Характеризация ассоциативных функциональных пространств

В. Д. Степанов
Математический институт им. В.А.Стеклова РАН
E-mail: stepanov@mi-ras.ru

Рассматривается задача о характеризации функциональных пространств, ассоциированных с заданными функциональными пространствами.

Пусть $\mathfrak{M}$ множество всех функций на $I \subset \mathbb{R}$, измеримых по Лебегу, $X \subset \mathfrak{M}$ – функциональное пространство,

$$\mathfrak{D}_X := \left\{ g \in \mathfrak{M} : \int |fg| < \infty \ \forall\ f \in X \right\}.$$

Для $g \in \mathfrak{D}_X$ определим функционалы

$$J_X(g) := \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|_X \neq 0}} \frac{\left|\int fg\right|}{\|f\|_X}, \qquad \mathbf{J}_X(g) := \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|_X \neq 0}} \frac{\int |fg|}{\|f\|_X},$$

задающие нормы на $\mathfrak{D}_X$ и ассоциированные пространства X' и $\mathbf{X}'$ такие, что

$$X' := \{g \in \mathfrak{D}_X : \|g\|_{X'} := J_X(g) < \infty\}, \quad \mathbf{X}' := \{g \in \mathfrak{D}_X : \|g\|_{\mathbf{X}'} := \mathbf{J}_X(g) < \infty\}.$$

Пространство X называется *идеальным*, если

$$\forall\ f, g \in \mathfrak{M} : f \in X, |g| \leq |f| \Rightarrow g \in X, \|g\|_X \leq \|f\|_X.$$

Для идеальных пространств $J_X(g) = \mathbf{J}_X(g)$, но для неидеальных, вообще говоря, $\mathbf{X}' \neq X'$.

В докладе на примере весовых пространств Соболева $W_p^1(I), 1 < p < \infty$, с нормой

$$\|u\|_{W_p^1(I)} := \|v_0 u\|_{L^p(I)} + \|v_1 Du\|_{L^p(I)},$$

полностью решается задача о характеризации ассоциированных пространств.