О СВОБОДНЫХ АЛГЕБРАХ АВТОМОРФНЫХ ФОРМ

Э. Б. ВИНБЕРГ

Знаменитая теорема Шепарда–Тодда–Шевалле утверждает, что алгебра инвариантов конечной линейной группы Γ, действующей в комплексном векторном пространстве V, свободна тогда и только тогда, когда группа Γ порождается (комплексными) отражениями.

В качестве естественного бесконечного аналога конечной линейной группы может рассматриваться дискретная группа Γ голоморфных преобразований комплексной симметрической области $\mathcal{D}$ с факторпространством $\mathcal{D}/\Gamma$ конечного объема, действующая в каком-либо эквивариантном $\mathbb{C}^*$-расслоении $\mathcal{L} \to \mathcal{D}$. Здесь область $\mathcal{D}$ выступает в качестве аналога проективного пространства PV, а тотальное пространство $\mathcal{L}$ расслоения - в качестве аналога проколотого векторного пространства V. Аналогом полиномиальных инвариантов конечной линейной группы здесь являются автоморфные формы (относительно рассматриваемого $\mathbb{C}^*$-расслоения). А именно, автоморфные формы веса k могут быть определены как Γ-инвариантные голоморфные функции на $\mathcal{L}$, однородные степени $-k$ на слоях расслоения.

Простое топологическое рассуждение, принадлежащее О.В. Шварцману, применимое в равной мере к конечным линейным группам и дискретным группам голоморфных преобразований, показывает, что для того, чтобы алгебра автоморфных форм была свободна, необходимо, чтобы группа Γ порождалась отражениями.

Нетрудно видеть, что отражения существуют только в двух сериях симметрических областей: в комплексных шарах $\mathcal{B}_n = U_{1,n}/(U_1 \times U_n)$ и в $\mathcal{D}_n = O^+_{2,n}/(SO_2 \times O_n)$, симметрических областях типа IV в классификации Э. Картана. В каждой из этих областей существуют арифметические дискретные группы отражений, но, в отличие от конечных групп, порождаемости отражениями уже не достаточно для того, чтобы алгебра автоморфных форм была свободна. Так, например, в недавней работе докладчика и О.В. Шварцмана было доказано, что для дискретной группы отражений в области $\mathcal{D}_n$ такое может быть только при $n \leq 10$.

В предыдущей работе докладчика было доказано, что при $n = 4, 5, 6, 7$ алгебра автоморфных форм группы $\Gamma_n = O^+_{2,n}(\mathbb{Z})$, действующей в области $\mathcal{D}_n$, свободна, и найдены веса ее образующих. Для этого была использована интерпретация факторпространства $\mathcal{D}_n/\Gamma_n$ как пространства модулей подходящего семейства мультиполяризованных $K3$ поверхностей. Члены этих семейств допускали проективные модели в виде квартик в $\mathbb{C}P^3$.

В работе, о которой будет рассказано в докладе, аналогичные результаты получены аналогичным методом для $n = 8, 9, 10$. Существенное отличие, однако, состоит в том, что будут рассматриваться проективные модели $K3$ поверхностей в виде некоторых поверхностей степени 8 в $\mathbb{C}P^5$, не являющихся полными пересечениями.