} &= c_1^{10} + c_1^{11}i + c_1^{12}j + c_1^{13}k\\
c_1^{2} &= c_1^{20} + c_1^{21}i + c_1^{22}j + c_1^{23}k\\
c_2^{1} &= c_2^{10} + c_2^{11}i + c_2^{12}j + c_2^{13}k\\
c_2^{2} &= c_2^{20} + c_2^{21}i + c_2^{22}j + c_2^{23}k
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

Доказательство. Пусть

$$x^1 = x^{10} + x^{11}i + x^{12}j + x^{13}k$$
$$x^2 = x^{20} + x^{21}i + x^{22}j + x^{23}k \tag{8.14}$$

представление отображений x^1, x^2 относительно базиса $\overline{\overline{e}} = (1, i, j, k)$. Тогда

$$\frac{dx^1}{dt} = \frac{dx^{10}}{dt} + \frac{dx^{11}}{dt}i + \frac{dx^{12}}{dt}j + \frac{dx^{13}}{dt}k$$
$$\frac{dx^2}{dt} = \frac{dx^{20}}{dt} + \frac{dx^{21}}{dt}i + \frac{dx^{22}}{dt}j + \frac{dx^{23}}{dt}k \tag{8.15}$$

И мы можем записать систему дифференциальных уравнений (8.12) в виде 4 независимых системы дифференциальных уравнений в поле действительных чисел

$$\begin{aligned} \frac{dx^{1i}}{dt} &= x^{2i} \\ \frac{dx^{2i}}{dt} &= -x^{1i} \\ i &= 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (8.16) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x^{1i} &= \sin t\ c_1^{1i} + \cos t\ c_2^{1i} \\ x^{2i} &= \cos t\ c_1^{2i} - \sin t\ c_2^{2i} \\ i &= 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{8.17}$$

Равенство (8.13) является следствием равенства (8.17). □

9. Матрица Вронского

Мы рассмотрим матрицу,

$$X[x_1, ..., x_m](t) = \begin{pmatrix} x_1^1 & ... & x_m^1 \\ ... & ... & ... \\ x_1^n & ... & x_m^n \end{pmatrix}$$

столбцы которой

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ ... \\ x_1^n \end{pmatrix} \quad ... \quad x_m = \begin{pmatrix} x_m^1 \\ ... \\ x_m^n \end{pmatrix}$$

являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= a_1^1 x^1 + ... + a_n^1 x^n \\ &...... \\ \frac{dx^n}{dt} &= a_1^n x^1 + ... + a_n^n x^n \end{aligned} \tag{9.1}$$

чтобы ответить на вопрос, являются ли столбцы матрицы линейно зависимы справа. Подобную матрицу мы будем называть **матрицей Вронского**.

Теперь мы готовы вернуться к анализу системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^1}{dt}=x^2$$
$$\frac{dx^2}{dt}=-x^1$$

в алгебре кватернионов. Рассмотрим решения

$$x_i(t)=e^{it}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\qquad x_j(t)=e^{jt}\begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix}\qquad x_k(t)=e^{kt}\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}$$

$$x(t)=\begin{pmatrix}e^{it}\frac{j-i}{2}-e^{jt}\frac{j-i}{2}\\ e^{it}i\frac{j-i}{2}-e^{jt}j\frac{j-i}{2}\end{pmatrix}$$

Нетрудно видеть, что столбцы матрицы

$$X[x_i,x_j,x](t)=\begin{pmatrix}e^{it}&e^{jt}&e^{it}\frac{j-i}{2}-e^{jt}\frac{j-i}{2}\\ e^{it}i&e^{jt}j&e^{it}i\frac{j-i}{2}-e^{jt}j\frac{j-i}{2}\end{pmatrix}$$

линейно зависимы справа и координаты столбца $x(t)$ относительно столбцов $x_i(t)$, $x_j(t)$ не зависят от t

$$x(t)=x_i(t)\frac{j-i}{2}-x_j(t)\frac{j-i}{2}$$

Теорема 9.1. *Вектор-столбцы* $x_i(t)$, $x_j(t)$, $x_k(t)$ *линейно зависимы справа в алгебре кватернионов.*

Доказательство. Так как вектор-столбцы $x_i(t)$, $x_j(t)$, $x_k(t)$ симметричны в матрице Вронского $X[x_i,x_j,x_k](t)$, то для нас не имеет значения, какие векторы мы выберем в базис. Например, рассмотрим линейную зависимость столбца $x_k(t)$ относительно столбцов $x_i(t)$, $x_j(t)$.

Чтобы найти коэффициенты c_i, c_j разложения столбца $x_k(t)$ относительно столбцов $x_i(t)$, $x_j(t)$

$$x_k(t)=x_i(t)c_i+x_j(t)c_j$$

мы должны решить систему линейных уравнений

$$e^{it}c_i+e^{jt}c_j=e^{kt}\tag{9.2}$$

$$e^{it}ic_i+e^{jt}jc_j=e^{kt}k\tag{9.3}$$

Согласно теореме 3.2, ${}_*{}^*$-квазидетерминант матрицы

$$a=\begin{pmatrix}e^{it}&e^{jt}\\ e^{it}i&e^{jt}j\end{pmatrix}$$

системы линейных уравнений (9.2), (9.3) имеет вид

$$\det({}_*{}^*)a=\begin{pmatrix}(1-k)e^{it}&(1+k)e^{jt}\\ (i-j)e^{it}&(j-i)e^{jt}\end{pmatrix}$$

и ${}_*{}^*$-обратная матрица имеет вид

$$a^{-1_*{}^*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-it}(1+k)&e^{-it}(j-i)\\e^{-jt}(1-k)&e^{-jt}(i-j)\end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-it}(1+k)&e^{-it}(j-i)\\e^{-jt}(1-k)&e^{-jt}(i-j)\end{pmatrix}{}_*{}^*\begin{pmatrix}e^{kt}\\ke^{kt}\end{pmatrix}\tag{9.4}$$

Равенство

$$\begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-it}(1+k+i+j)e^{kt}\\e^{-jt}(1-k-j-i)e^{kt}\end{pmatrix}\tag{9.5}$$

является следствием равенства (9.4). Равенства

$$x^1=1+i+j+k\tag{9.6}$$

$$x^2=1-i-j-k\tag{9.7}$$

является следствием равенства (9.5) и равенств

$$e^{it}=\cos t+i\sin t$$
$$e^{jt}=\cos t+j\sin t$$
$$e^{kt}=\cos t+k\sin t$$

Теорема является следствием равенств (9.6), (9.7). □

Теорема 9.2.

$$e^{kt}=e^{it}\frac{1+i+j+k}{2}+e^{jt}\frac{1-i-j-k}{2}\tag{9.8}$$

Доказательство. Теорема является следствием равенств (9.2), (9.6), (9.7). □

10. Однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

10.1. **Коэффициенты записаны слева.** Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^ny}{dt^n}+a_n\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+...+a_1y=0\tag{10.1}$$

называется однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Пользуясь множеством переменных

$$x^1=y\quad x^2=\frac{dy}{dt}\quad ...\quad x^n=\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\tag{10.2}$$

мы можем записать дифференциальное уравнение (10.1) как систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{dx^1}{dt}=x^2\quad\frac{dx^2}{dt}=x^3\quad ...\quad\frac{dx^{n-1}}{dt}=x^n\\&\frac{dx^n}{dt}=-a_1x^1-...-a_nx^n\end{aligned}\tag{10.3}$$

Мы представим множество переменныж (10.2) как A^R-столбец

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (10.3) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx^1}{dt} \\ \dfrac{dx^2}{dt} \\ ... \\ \dfrac{dx^{n-1}}{dt} \\ \dfrac{dx^n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & ... & -a_n \end{pmatrix} {}_*{}^* \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^{n-1} \\ x^n \end{pmatrix}$$

Теорема 10.1. *Решение дифференциального уравнения* (10.1) *имеет вид* $y = e^{bt}c$ *где* b *является* ${}_*{}^*$*-собственное значение матрицы*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & ... & -a_n \end{pmatrix}$$

и

$$b \in \bigcap_{i=1}^{n} Z(A, a_i)$$

либо $c \in Z(A, b)$.

Доказательство. Теорема является следствием теорем 6.1, 6.2. □

Теорема 10.2. *Решение дифференциального уравнения* (10.1) *имеет вид* $y = e^{bt}c$ *где* b *является корнем многочлена*

$$b^n + a_n b^{n-1} + ... + a_1 = 0 \tag{10.4}$$

Доказательство. Согласно теореме 5.8, равенство

$$b^n e^{bt} c + a_n b^{n-1} e^{bt} c + ... + a_1 e^{bt} c = 0 \tag{10.5}$$

является следствием равенства (10.1). Так как, вообще говоря, $e^{bt}c \neq 0$, то равенство (10.4) является следствием равенства (10.5). □

10.2. **Коэффициенты записаны справа.** Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} a_n + ... + y a_1 = 0 \tag{10.6}$$

называется однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Пользуясь множеством переменных

$$x^1 = y \quad x^2 = \frac{dy}{dt} \quad ... \quad x^n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \tag{10.7}$$

мы можем записать дифференциальное уравнение (10.6) как систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dx^1}{dt} = x^2 \quad \frac{dx^2}{dt} = x^3 \quad ... \quad \frac{dx^{n-1}}{dt} = x^n \\ &\frac{dx^n}{dt} = -x^1 a_1 - ... - x^n a_n \end{aligned} \tag{10.8}$$

Мы представим множество переменныж (10.7) как A-столбец

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (10.8) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ \frac{dx^2}{dt} \\ ... \\ \frac{dx^{n-1}}{dt} \\ \frac{dx^n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^{n-1} \\ x^n \end{pmatrix} {}^*{}_* \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & ... & -a_n \end{pmatrix}$$

Теорема 10.3. *Решение дифференциального уравнения* (10.6) *имеет вид* $y = ce^{bt}$ *где* b *является* ${}^*{}_*$*-собственное значение матрицы*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & ... & -a_n \end{pmatrix}$$

и

$$b \in \bigcap_{i=1}^{n} Z(A, a_i)$$

либо $c \in Z(A, b)$.

Теорема 10.4. *Решение дифференциального уравнения* (10.6) *имеет вид* $y = ce^{bt}$ *где* b *является корнем многочлена*

$$b^n + b^{n-1}a_n + ... + a_1 = 0 \tag{10.9}$$

Доказательство. Согласно теореме 5.8, равенство

$$ce^{bt}b^n + ce^{bt}b^{n-1}a_n + ... + ce^{bt}a_1 = 0 \tag{10.10}$$

является следствием равенства (10.6). Так как, вообще говоря, $ce^{bt} \neq 0$, то равенство (10.9) является следствием равенства (10.10). □

11. Собственное значение кратности 2

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= jx^1 \\ \frac{dx^2}{dt} &= x^1 + jx^2 \end{aligned} \tag{11.1}$$

в алгебре кватернионов. ${}_*{}^*$-собственные значения матрицы

$$a = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 1 & j \end{pmatrix}$$

удовлетворяют требованию, что матрица

$$a - bE = \begin{pmatrix} j-b & 0 \\ 1 & j-b \end{pmatrix}$$

является ${}_*{}^*$-вырожденной матрицей. Чтобы найти соответствующие значения b достаточно рассмотреть квазидетерминант

$$\det({}_*{}^*)^1_2\,(a - bE) = -(j-b)^2$$

Следовательно, $b = j$ является собственным значением кратности 2.

Так же как в коммутативной алгебре, мы рассмотрим фундаментальные решения

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = e^{jt}\begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = te^{jt}\begin{pmatrix} c_2^1 \\ c_2^2 \end{pmatrix}$$

где столбцы c_1, c_2 удовлетворяют условию теорем 6.1, 6.2.

Вопрос 11.1. *Если множество* ${}_*{}^*$*-собственных значений конечно, легко выделить кратные* ${}_*{}^*$*-собственные значения. Как найти кратные* ${}_*{}^*$*-собственные значения, если множество* ${}_*{}^*$*-собственных значений бесконечно?* □

12. Ковариантность

Пусть V - правое D-векторное пространство. Пусть $\overline{\overline{e}}$ - базис, относительно которого записана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt} &= a^1_1 x^1 + ... + a^1_n x^n \\ &...... \\ \frac{dx^n}{dt} &= a^n_1 x^1 + ... + a^n_n x^n\end{aligned} \tag{12.1}$$

Тогда мы можем записать систему дифференциальных уравнений (12.1) в ковариантной форме

$$e_i \frac{dx^i}{dt} = e_i a^i_j x^j \tag{12.2}$$

Вектора

$$\frac{dx}{dt} = e_i \frac{dx^i}{dt} \qquad x = e_i x^i$$

не зависят от выбора базиса $\overline{\overline{e}}$. Пусть базис $\overline{\overline{e}}$ отображается в базис $\overline{\overline{e}}_1$

$$e_{1i} = e_j b^j_i \tag{12.3}$$

Из равенства (12.3) следует закон преобразования координат вектора x

$$e_{1i} x^i_1 = e_j b^j_i x^i_1 = e_j x^j \tag{12.4}$$

Равенство

$$b^j_i x^i_1 = x^j \tag{12.5}$$

является следствием равенства (12.4). Если продифференцировать равенство (12.5), то мы получим

$$b^j_i \frac{dx^i_1}{dt} = \frac{db^j_i x^i_1}{dt} = \frac{dx^j}{dt} \tag{12.6}$$

Из равенства (12.6) следует, что вектор $\dfrac{dx}{dt}$ так же не меняется при преобразовании базиса. Следовательно, система дифференциальных уравнений (9.1) принимает вид

$$\frac{dx^i_1}{dt} = a_1{}^i_j x^j_1 \tag{12.7}$$

относительно базиса $\overline{\overline{e}}_1$.

Равенство

$$x^i_1 = b^{-1}{}^i_j x^j \tag{12.8}$$

является следствием равенства (12.5). Равенство

$$\frac{dx^j}{dt} = b^j_i \frac{dx^i_1}{dt} = b^j_i a_1{}^i_l x^l_1 = b^j_i a_1{}^i_l b^{-1}{}^l_k x^k = a^j_k x^k \tag{12.9}$$

является следствием равенств (9.1), (12.6), (12.7), (12.8). Равенство

$$b^j_i a_1{}^i_l b^{-1}{}^l_k = a^i_k \tag{12.10}$$

является следствием равенства (12.9).

В коммутативной D-алгебре преобразование (12.10) сохраняет собственные значения, так как определитель произведения матриц равен произведению определителей. В некоммутативной D-алгебре, ${}_*{}^*$-собственные значения могут измениться.

13. Вспомогательные теоремы и доказательства

Эта статья является фрагментом статьи
[3] Александр Клейн, Дифференциальное уравнение над банаховой алгеброй, eprint arXiv:1801.01628 (2018)
Сейчас я готовлю новую версию статьи и планирую послать её в арХив в августе или сентябре этого года.

Теорема 13.1.

$$(a_*{}^*b)^T = a^T{}^*{}_*b^T \tag{13.1}$$

Определение 13.2. *Пусть V - левое A-векторное пространство .Пусть $v = (v_i \in V, i \in I)$ - множество векторов. Выражение $w^i v_i$ называется* **линейной комбинацией** *векторов v_i. Вектор $\overline{w} = w^i v_i$ называется* **линейно зависимым** *от векторов v_i.* □

Теорема 13.3. *Пусть A - ассоциативная D-алгебра с делением. Множество векторов $\overline{\overline{e}} = (e_i, i \in I)$ является* **базисом левого A-векторного пространства** V*, если векторы e_i линейно независимы и любой вектор $v \in V$ линейно зависит от векторов e_i.*

Теорема 13.4. *Координаты вектора $v \in V$ относительно базиса $\overline{\overline{e}}$ левого A-векторного пространства V определены однозначно.*

Пусть a_T^S - минорная матрица, полученный из матрицы a выбором строк с индексом из множества S и столбцов с индексом из множества T. Пусть $k = |S| = |T|$.

Определение 13.5. *Если минорная матрица a_T^S - ${}_*{}^*$-невырожденная матрица, то мы будем говорить, что ${}_*{}^*$-ранг матрицы a не меньше, чем k.* **${}_*{}^*$-ранг матрицы** *a, $\operatorname{rank}_{{}_*{}^*} a$, - это максимальное значение k. Мы будем называть соответствующую минорную матрицу* **${}_*{}^*$-главной минорной матрицей**. □

Определение 13.6. *Если минорная матрица a_T^S - ${}^*{}_*$-невырожденная матрица, то мы будем говорить, что ${}^*{}_*$-ранг матрицы a не меньше, чем k.* **${}^*{}_*$-ранг матрицы** *a, $\operatorname{rank}_{{}^*{}_*} a$, - это максимальное значение k. Мы будем называть соответствующую минорную матрицу* **${}^*{}_*$-главной минорной матрицей**. □

Теорема 13.7. *Предположим, что матрица a имеет n столбцов. Если*

$$\operatorname{rank}_{{}_*{}^*} a = k < n$$

то столбцы матрицы линейно зависимы справа

$$a_*{}^*\lambda = 0$$

Теорема 13.8. *Предположим, что матрица a имеет n столбцов. Если*

$$\operatorname{rank}_{{}^*{}_*} a = k < n$$

то столбцы матрицы линейно зависимы слева

$$\lambda^*{}_*a = 0$$

Теорема 13.9. *Пусть A-число b является ${}_*{}^*$-собственным значением матрицы a. Множество ${}_*{}^*$-собственных столбцов матрицы a, соответствующим ${}_*{}^*$-собственному значению b, является правым A-векторным пространством столбцов.*

Теорема 13.10. *Пусть A-число b является ${}^*{}_*$-собственным значением матрицы a. Множество ${}^*{}_*$-собственных столбцов матрицы a, соответствующим ${}^*{}_*$-собственному значению b, является левым A-векторным пространством столбцов.*

Доказательство теоремы 5.5:

Доказательство. Пусть утверждение (5.4) верно. Согласно теореме 5.4, для доказательства равенства (5.5) достаточно доказать равенство

$$a^n c = ca^n \tag{13.2}$$

Мы докажем равенство (13.2) индукцией по n.

Для $n = 0$ равенство (13.2) очевидно так как $a^0 = 1$. Согласно теореме 5.1, для $n = 1$ равенство (13.2) является следствием равенства

$$ca = ac \tag{13.3}$$

Пусть равенство (13.2) верно для $n = k$

$$a^k c = ca^k \tag{13.4}$$

Равенство

$$a^{k+1}c = aa^k c = aca^k = caa^k = ca^{k+1}$$

является следствием равенств (13.3), (13.4). Следовательно, равенство (13.2) верно для $n = k + 1$. □

Доказательство теоремы 5.11:

Доказательство. Равенство

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dce^{at}}{dt} = c\frac{de^{at}}{dt} = ce^{at}a = xa$$

является следствием теоремы 5.8.

Мы записали произвольную константу, от которой зависит решение, слева от экспоненты. Чтобы ответить на вопрос, можем ли мы записать константу справа от экспоненты, мы рассмотрим лемму 13.11.

Лемма 13.11. *Пусть A - банахова D-алгебра и $a \in A$. Для любых A-чисел c_1, c_2, отображение*

$$x = c_1 e^{at} c_2 \tag{13.5}$$

является решением дифференциального уравнения (5.14) тогда и только тогда, когда $c_2 \in Z(A, a)$.

Доказательство. Равенство

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dc_1 e^{at} c_2}{dt} = c_1 \frac{de^{at}}{dt} c_2 = c_1 e^{at} a c_2$$

является следствием теоремы 5.8. Если $c_2 \notin Z(A, a)$, то условие

$$c_2 a = a c_2 \tag{13.6}$$

не верно и отображение (13.5) не является решением дифференциального уравнения (5.14). $\odot$

Согласно теореме 5.5, если $c_2 \in Z(A, a)$, то отображение (13.5) принимает вид

$$x = c_1 e^{at} c_2 = c_1 c_2 e^{at} \tag{13.7}$$

и является отображением вида (5.13).

Следовательно, множество решений (5.13) является левым A-векторным пространством. $\square$

Список литературы

[1] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh, R. Wilson, Quasideterminants, eprint arXiv:math.QA/0208146 (2002)

[2] Александр Клейн, Свободная алгебра со счётным базисом, eprint arXiv:1211.6965 (2012)

[3] Александр Клейн, Дифференциальное уравнение над банаховой алгеброй, eprint arXiv:1801.01628 (2018)

[4] Ivan Kyrchei, Linear differential systems over the quaternion skew field, eprint arXiv:1812.03397 (2018)

[5] Kit Ian Kou, Yong-Hui Xia. Linear Quaternion Differential Equations: Basic Theory and Fundamental Results. eprint arXiv:1510.02224 (2017)

Предметный указатель

Специальные символы и обозначения