

Неэрмитовые оптические системы: принцип причинности, фазовые переходы

А.А. Зябловский¹, А.А. Пухов^{1,2,3}, А. П. Виноградов^{1,2,3}, А.В. Дорофеев^{1,2,3},
А.А. Лисянский⁴

¹ Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова, Россия,

² Московский физико-технический институт (государственный университет)

³ Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН

⁴Department of Physics, Queens College of the City University of New York

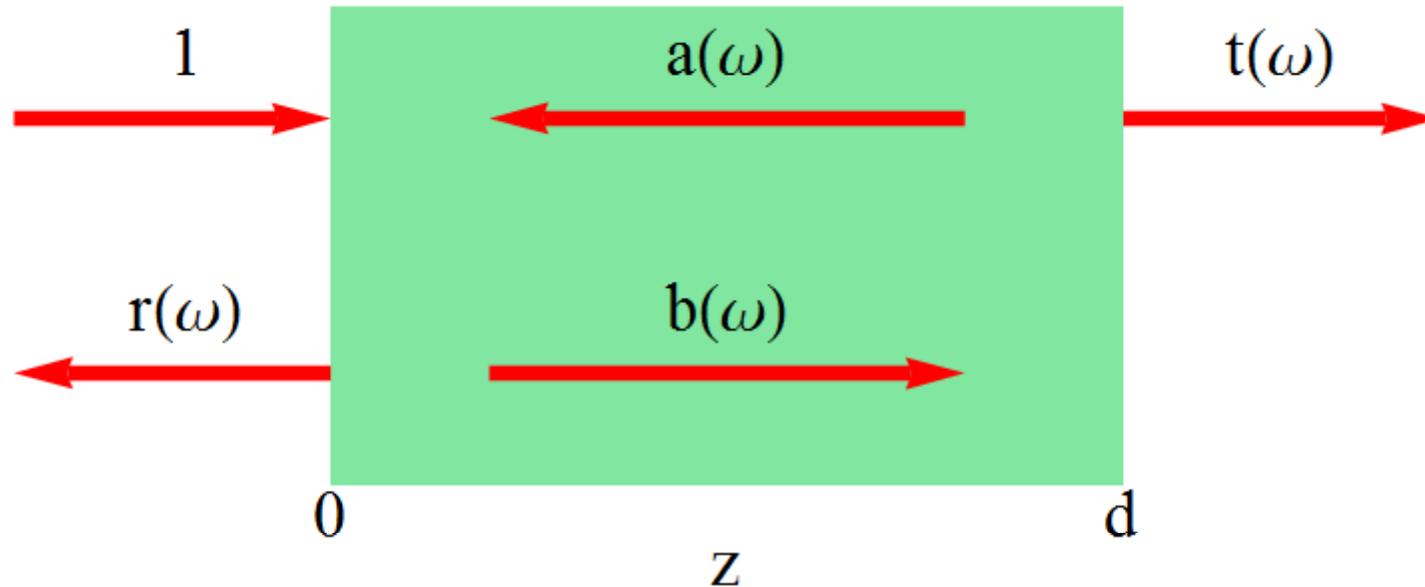
Москва, 2014

План доклада

1. Временная задача о падении импульса на усиливающий слой. Обратное преобразование Фурье
2. Лазерная генерация в усиливающем слое
3. Лазерная генерация в фотонных кристаллах
4. PT -симметричные оптические системы
5. Фазовый переход и лазерная генерация в PT -симметричных и квази- PT -симметричных оптических системах

Временная задача о падении импульса на усиливающий слой. Обратное преобразование Фурье

$$e_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t) \exp(i\omega t) dt$$



$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\omega) g(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

$$g(z, \omega) = \begin{cases} \exp(i\omega z / c) + r \exp(-i\omega z / c), & z < 0 \\ a \exp(ik_0 z \sqrt{\varepsilon} / c) + b \exp(-i\omega z \sqrt{\varepsilon} / c), & 0 < z < d \\ t \exp(i\omega(z - d) / c), & z > d \end{cases}$$

Временная задача о падении импульса на усиливающий слой. Обратное преобразование Фурье

$$r(d, \omega) = -\frac{(Z_1^2 - Z_2^2) \exp(-i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c) - \exp(i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c)}{(Z_1 + Z_2)^2 \exp(-i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c) - (Z_1 - Z_2)^2 \exp(i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c)}$$

$$t(d, \omega) = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2 \exp(-i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c) - (Z_1 - Z_2)^2 \exp(i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c)}$$

$$a(d, \omega) = \frac{2Z_2 (Z_1 + Z_2) \exp(-i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c)}{(Z_1 + Z_2)^2 \exp(-i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c) - (Z_1 - Z_2)^2 \exp(i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c)}$$

$$b(d, \omega) = \frac{2Z_2 (Z_1 - Z_2) \exp(i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c)}{(Z_1 + Z_2)^2 \exp(-i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c) - (Z_1 - Z_2)^2 \exp(i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c)}$$

$$\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \exp(2i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c) = 1$$

$$Z_1 = 1, \quad Z_2 = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_R + i\varepsilon_I}$$

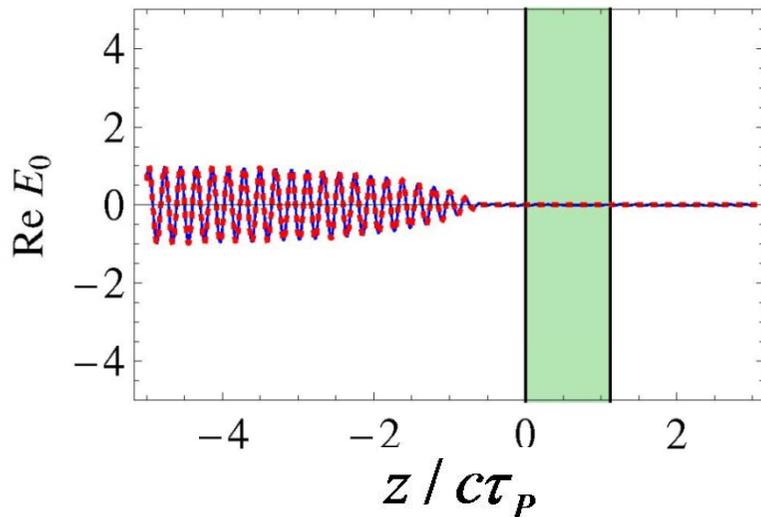
Временная задача о падении импульса на усиливающий слой. Обратное преобразование Фурье

$$q = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \exp\left(2i\omega d \sqrt{\varepsilon} / c\right) = 1$$

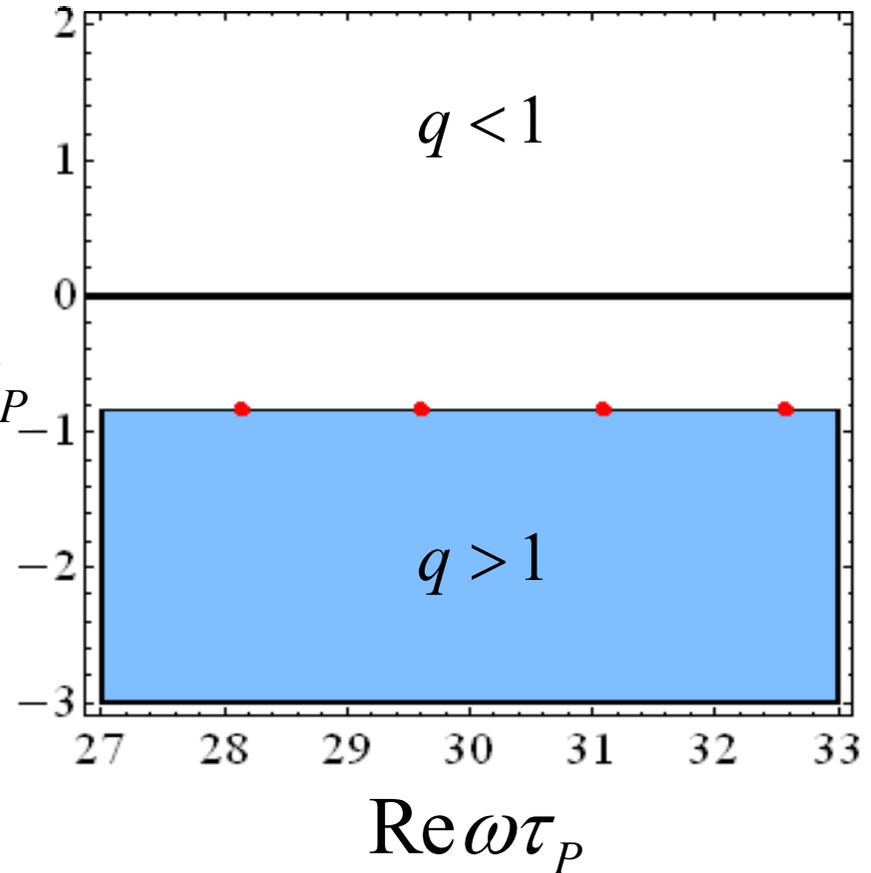
$$\varepsilon_R > 0, \varepsilon_I > 0$$

- диэлектрическая среда с потерями

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\omega) g(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$



$\text{Im } \omega\tau_P$

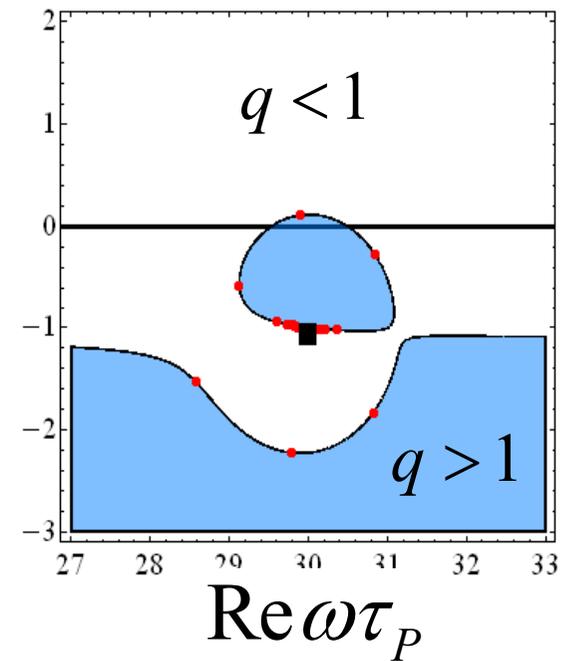
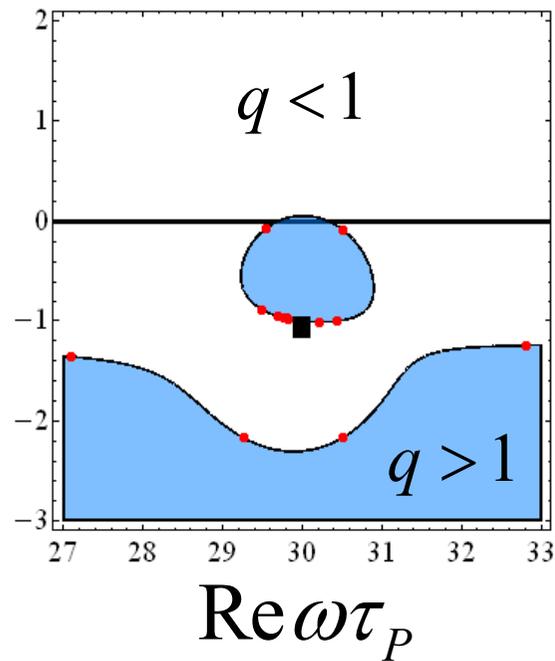
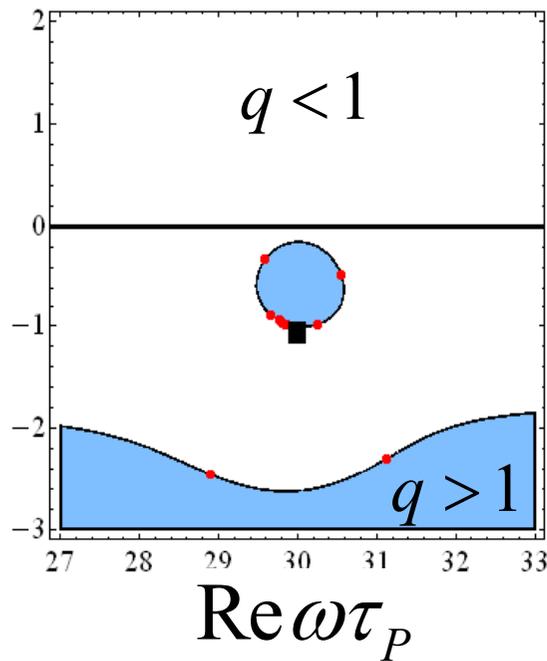


Временная задача о падении импульса на усиливающий слой. Обратное преобразование Фурье

$\varepsilon_R > 0, \varepsilon_I < 0$ - диэлектрическая среда с усилением

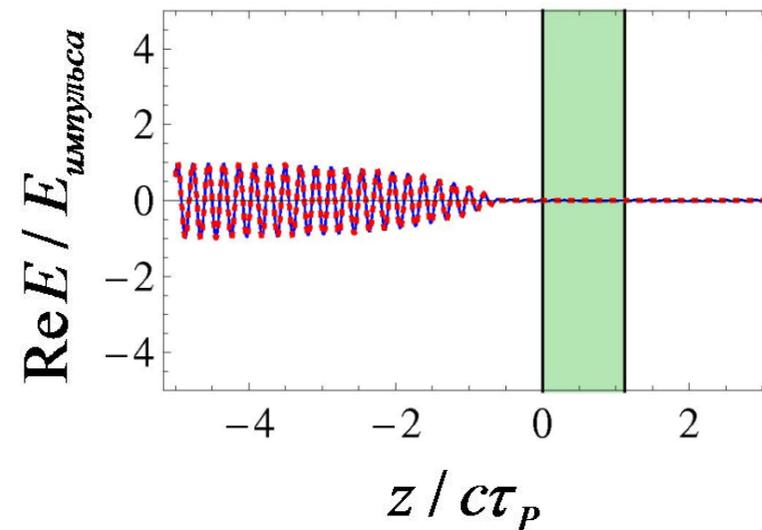
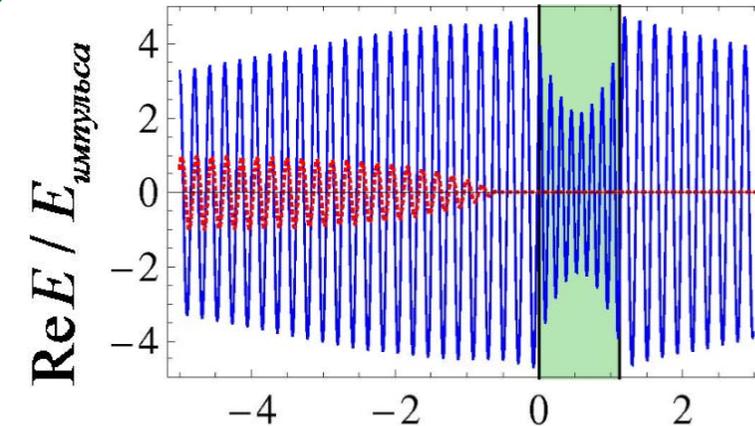
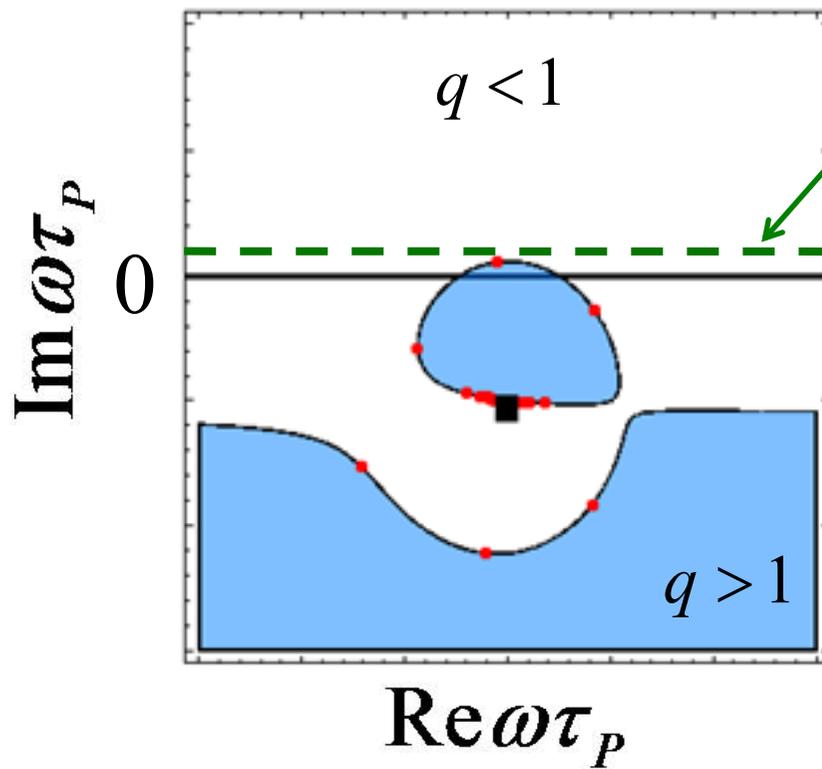
$$\varepsilon_{gain} = \varepsilon_{mat} - \frac{2\alpha\omega_0 / \tau_P}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega / \tau_P}$$

$\text{Im}\omega\tau_P$



Временная задача о падении импульса на усиливающий слой. Обратное преобразование Фурье

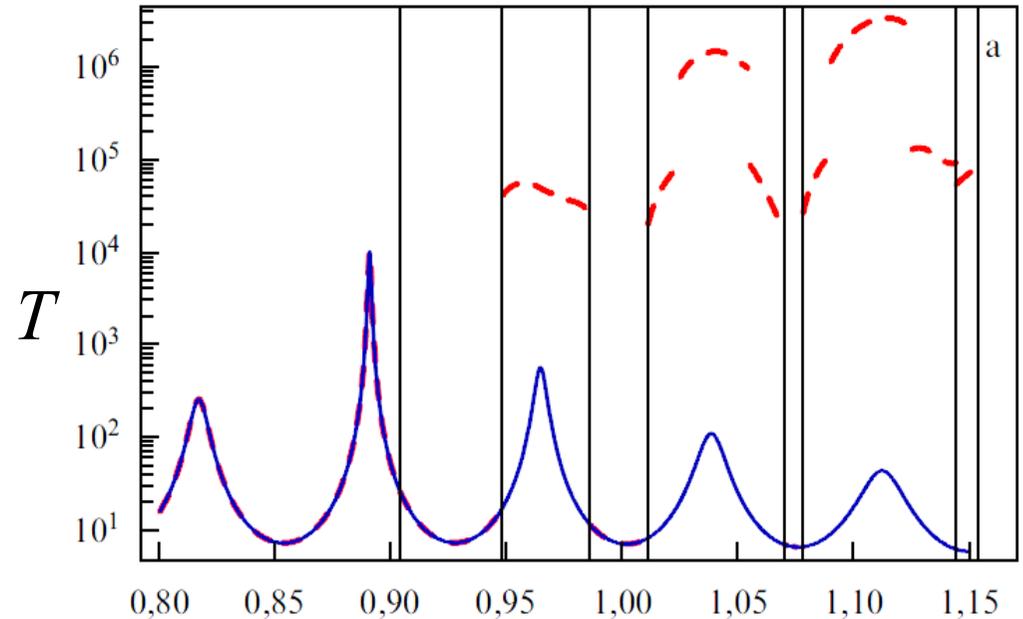
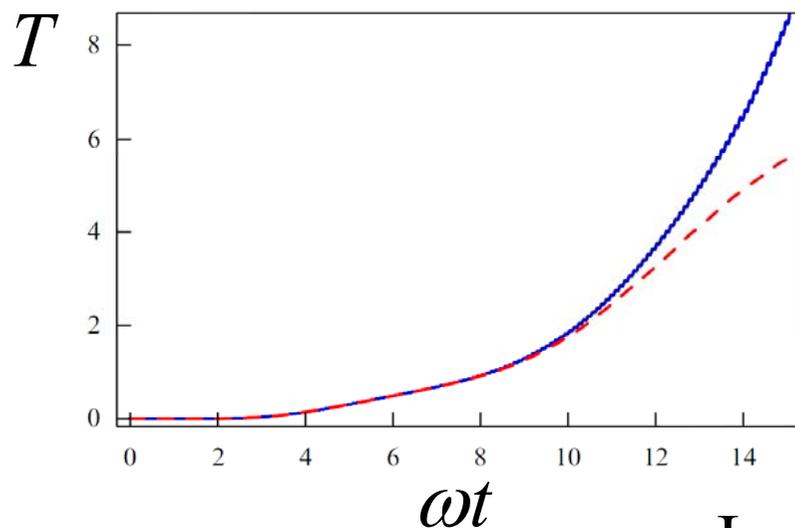
$$E(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_0(\omega) g(z,\omega) \exp(-i\omega t) d\omega - 2\pi i \sum_j \text{res}(g(\omega_j, z)) e_0(\omega_j) \exp(-i\omega_j t)$$



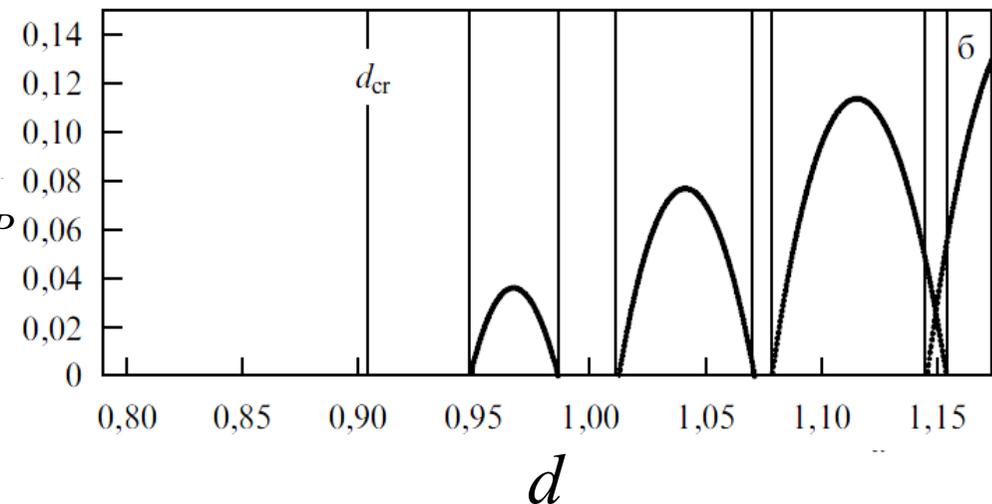
А.В. Дорофеев, А.А. Зябловский, А.А. Пухов, А.А. Лисянский, А.П. Виноградов, УФН 182, 1157-1175 (2012)

Временная задача о падении импульса на усиливающий слой. Обратное преобразование Фурье

$$E(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_0(\omega) g(z,\omega) \exp(-i\omega t) d\omega - 2\pi i \sum_j \text{res}(g(\omega_j, z)) e_0(\omega_j) \exp(-i\omega_j t)$$



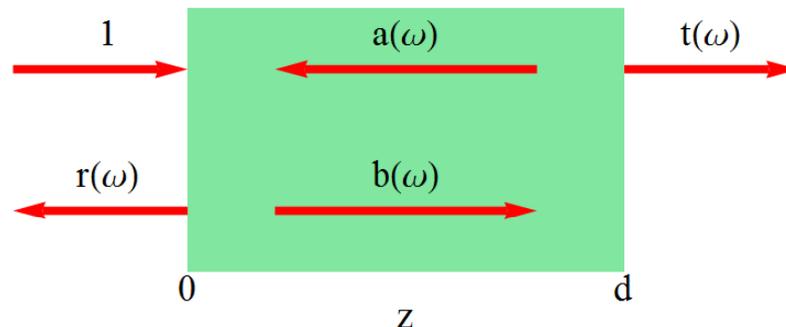
$\text{Im } \omega \tau_P$



А.В. Дорофеевко, А.А. Зябловский,
А.А. Пухов, А.А. Лисянский, А.П.
Виноградов, УФН 182, 1157-1175
(2012)

Временная задача о падении импульса на усиливающий слой.

Li-Gang Wang et al. *Phys. Rev. Lett.* 112, 233601 (2014)

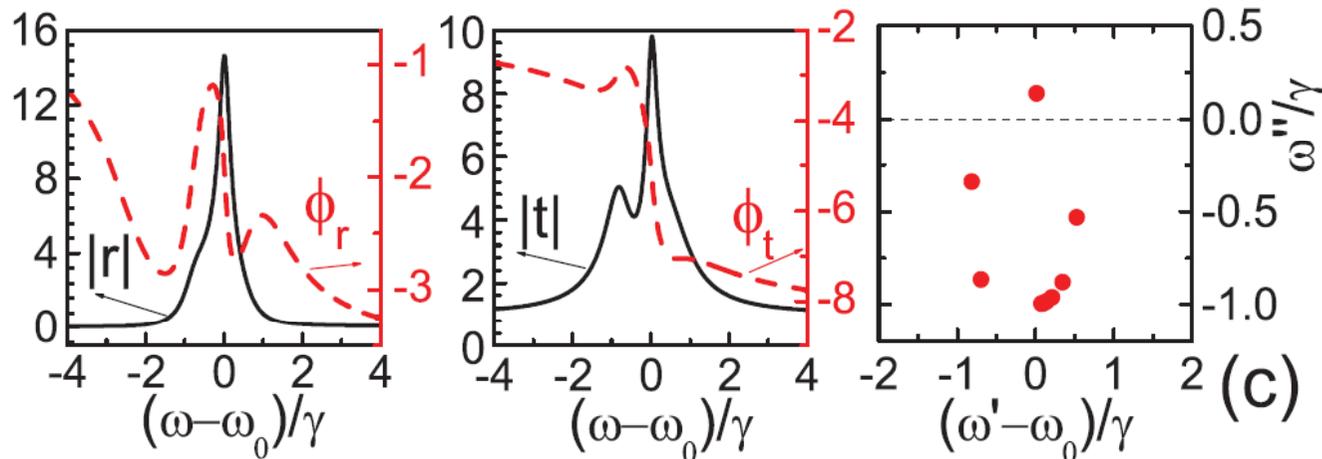
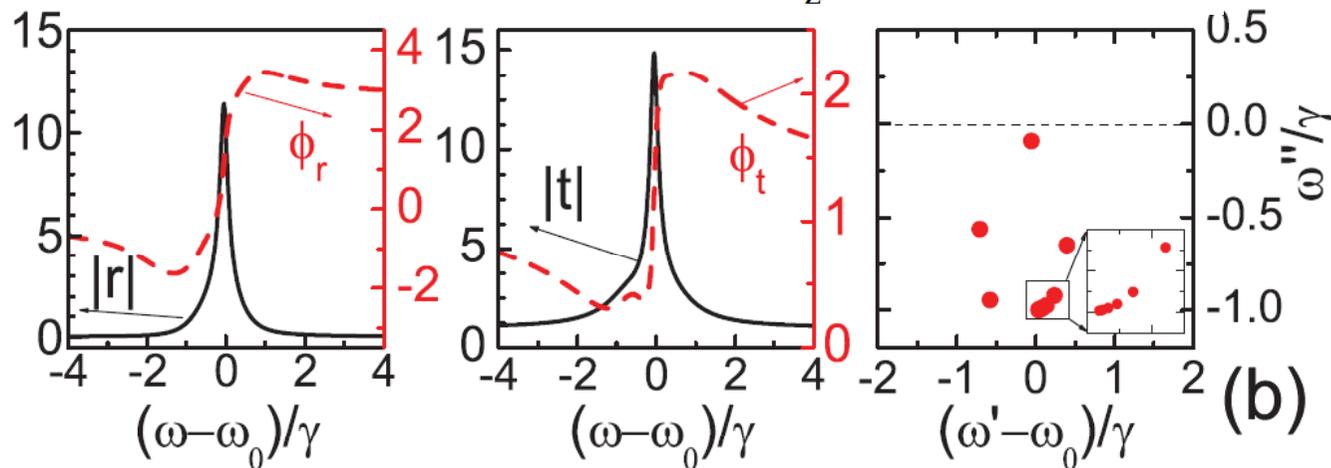


$$\tau_{r,t} = \partial \phi_{r,t}(\omega) / \partial \omega$$

$$v = L / \tau_{r,t} > c$$

- сверхсветовое распространение импульса

$$\tau_{r,t} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \text{const}$$

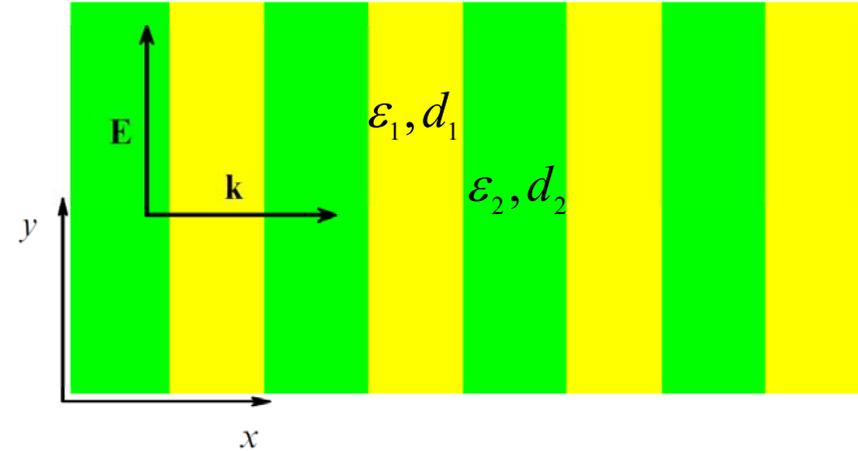


Лазерная генерация в фотонном кристалле, содержащем усиливающие слои

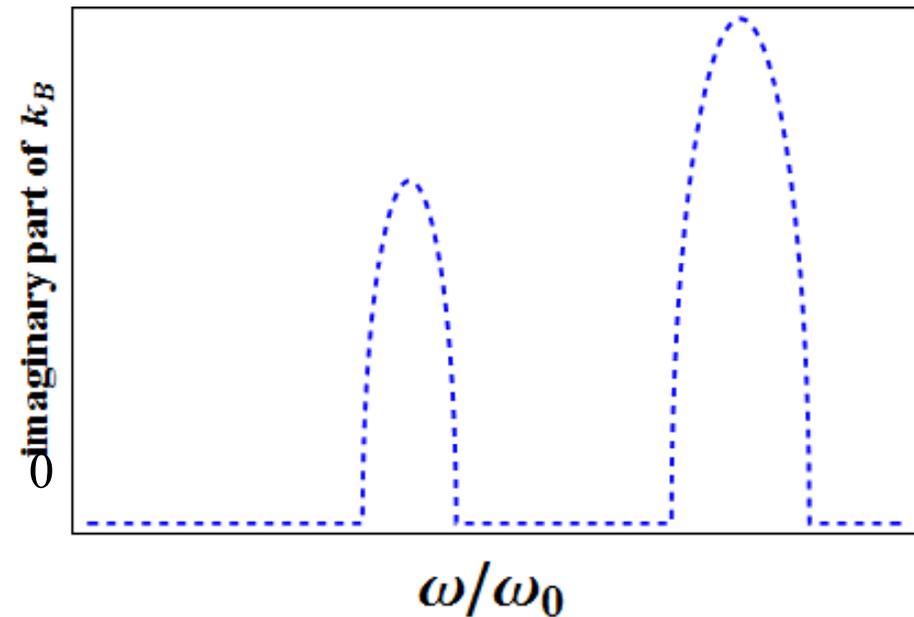
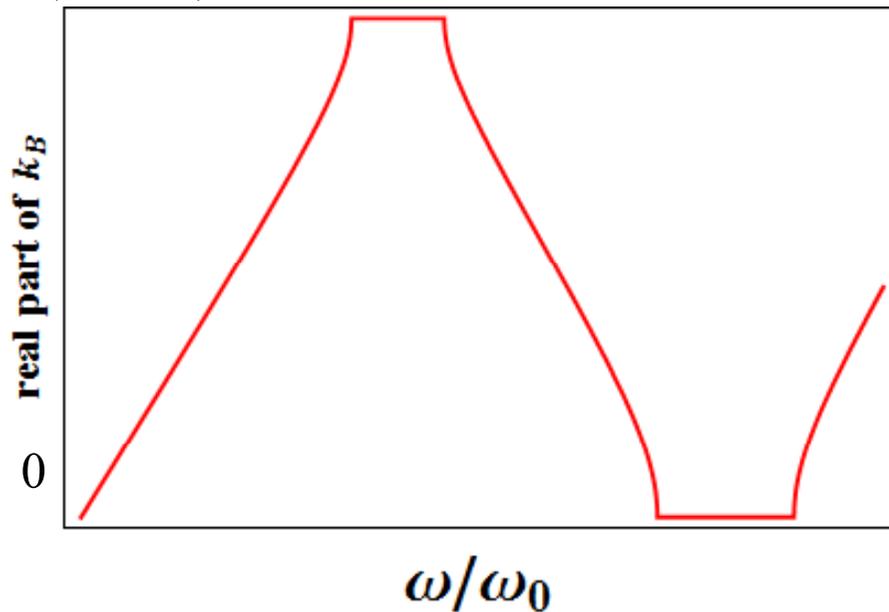
$$E(x) = f(x) \exp(ik_B x), \quad f(x) = f(x + d_1 + d_2)$$

$$\cos(k_B (d_1 + d_2)) = \cos(k_0 d_1 \sqrt{\epsilon_1}) \cos(k_0 d_2 \sqrt{\epsilon_2}) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \right) \sin(k_0 d_1 \sqrt{\epsilon_1}) \sin(k_0 d_2 \sqrt{\epsilon_2})$$

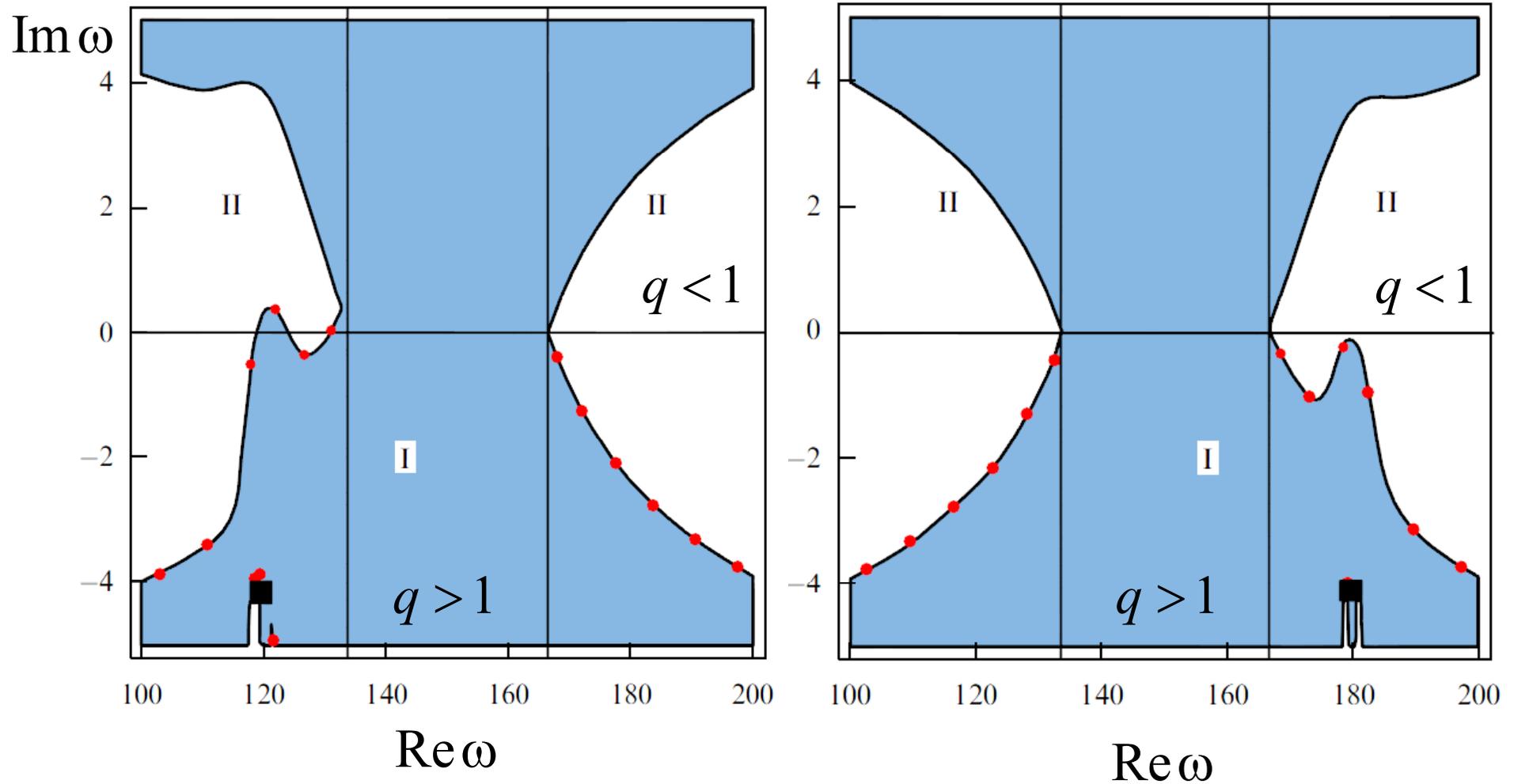
С.М. Рытов Электромагнитные свойства
мелкослоистой среды (1955)



$$\pi / (d_1 + d_2)$$

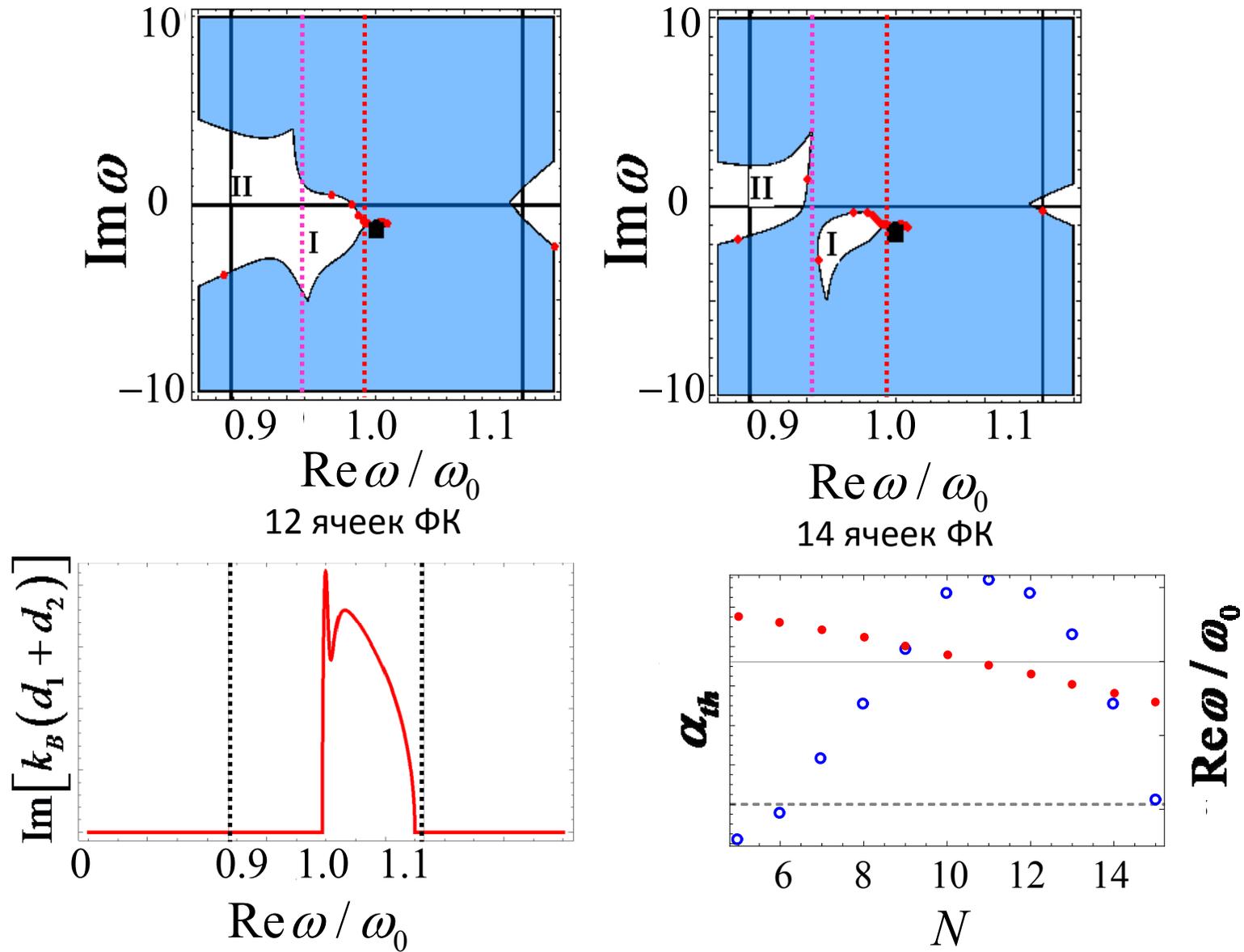


Лазерная генерация в разрешенной зоне ФК



А.В. Дорофеевко, А.А. Зябловский, А.А. Пухов, А.А. Лисянский, А.П. Виноградов,
УФН 182, 1157-1175 (2012)

Лазерная генерация в запрещенной зоне ФК



А.В. Дорофеев, А.А. Зябловский, А.А. Пухов, А.А. Лисянский, А.П. Виноградов,
УФН 182, 1157-1175 (2012)

Оператор пространственной инверсии

$$\hat{P}:(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$$

$$\hat{P}|\psi\rangle = |\varphi\rangle \quad \langle\psi|\psi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\psi|\hat{P}^+\hat{P}|\psi\rangle \Rightarrow \boxed{\hat{P}^+\hat{P} = \hat{1}}$$

$$\hat{P}^2|\psi\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle \quad \boxed{\hat{P}^+ = \hat{P}} \quad \hat{P}^2|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \hat{P}|\psi_P\rangle = \pm|\psi_P\rangle$$

$$\boxed{\hat{P}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{P} = -\hat{\mathbf{p}}}$$

$$\boxed{\hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P} = -\hat{\mathbf{r}}}$$

$$\hat{P}^+\hat{\mathbf{j}}\hat{P} = \hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{P}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}}\hat{P} = \hat{P}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{P}\hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P} = (\hat{P}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{P})(\hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P}) = \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}}$$

$$[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}] = i\hat{1}\hbar$$

$$\hat{P}^+[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}]\hat{P} = \hat{P}^+i\hat{1}\hat{P}\hbar$$

$$\hat{P}^+[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}]\hat{P} = [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}] \Rightarrow \boxed{\hat{P}^+i\hat{1}\hat{P} = i\hat{1}}$$

$$\boxed{\hat{P}^+\hat{H}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})\hat{P} = \hat{H}(\hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P}, \hat{P}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{P}) = \hat{H}(-\hat{\mathbf{r}}, -\hat{\mathbf{p}})}$$

Оператор обращения времени

$$\hat{T} : t \rightarrow -t$$

$$\hat{T}|\psi\rangle = |\varphi\rangle \quad \langle\psi|\psi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\psi|\hat{T}^+\hat{T}|\psi\rangle \Rightarrow \boxed{\hat{T}^+\hat{T} = \hat{1}}$$

$$\boxed{\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T} = -\hat{\mathbf{p}}}$$

$$\boxed{\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T} = \hat{\mathbf{r}}}$$

$$\hat{T}^+\hat{\mathbf{j}}\hat{T} = -\hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}}\hat{T} = \hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T}\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T} = (\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T})(\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T}) = -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}}$$

$$[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}] = i\hbar$$

$$\hat{T}^+[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}]\hat{T} = -\hat{T}^+i\hbar\hat{T}$$

$$\hat{T}^2|\psi\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$$

$$\boxed{\hat{T}^+i\hbar\hat{T} = -i\hbar}$$

$$\begin{aligned} \hat{T}^+[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}]\hat{T} = -[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}] &\Rightarrow \hat{T}^3|\psi\rangle = \hat{T}(\hat{T}^2|\psi\rangle) = \hat{T}e^{i\theta}|\psi\rangle = e^{-i\theta}\hat{T}|\psi\rangle = \\ &= \hat{T}^2(\hat{T}|\psi\rangle) = e^{i\theta}\hat{T}|\psi\rangle \Rightarrow e^{i\theta} = \pm 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{T}^+\hat{H}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})\hat{T} = \hat{H}^*(\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T}, \hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T}) = \hat{H}^*(\hat{\mathbf{r}}, -\hat{\mathbf{p}})}$$

PT -симметричные операторы

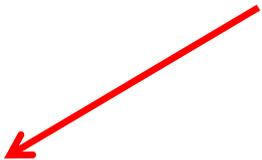
$$\hat{P}^+ \hat{H}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}) \hat{P} = \hat{H}(-\hat{\mathbf{r}}, -\hat{\mathbf{p}}) \quad \hat{T}^+ \hat{H}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}) \hat{T} = \hat{H}^*(\hat{\mathbf{r}}, -\hat{\mathbf{p}})$$

$$\hat{P}^+ \hat{T}^+ \hat{H}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}) \hat{P} \hat{T} = \hat{H}^*(-\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$$

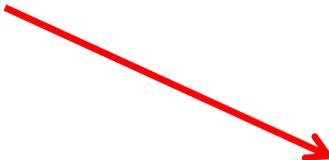
$$\hat{H}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}) = \hat{H}^*(-\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$$

$$\hat{P} \hat{T} \hat{H} = \hat{H} \hat{P} \hat{T} \Leftrightarrow [\hat{P} \hat{T}, \hat{H}] = 0$$

$$\hat{P} \hat{T} \hat{H} = \hat{H} \hat{P} \hat{T} \Leftrightarrow [\hat{P} \hat{T}, \hat{H}] = 0 \quad \hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$


$$PT |\psi\rangle = c |\psi\rangle$$

PT -симметричная фаза


$$PT |\psi\rangle \neq c |\psi\rangle$$

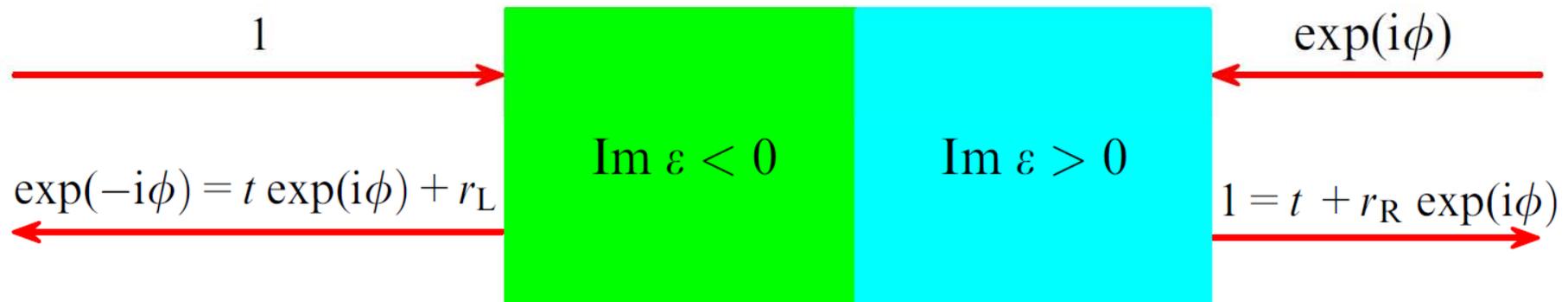
PT -несимметричная фаза

PT -симметричные оптические системы

$$\hat{H} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon(x)$$

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^*(-x)$$

Y.D. Chong et al., *Phys. Rev. Lett.* 106, 093902 (2011)



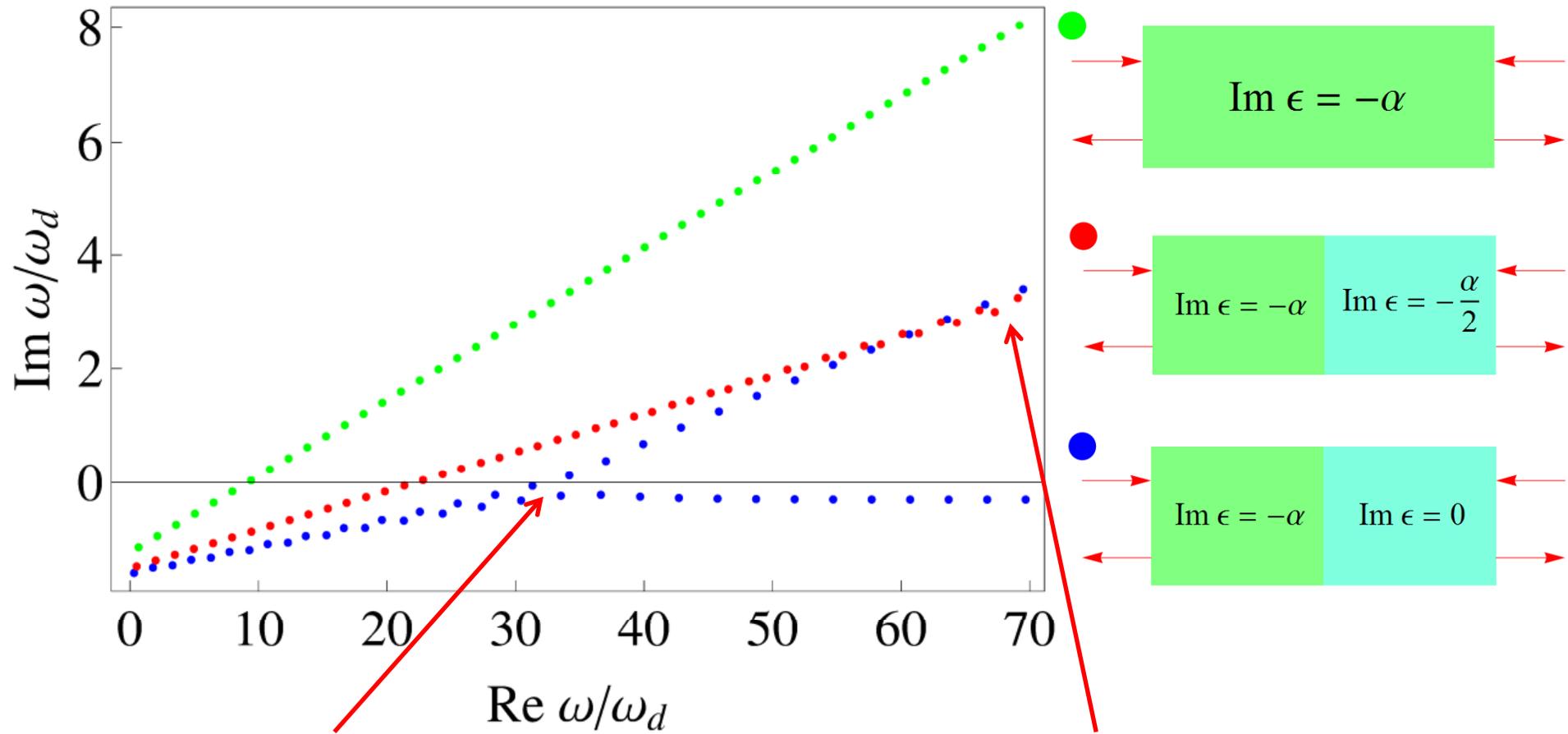
$$e^{-i\phi} = t e^{i\phi} + r_L$$

$$1 = t + r_R e^{i\phi}$$

$$(r_L - r_R) / t = -2i \sin(\phi)$$

$$\left| (r_L - r_R) / t \right| \leq 2$$

Лазерная генерация в PT -симметричных системах

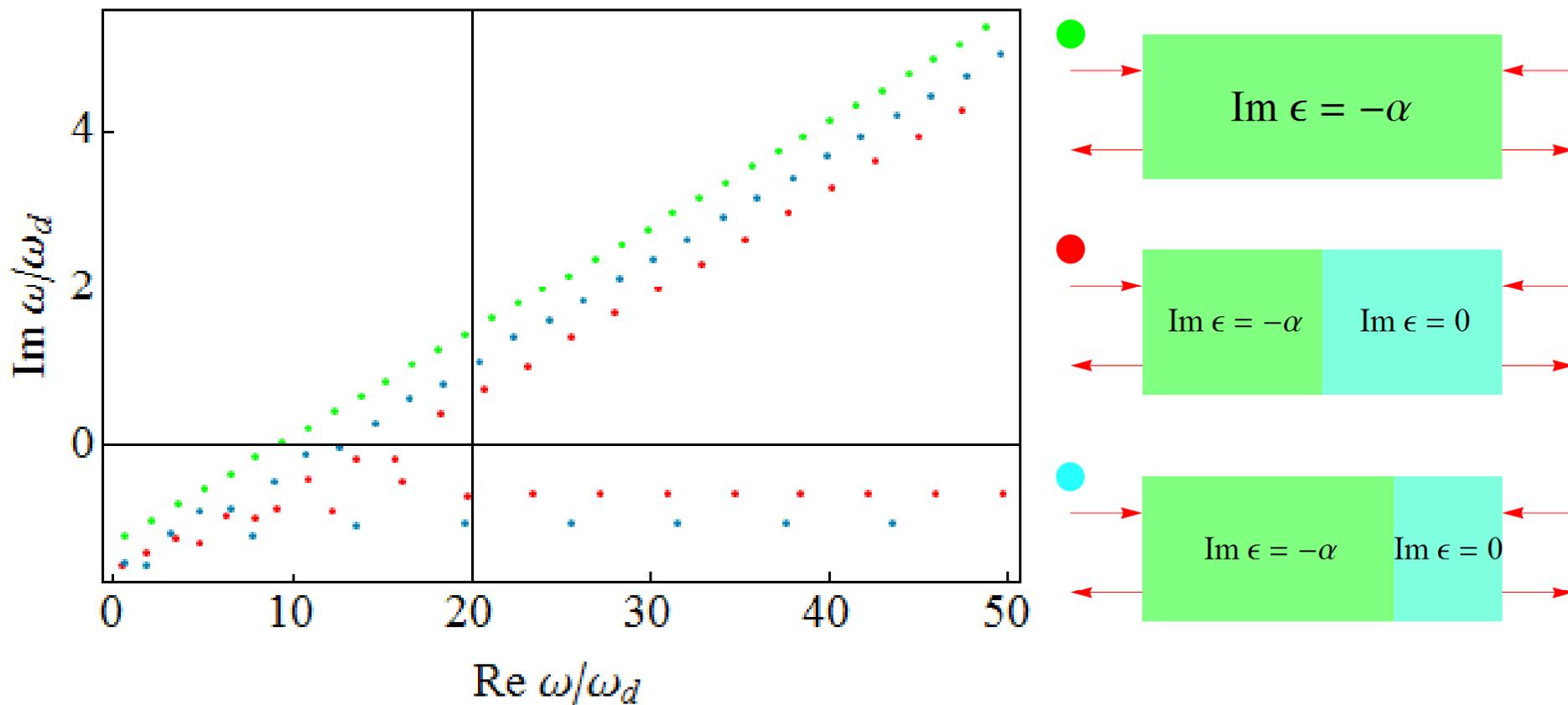


Фазовый переход

Подавление лазерной генерации
при увеличении коэффициента
усиления

А.А. Зябловский, А.П. Виноградов, А.А. Пухов, А.В. Дорофеев,
А.А. Лисянский, *УФН* 184, 1177-1198 (2014)

Лазерная генерация в неэрмитовых оптических системах



А.А. Зябловский, А.П. Виноградов, А.А. Пухов, А.В. Дорофеев,
А.А. Лисянский, *УФН* 184, 1177-1198 (2014)

Спасибо за внимание!