Описание дериваций и когомологий Хохшильда групповой алгебры C[G] при помощи когомологий классифицирующего пространства группоида присоединенного действия группы G

А.С.Мищенко, МГУ

Аннотация доклада

18 ноября 2018 г.

Содержание доклада мотивировано сравнением результатов нашей последней работы, Арутюнов А.А., Мищенко А.С., (2018), (полный текст представлен в журнале «Математический сборник»), а также работы Арутюнова А.А., Мищенко А.С., Штерна, А.И., (2016), в которых описание алгебры внешних дифференцирований групповой алгебры $R[G]$ конечно-представимой дискретной группы G представлено в терминах комплекса Кэли группоида $\mathcal{G}$ присоединенного действия группы G, с результатами Бургеля (1985) и Benson (1995, 1991) , которые описывают гомологии и когомологии Хохшильда групповой алгебры $R[G]$ в терминах классифицирующих пространств $BC\langle x\rangle$ централизаторов $C\langle x\rangle$ сопряженных классов $\langle x\rangle$ группы G.

Пространство внешних дериваций имеет описание в виде одномерных когомологий Хохшильда той же групповой алгебры (см. Книгу Р. Пирса (1986) , определение «a», стр. 248). Поэтому возникает естественный вопрос: возможно ли описать все когомологии Хохшильда групповой алгебры в терминах геометрических построений на группоиде сопряженного действия группы по аналогии с внешними выводами групповой алгебры?

В книге Бенсона гомологии и когомологии Хохшильда групповой алгебры $C[G]$ описываются в терминах централизаторов классов сопряженных элементов в группе G (том 2, с.76) в виде суммы (произведения) гомологий (когомологий) централизаторов классов сопряженных элементов:

$$HH^n(RG) \cong \prod_{g\in G^G} H^n(C_G(g), R)$$

Это утверждение противоречит нашему утверждению, в котором одномерные когомологии Хохшильда описываются как сумма одномерных когомологий с конечными носителями классифицирующих централизаторов классов сопряженных элементов группы G, а книга Бенсона имеет дело с обычными когомологиями тех же пространств.

Это связано с тем, что в книге Бенсона определение когомологий Хохшильда искусственно изменено и притянуто к дуальности гомологиям Хохшильда. Именно, под когомологиями Хохшильда групповой алгебры RG Бенсон понимает не когомологии $HH^n(RG; RG)$, у которых коэффициентами служит сама алгебра RG, как это принято в большинстве работ, посвященных когомологиям Хохшильда (см. например, работы M. Gerstenhaber (1963), M.Kontsevich (1999)), Y.Felix, J.-C. Thjmas, M. Vigue-Poirrier (2004).

Для того, чтобы свести все описание когомологий Хохшильда к гомологиям Хохшильда без относительно к использованию когомологий Хохшильда в конкретных задачах, а только лишь в угоду дуальности гомологии и когомологий Хохшильда, в качестве коэффициентов рассматривается дуальный бимодуль $(RG)^* = Hom(RG, R)$. Другими словами, через $HH^n(RG)$ обозначается группа $HH^n(RG) = HH^n(RG, (RG)^*)$, в то время как под гомологиями Хохшидьда понимается стандартное определение $HH_n(RG) = HH_n(RG, RG)$. Поэтому теорема, приведенная в книге Бенсона пратически не имеет интереса.

Заметим, что в исходной теореме Бургеля (1985) изложена только (существенная) половина теоремы из книги Бенсона, касающаяся лишь гомологий Хохшильда. Примерно в то же время вышла другая книга Weibel (1997) , в которой сформулирована как раз теорема Бургеля о вычислении гомологий Хохшильда групповой алгебры в терминах централизаторов классов сопряженных элементов. Вычисление когомологий Хохшильда, приведенное в книге Бенсона, предусмотрительно опущено.

Мы предлагаем единый способ описания гомологиии когомологий Хохшильда групповой алгебры $C[G]$ в терминах классифицирующего пространства $B\mathcal{G}$ группоида $\mathcal{G}$ присоединенного действие группы G. В этих терминах гомологии Хохшильда групповой алгебры $C[G]$ совпадают с гомологиями классифицирующего пространства $B\mathcal{G}$. Когомологии Хохшильда также можно отождествить с инвариантами классифицирующего пространства $B\mathcal{G}$ группоида $\mathcal{G}$, а именно с когомологиями этого пространства, но (в отличие от Бенсона) с некоторыми условиями конечности для коцепей на пространстве $BC_G(g)$.

Список литературы

[1] Arutyunov, A. A., Mishchenko, A. S. Smooth Version of Johnson's Problem Concerning Derivations of Group Algebras. *arXiv:1801.03480 [math.AT]*, (Submitted to Mathematical sbornik).