Об оценивании множества достижимости для некоторых управляемых объектов (On estimating the attainable set for some control objects)

М. С. Никольский (M. S. Nikolskii)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

mni@mi.ras.ru

В математической теории управления важную роль играет множество достижимости управляемого объекта $D(x_0, T)$, где x_0 — начальное состояние управляемого объекта при $t = 0$, $T > 0$ — время движения этого объекта (см., например, [1]). Знание $D(x_0, T)$ или его оценки при $T > 0$ позволяет, например, оценить динамические возможности управляемого объекта, что представляет интерес для различных приложений. В литературе известно несколько постановок задач оценивания $D(x_0, T)$ (см., например, [2–4]). Отметим, что в линейном случае для описания множества $D(x_0, T)$ и его оценок можно с успехом применять аппарат опорных функций (см., например, [5]).

В этой работе мы будем заниматься оцениванием $D(x_0, T)$ сверху по включению. Рассмотрим управляемый объект (см. [1]) вида

$$\dot{x} = f(x, u), \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u \in \mathbb{R}^r$, $r \geq 1$, $u \in U$, U — компакт из $\mathbb{R}^r$. На нелинейную функцию $f(x, u)$ накладываются обычные требования гладкости (см., например, [1]). Отметим, что одна из первых оценок сверху для множества $D(x_0, T)$ была построена в [6] в виде шара с центром в нуле. Другой общий подход к оцениванию сверху $D(x_0, T)$ с помощью функций $V(x)$ ляпуновского типа изложен в работе [4]. При таком подходе важно удачно подобрать подходящую функцию $V(x)$. Тут могут помочь многочисленные результаты по классической теории устойчивости неуправляемых систем (см., например, [7]). В работе [8] было использовано свойство Важевского квазимонотонного неубывания векторной функции для получения покоординатных оценок сверху для изучаемого множества $D(x_0, T)$.

Приведем два примера, иллюстрирующих сказанное.

Пример 1. Рассмотрим двумерный управляемый объект вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) + u, \qquad x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $g(x_1, x_2)$ — непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^2$, $u \in [p, q]$, $p < q$. Предположим, что частная производная g_{x_1} неотрицательна на $\mathbb{R}^2$ и выполнено неравенство $x_2 g(x_1, x_2) \leq c(1 + |x|^2)$ при $x \in \mathbb{R}^2$, где c — некоторая неотрицательная константа. Отметим, что из наложенных на функцию g требований вытекает, что векторная функция $h(x_1, x_2)$ с компонентами $x_2, g(x_1, x_2)$ является квазимонотонно неубывающей в смысле Важевского. С помощью результатов [8] обосновывается следующий факт: для векторов z, принадлежащих множеству достижимости $D(x_0, T)$, выполняются векторные неравенства

$$\xi(T) \leq z \leq \eta(T), \tag{3}$$

где $\xi(t)$ — решение задачи Коши

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \qquad \dot{\xi}_2 = g(\xi_1, \xi_2) + p$$

с начальным условием $\xi(0) = x_0$, $\eta(t)$ — решение задачи Коши

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \qquad \dot{\eta}_2 = g(\eta_1, \eta_2) + q$$

с начальным условием $\eta(0) = x_0$. Напомним, что $u \in [p, q]$. Векторные неравенства (3) обеспечивают покомпонентные оценки векторов $z \in D(x_0, T)$. Они определяют прямоугольник $P(T)$, содержащий множество достижимости $D(x_0, T)$. Нетрудно видеть, что среди всех содержащих множество $D(x_0, T)$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, построенный прямоугольник $P(T)$ имеет наименьшую площадь.

Пример 2. Рассмотрим двумерный управляемый объект (см. [7, с. 66])

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -g(x_1) - h(x_2) + u, \qquad x(0) = x_0, \tag{4}$$

где функции $g(x_1)$, $h(x_2)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^1$, $u \in [p, q]$, причем $p < q$. Рассмотрим функцию Ляпунова вида (см. [7, с. 66])

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} g(s)\, ds. \tag{5}$$

Потребуем выполнения неравенств $g(x_1)x_1 \geq 0$ для всех x_1 из $\mathbb{R}^1$, $h(x_2)x_2 \geq 0$ для всех x_2 из $\mathbb{R}^1$. При сделанных предположениях функция $V(x_1, x_2)$ непрерывно дифференцируема и неотрицательна на $\mathbb{R}^2$. Используя выкладки из [7, с. 66], для непрерывно дифференцируемой функции $v(t) = V(x_1(t), x_2(t))$, где $x_1(t)$, $x_2(t)$ — компоненты решения задачи Коши (4), соответствующего произвольному непрерывному управлению $u(t) \in [p, q]$ и начальному условию $x(0) = x_0$, получаем на $[0, T]$ неравенство

$$\dot{v}(t) \leq x_2(t)u(t) \leq rv(t)^{1/2}, \tag{6}$$

где $r = 2^{1/2} \max(|p|, |q|)$.

Поставим в соответствие этому неравенству уравнение сравнения

$$\dot{w} = r|w|^{1/2} \tag{7}$$

с начальным условием

$$w(0) = V_0 = V(x_1(0), x_2(0)). \tag{8}$$

Можно обосновать, что для максимального решения $\widetilde{w}(t)$ задачи Коши (7), (8) при $t \in [0, T]$ справедлива формула

$$\widetilde{w}(t)^{1/2} = V_0^{1/2} + \frac{rt}{2}. \tag{9}$$

Теперь с помощью известной теоремы сравнения (см. [9, с. 40, теорема 4.1]) получаем при $t \in [0, T]$ неравенство вида $v(t) \leq \widetilde{w}(t)$. Отсюда, используя определение функций $V(x_1, x_2)$, $v(t)$, получаем при $t \in [0, T]$ неравенство

$$|x_2(t)| \leq b(t) = 2^{1/2}\left(V_0^{1/2} + \frac{rt}{2}\right). \tag{10}$$

При выводе оценки (10) мы считали, что допустимое управление $u(t)$ непрерывно на $[0, T]$. Можно обосновать, что и для измеримых допустимых управлений $u(t)$ неравенство (10) имеет место. Используя первое из уравнений системы (4), на основании сказанного мы получаем при произвольных допустимых измеримых управлениях $u(t)$ оценку вида

$$|x_1(T) - x_1(0)| \le \int_0^T b(s)\, ds. \tag{11}$$

Таким образом, с помощью неравенств (10), (11) возникает оценка сверху по включению множества достижимости для управляемого объекта (4) в виде прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат.

Список литературы

1. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
2. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
3. *Kurzhanskii A.B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Birkhäuser, 1997.
4. *Гусев М.И.* О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №1. С. 60–69.
5. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001.
6. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах оптимального регулирования // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. Физика. Химия. 1959. №2. С. 25–38.
7. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
8. *Никольский М.С.* О покоординатном оценивании множества достижимости управляемой системы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2018. №2. С. 31–35.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир. 1970.

Задача о формировании общественного мнения инвесторов в рамках теории Mean field games (The problem of forming the investor public opinion within a mean field games framework)

С. И. Никулин (S. I. Nikulin)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

sergey.nikuline@mail.ru

Мы рассматриваем рынок, на котором действует большое число инвесторов, управляющих собственным портфелем ценных бумаг, состоящим из рискового актива и банковского депозита. Каждый инвестор решает задачу о максимизации общей для всех HARA-функции полезности от капитала портфеля к некоторому