Конференция
по теории чисел и приложениям
в честь 80 - летия
А.А. КАРАЦУБЫ

Москва, 22-27 мая 2017 г.

Сборник аннотаций

Конференция
по теории чисел и приложениям
в честь 80-летия А.А. Карацубы

Математический институт
им. В.А. Стеклова РАН

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

22-27 мая 2017 года

При частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект № 17-01-20094 Г), Федерального агентства научных организаций, Потребительского общества “Полиграфф”

При содействии Математического института им. В.А. Стеклова РАН и Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Программный комитет конференции

Председатель программного комитета конференции:

Карл Померанс, *Дартмутский колледж, Хановер, США*

Заместители председателя программного комитета конференции:

Чубариков Владимир Николаевич, *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
Королёв Максим Александрович, *Математический институт им. В.А. Стеклова РАН*, *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Члены программного комитета:

Конягин Сергей Владимирович, *Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия*
Резвякова Ирина Сергеевна, *Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия*
Шкредов Илья Дмитриевич, *Математический институт им. В.А. Стеклова РАН*, *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Организационный комитет конференции

Председатель организационного комитета конференции:

Козлов Валерий Васильевич, *Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия*

Заместители председателя организационного комитета конференции:

Конягин Сергей Владимирович, *Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия*
Королёв Максим Александрович, *Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия*

Члены организационного комитета конференции:

Резвякова Ирина Сергеевна *Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия*

Program Committee

The chairman of Program Committee:

Carl Pomerance, *Dartmouth College, Hanover, USA*

Vice-chairmans of Program Committee:

Chubarikov, Vladimir Nikolaevich, *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
Korolev, Maxim Aleksandrovich, *Steklov Mathematical Institute*, *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

The members of Program Committee:

Konyagin, Sergei Vladimirovich, *Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia*

Rezvyakova, Irina Sergeevna, *Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia*

Shkredov, Ilya Dmitrievich, *Steklov Mathematical Institute*, *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Organizers

The chairman of Organizing Committee:

Kozlov, Valery Vasil'evich, *Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia*

The members of Organizing Committee:

Chubarikov, Vladimir Nikolaevich, *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Rezvyakova, Irina Sergeevna, *Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia*

Список докладчиков

Безродных, Сергей Игоревич
Быковский, Виктор Алексеевич
Васильев, Антон Николаевич
Весалаинен, Эса Васили
Галато, Орельян
Гонг, Ке
Гриценко, Сергей Александрович
Добровольский, Николай Михайлович
Долбилин, Николай Петрович
Журавлёв, Владимир Георгиевич
Ивич, Александар
Калмынин, Александр Борисович
Конягин, Сергей Владимирович
Королёв, Максим Александрович
Лау, Юк-Кам

Лауринчикас, Антанас
Майер, Хельмут
Малышев, Фёдор Михайлович
Матиясевич, Юрий Владимирович
Мацайтене, Рената
Миличевич, Джордж
Мощевитин, Николай Германович
Назайкинский, Владимир Евгеньевич
Нестеренко, Юрий Валентинович
Нунес, Рамон Морейра
Освальд, Никола
Панчишкин, Алексей Алексеевич
Паршин, Алексей Николаевич
Попов, Дмитрий Александрович
Пухликов, Александр Валентинович
Райгородский, Андрей Михайлович
Рахмонов, Зарулло Хусенович
Резвякова, Ирина Сергеевна
Рен, Ксиумин
Толев, Дойчин Иванов
Тсанг, Каи-Ман
Фёдоров, Глеб Владимирович
Форд, Кевин
Фроленков, Дмитрий Андреевич
Хиари, Гейт
Чирский, Владимир Григорьевич
Чубариков, Владимир Николаевич
Шкредов, Илья Дмитриевич
Штойдинг, Йорн

List of speakers

Bezrodnykh, Sergei Igorevich
Bykovskii, Victor Alexeevich
Chirskii, Vladimir Grigor'evich
Chubarikov, Vladimir Nikolaevich
Galateau, Aurélien
Gong, Ke
Gritsenko, Sergey Alexandrovich
Dobrovol'skii, Nikolai Mikhailovich
Dolbilin, Nikolai Petrovich
Fedorov, Gleb Vladimirovich
Ford, Kevin
Frolenkov, Dmitrii Andreevich
Hiary, Ghaith
Ivić, Aleksandar
Kalmynin, Aleksandr Borisovich
Konyagin, Sergei Vladimirovich
Korolev, Maxim Aleksandrovich
Lau, Yuk-Kam
Laurinčikas, Antanas
Macaitienė, Renata
Maier, Helmut
Malyshev, Fedor Mikhailovich
Matiyasevich, Yuri Vladimirivich
Milićević, Djordje
Moshchevitin, Nikolay Germanovich
Nazaikinskii, Vladimir Evgen'evich
Nesterenko, Yuri Valentinovich
Nunes, Ramon Moreira
Oswald, Nicola

Panchishkin, Alexey Alekseevich
Parshin, Aleksei Nikolaevich
Popov, Dmitrii Aleksandrovich
Pukhlikov, Aleksandr Valentinovich
Raigorodskii, Andrei Mikhailovich
Rakhmonov, Zarullo Khusenovich
Ren, Xiumin
Rezvyakova, Irina Sergeevna
Tolev, Doychin Ivanov
Tsang, Kai-Man
Shkredov, Ilya Dmitrievich
Steuding, Jorn
Vasil'ev, Anton Nikolaevich,
Vesalainen, Esa Vasili
Zhuravlev, Vladimir Georgievich

Общая информация

Международная "Конференция по теории чисел и приложениям в честь 80-летия А.А. Карацубы" будет проходить с 22 по 27 мая 2017 г. в Москве. Заседания 22, 24 – 26 мая состоятся в Математическом институте им. В.А.Стеклова Российской академии наук (119991, Москва, ул. Губкина, д.8), в конференц-зале на 9 этаже. Заседания 23 и 27 мая пройдут в на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, Главное здание), в лекционной аудитории 16-10 (16 этаж).

Регистрация участников будет проходить в Математическом институте им. В.А. Стеклова 22 мая с $9^{\underline{00}}$ до $10^{\underline{00}}$ (9 этаж, конференц-зал).

Видеозаписи докладов будут доступны на официальном сайте конференции: `www.mathnet.ru/conf936`.

General information

The international "A.A. Karatsuba's 80 th Birthday Conference in Number Theory and Applications" will held from May, 22 till May, 27, 2017, in Moscow. The conference meetings of days: May, 22, 24 – 26 will take place in Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (119991, Moscow, Russia, Gubkina str., 8), at the Conference hall (9 floor). The conference meetings of days: May, 23, 27 will take place at Department of Mechanics and Mathematics of Lomonosov Moscow State University (199991, GSP-1, Moscow, Leninskie Gory, MSU, Main Building), at Lecture Hall 16-10 (16 floor).

The registration will take place in Steklov Mathematical Institute on May, 22, $9^{\underline{00}}$ – $10^{\underline{00}}$ (9 floor, Conference hall).

Videos of the talks will be available on the web-site of the Conference: `www.mathnet.ru/conf936`.

Программа конференции

Понедельник, 22 мая 2017 г.

(МИАН им. В.А. Стеклова, 9 этаж, конференц-зал)

$10^{\underline{00}} - 10^{\underline{10}}$ **Открытие конференции**

$10^{\underline{10}} - 10^{\underline{40}}$ **А. Ивич**, ***Кратности нулей $\zeta(s)$ и её значения на коротких промежутках***

$10^{\underline{45}} - 11^{\underline{15}}$ **И.Д. Шкредов**, ***Приложения теории инцидентностей к некоторым тройным тригонометрическим суммам***

$11^{\underline{20}} - 11^{\underline{40}}$ Перерыв на чай / кофе

$11^{\underline{40}} - 12^{\underline{10}}$ **Д.А. Фроленков**, ***Необращение в ноль L-функций автоморфных форм относительно конгруэнц подгруппы, когда уровень равен степени простого числа***

$12^{\underline{15}} - 12^{\underline{45}}$ **А.Б. Калмынин**, ***Омега-теоремы для дзета-функции Римана и её производных вблизи прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$***

$12^{\underline{50}} - 13^{\underline{20}}$ **Х. Майер**, ***Тернарная проблема Гольдбаха и простым и двумя изолированными простыми***

$13^{\underline{25}} - 14^{\underline{50}}$ Перерыв на обед

$14^{\underline{50}} - 15^{\underline{20}}$ **К. Рен**, ***Гиперсуммы Клоостермана по различным модулям и их приложения***

$15^{\underline{25}} - 15^{\underline{55}}$ **А.А. Седунова**, ***Эффективная версия теоремы Бомбьери-Виноградова***

$\mathbf{16^{\underline{00}} - 16^{\underline{20}}}$ Перерыв на чай / кофе

$\mathbf{16^{\underline{20}} - 16^{\underline{50}}}$ **Г. Хиари**, *О кубической тригонометрической сумме с малыми кубическими коэффициентами*

$\mathbf{16^{\underline{55}} - 17^{\underline{25}}}$ **В.А. Быковский**, *О распределении целых точек на гиперболоиде*

Вторник, 23 мая 2017 г.

(МГУ им. М.В. Ломоносова, Главное здание, механико-математический факультет 16 этаж, ауд. 16-10)

$\mathbf{10^{\underline{00}} - 10^{\underline{30}}}$ **В.Н. Чубариков**, *Аддитивные и мультипликативные свойства арифметических функций*

$\mathbf{10^{\underline{35}} - 11^{\underline{05}}}$ **Ю.В. Нестеренко**, *Квазимодулярные функции и трансцендентные числа*

$\mathbf{11^{\underline{10}} - 11^{\underline{30}}}$ Перерыв на чай / кофе

$\mathbf{11^{\underline{30}} - 12^{\underline{00}}}$ **Д.И. Толев**, *О некоторых аддитивных задачах с простыми и почти простыми числами*

$\mathbf{12^{\underline{05}} - 12^{\underline{35}}}$ **А.А. Панчишкин**, *Модулярные и p-адические методы в теории дзета-функций*

$\mathbf{12^{\underline{40}} - 13^{\underline{10}}}$ **Н.Г. Мощевитин**, *О функциях меры иррациональности*

$\mathbf{13^{\underline{15}} - 14^{\underline{50}}}$ Перерыв на обед

$\mathbf{14^{\underline{50}} - 15^{\underline{20}}}$ **А.Н. Васильев**, *О последовательностях, не являющихся последовательностями Романова*

$\mathbf{15^{\underline{25}} - 15^{\underline{55}}}$ **В.Г. Журавлёв**, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби*

$\mathbf{16^{\underline{00}} - 16^{\underline{20}}}$ Перерыв на чай / кофе

$\mathbf{16^{\underline{20}} - 16^{\underline{50}}}$ **С.А. Гриценко**, *О дробных моментах некоторых успокоенных арифметических рядов Дирихле*

$\mathbf{16^{\underline{55}} - 17^{\underline{25}}}$ **З.Х. Рахмонов**, *Суммы значений неглавных характеров в последовательности сдвинутых простых чисел*

Среда, 24 мая 2017 г.

(МИАН им. В.А. Стеклова, 9 этаж, конференц-зал)

$\mathbf{10^{\underline{00}} - 10^{\underline{30}}}$ **К.-М Тсанг**, *О некоторых средних значениях, связанных с функцией делителей и дзета-функцией Римана*

$\mathbf{10^{\underline{35}} - 11^{\underline{05}}}$ **Ю.-К. Лау**, *Коэффициенты Фурье модулярных форм полуцелого веса*

$\mathbf{11^{\underline{10}} - 11^{\underline{30}}}$ Перерыв на чай / кофе

$\mathbf{11^{\underline{30}} - 12^{\underline{00}}}$ **М.А. Королёв**, *Обратные вычеты и последовательности Пятецкого - Шапиро*

$12^{\underline{05}}$ – $12^{\underline{35}}$ **Й. Штойдинг, Н. Освальд**, ***Теоремы единственности для дзета-функций***

$12^{\underline{40}}$ – $13^{\underline{10}}$ **Ю.В. Матиясевич**, ***Приближение дзета-функции Римана с помощью конечных эйлеровых произведений***

$13^{\underline{15}}$ – $14^{\underline{40}}$ Перерыв на обед

$14^{\underline{45}}$ Отъезд на экскурсионном автобусе от здания МИАН им. В.А. Стеклова

$16^{\underline{30}}$ – $18^{\underline{00}}$ Экскурсия в Оружейную палату Московского Кремля

$18^{\underline{30}}$ – $19^{\underline{30}}$ Возвращение на экскурсионном автобусе к зданию МИАН им. В.А. Стеклова

Четверг, 25 мая 2017 г.

(МИАН им. В.А. Стеклова, 9 этаж, конференц-зал)

$10^{\underline{00}}$ – $10^{\underline{30}}$ **А.В. Пухликов**, ***Факториальные гиперповерхности***

$10^{\underline{35}}$ – $11^{\underline{05}}$ **Дж. Миличевич**, ***Тригонометрические суммы: p-адический аспект***

$11^{\underline{10}}$ – $11^{\underline{30}}$ Перерыв на чай / кофе

$11^{\underline{30}}$ – $12^{\underline{00}}$ **О. Галато**, ***Точная оценка кручения на подмногообразиях абелевых многообразий***

$12^{\underline{05}}$ – $12^{\underline{35}}$ **А. Лауринчикас**, ***Распределение нулей дзета-функции Римана и явление универсальности***

$12^{\underline{40}}$ – $13^{\underline{10}}$ **Р. Мацайтене**, ***Универсальность L-функций из класса Сельберга***

$13^{\underline{15}}$ – $14^{\underline{40}}$ Перерыв на обед

$14^{\underline{40}}$ – $15^{\underline{10}}$ **С.И. Безродных**, ***Об аналитическом продолжении функции Лауричеллы***

$15^{\underline{15}}$ – $15^{\underline{45}}$ **А.Н. Паршин**, ***Адельный подход к дзета-функциям многообразий над конечными полями***

$15^{\underline{50}}$ – $16^{\underline{10}}$ Перерыв на чай / кофе

$16^{\underline{10}}$ – $17^{\underline{25}}$ Обсуждение нерешённых задач теории чисел

$18^{\underline{00}}$ Ужин для участников Конференции в ресторане "Примавера"

Пятница, 26 мая 2017 г.

(МГУ им. М.В. Ломоносова, главное здание, 16 этаж, аудитория 16-24)

$10^{\underline{00}}$ – $10^{\underline{30}}$ **К. Гонг**, ***Новые встречи с суммами характеров***

$10^{\underline{35}}$ – $11^{\underline{05}}$ **К. Форд**, ***Подряд идущие составные числа в полиномиальных последовательностях***

$11^{\underline{10}}$ – $11^{\underline{30}}$ Перерыв на чай / кофе

$11^{\underline{35}}$ – $12^{\underline{05}}$ **В.Е. Назайкинский**, ***Об асимптотике считающей функции и типичной форме элементов арифметической полугруппы***

$12^{\underline{10}}$ – $12^{\underline{40}}$ **Р.М. Нунес**, ***Двенадцатый момент L-функций Дирихле, отвечающих гладким модулям***

$12^{\underline{45}}$ – $13^{\underline{15}}$ **С.В. Конягин**, ***О неприводимых решениях уравнения с обратными величинами***

$13^{\underline{20}}$ – $14^{\underline{40}}$ Перерыв на обед

$14^{\underline{40}}$ – $15^{\underline{10}}$ **Н.П. Долбилин**, ***О регулярных системах***

$15^{\underline{15}}$ – $15^{\underline{45}}$ **Э.В. Весалаинен**, ***Контрпримеры к гипотезе об ℓ-модулярной функции секретности***

$15^{\underline{50}}$ – $16^{\underline{10}}$ Перерыв на чай / кофе

$16^{\underline{10}}$ – $16^{\underline{40}}$ **Д.А. Попов**, ***О величине $P(x)$***

$16^{\underline{45}}$ – $17^{\underline{15}}$ **Ф.М. Малышев**, ***Порождение знакопеременной группы модульными сложениями***

Суббота, 27 мая 2017 г.

(МГУ им. М.В. Ломоносова, Главное здание, механико-математический факультет 16 этаж, ауд. 16-10)

$10^{\underline{00}}$ – $10^{\underline{30}}$ **Н.М. Добровольский**, ***Об алгоритме Лагранжа для приведённых алгебраических иррациональностей***

$10^{\underline{35}}$ – $11^{\underline{05}}$ **В.Г. Чирский**, ***Конечные достаточно непериодические последовательности***

$11^{\underline{10}}$ – $11^{\underline{30}}$ Перерыв на чай / кофе

$11^{\underline{30}} - 12^{\underline{00}}$ **Г.В. Фёдоров**, *О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях*

$12^{\underline{05}} - 12^{\underline{35}}$ **А.М. Райгородский**, *О хроматических числах случайных графов*

$12^{\underline{40}} - 13^{\underline{10}}$ **И.С. Резвякова**, *О нулях дзета-функции Эпштейна*

$13^{\underline{15}}$ **Закрытие Конференции**

Conference Program

Monday, May, 22

(Steklov Mathematical Institute, 9 floor, conference-hall)

$10^{\underline{00}} - 10^{\underline{10}}$ **Opening of the Conference**

$10^{\underline{10}} - 10^{\underline{40}}$ **A. Ivić**, *Multiplicites of zeros of $\zeta(s)$ and its values over short intervals*

$10^{\underline{45}} - 11^{\underline{15}}$ **I.D. Shkredov**, *Applications of incidences theory to some triple exponential sums*

$11^{\underline{20}} - 11^{\underline{40}}$ Coffee-break

$11^{\underline{40}} - 12^{\underline{10}}$ **D.A. Frolenkov**, *Non-vanishing of automorphic L-functions of prime power level*

$12^{\underline{15}} - 12^{\underline{45}}$ **A.B. Kalmynin**, *Omega-theorems for Riemann's zeta function and its derivatives near the line* $\mathrm{Re}\, s = 1$

$12^{\underline{50}} - 13^{\underline{20}}$ **H. Maier**, *The Ternary Goldbach Problem with a prime and two isolated primes*

$13^{\underline{25}}$ – $14^{\underline{50}}$ Lunch time

$14^{\underline{50}}$ – $15^{\underline{20}}$ **X. Ren**, ***Estimates on Hyper-Kloosterman sums and applications***

$15^{\underline{25}}$ – $15^{\underline{55}}$ **A.A. Sedunova**, ***An effective version of the Bombieri-Vinogradov theorem***

$16^{\underline{00}}$ – $16^{\underline{20}}$ Coffee-break

$16^{\underline{20}}$ – $16^{\underline{50}}$ **G. Hiary**, ***On cubic exponential sums with a small cubic coefficient***

$16^{\underline{55}}$ – $17^{\underline{25}}$ **V.A. Bykovskii**, ***The distribution of lattice points on the hyperboloid***

Tuesday, May, 23

(Lomonosov State University, Main building, 16 floor, Lecture hall 16-10)

$10^{\underline{00}}$ – $10^{\underline{30}}$ **V.N. Chubarikov**, ***Additive and multiplicative properties of arithmetic functions***

$10^{\underline{35}}$ – $11^{\underline{05}}$ **Yu.V. Nesterenko**, ***Some identities for quasimodular functions***

$11^{\underline{10}}$ – $11^{\underline{30}}$ Coffee - break

$11^{\underline{30}}$ – $12^{\underline{00}}$ **D.I. Tolev**, ***Additive problems involving primes and almost-primes***

$12^{\underline{05}}$ – $12^{\underline{35}}$ **A.A. Panchishkin**, ***Modular and p-adic methods in the theory of zeta functions***

$12^{\underline{40}}$ – $13^{\underline{10}}$ **N.G. Moshchevitin**, ***Irrationality measure functions***

$13^{\underline{15}} - 14^{\underline{50}}$ Lunch time

$14^{\underline{50}} - 15^{\underline{20}}$ **A.N. Vasil'ev**, *On non-Romanoff sequences*

$15^{\underline{25}} - 15^{\underline{55}}$ **V.G. Zhuravlev**, *Simplex-modular algorithm for the decomposition of algebraic numbers into multidimensional continued fractions*

$16^{\underline{00}} - 16^{\underline{20}}$ Coffee - break

$16^{\underline{20}} - 16^{\underline{50}}$ **S.A. Gritsenko**, *Estimates for fraction moments of arithmetic Dirichlet series*

$16^{\underline{55}} - 17^{\underline{25}}$ **Z.Kh. Rakhmonov**, *Non-principal character sums over shifted primes*

Wednesday, May, 24

(Steklov Mathematical Institute, 9 floor, conference-hall)

$10^{\underline{00}} - 10^{\underline{30}}$ **K.-M. Tsang**, *On some mean values for the divisor function and the Riemann zeta-function*

$10^{\underline{35}} - 11^{\underline{05}}$ **Y.-K. Lau**, *Fourier coefficients of half-integral weight modular forms*

$11^{\underline{10}} - 11^{\underline{30}}$ Coffee - break

$11^{\underline{30}} - 12^{\underline{00}}$ **M.A. Korolev**, *Inverse residues and Pyatetskii-Shapiro sequences*

$12^{\underline{05}} - 12^{\underline{35}}$ **J. Steuding, N. Oswald**, *Uniqueness theorems for zeta-functions*

$12^{\underline{40}} - 13^{\underline{10}}$ **Yu.V. Matiyasevich**, *Approximation of the zeta function via finite Euler products*

$13^{\underline{15}} - 14^{\underline{40}}$ Lunch time

$14^{\underline{45}}$ Transfer from Steklov Mathematical Institute to Moscow Kremlin

$16^{\underline{30}} - 18^{\underline{00}}$ Excursion to Armory chamber of Moscow Kremlin

$18^{\underline{30}} - 19^{\underline{30}}$ Transfer from Moscow Kremlin to Steklov Mathematical Institute

Thursday, May, 25

(Steklov Mathematical Institute, 9 floor, conference-hall)

$10^{\underline{00}} - 10^{\underline{30}}$ **A.V. Pukhlikov**, ***Factorial hypersurfaces***

$10^{\underline{35}} - 11^{\underline{05}}$ **Dj. Milićević**, ***Exponential sums in the depth aspect***

$11^{\underline{10}} - 11^{\underline{30}}$ Coffee - break

$11^{\underline{30}} - 12^{\underline{00}}$ **A. Galateau**, ***An explicit bound for the torsion on subvarieties of abelian varieties***

$12^{\underline{05}} - 12^{\underline{35}}$ **A. Laurinčikas**, ***Zeros-distribution of the Riemann zeta-function and universality***

$12^{\underline{40}} - 13^{\underline{10}}$ **R. Macaitienė**, ***Universality for L-functions from the Selberg class***

$13^{\underline{15}} - 14^{\underline{40}}$ Lunch time

$14^{\underline{40}} - 15^{\underline{10}}$ **S.I. Bezrodnykh**, ***On the analytic continuation of Lauricella function***

$15^{\underline{15}}-15^{\underline{45}}$ **A.N. Parshin**, ***Adelic approach to zeta-functions of varieties over finite fields***

$15^{\underline{50}}-16^{\underline{10}}$ Coffee - break

$16^{\underline{10}}-17^{\underline{25}}$ Problem session

$18^{\underline{00}}$ Conference dinner

Friday, May, 26

(Steklov Mathematical Institute, 9 floor, conference-hall)

$10^{\underline{00}}-10^{\underline{30}}$ **K. Gong**, ***Encounter with character sums***

$10^{\underline{35}}-11^{\underline{05}}$ **K. Ford**, ***Consecutive composite values in polynomial sequences***

$11^{\underline{10}}-11^{\underline{30}}$ Coffee - break

$11^{\underline{35}}-12^{\underline{05}}$ **V.E. Nazaikinskii**, ***On the asymptotics of the counting function And a typical shape of elements of an arithmetic semigroup***

$12^{\underline{10}}-12^{\underline{40}}$ **R.M. Nunes**, ***The least squarefree number in arithmetic progressions***

$12^{\underline{45}}-13^{\underline{15}}$ **S.V. Konyagin**, ***On the irreducible solutions of the equation with inverses***

$13^{\underline{20}}-14^{\underline{40}}$ Lunch time

$14^{\underline{40}}-15^{\underline{10}}$ **N.P. Dolbilin**, ***On the regular systems***

$15^{\underline{15}}-15^{\underline{45}}$ **E.V. Vesalainen**, ***Counterexamples to the l-modular secrecy function conjecture***

$15^{\underline{50}} - 16^{\underline{10}}$ Coffee - break

$16^{\underline{10}} - 16^{\underline{40}}$ **D.A. Popov**, ***On the function $P(x)$***

$16^{\underline{45}} - 17^{\underline{15}}$ **F.M. Malyshev**, ***The generation of an alternating group by modular additions***

Saturday, May, 27

(Lomonosov State University, Main building, 16 floor, Lecture hall 16-10)

$10^{\underline{00}} - 10^{\underline{30}}$ **N.M. Dobrovol'skii**, ***On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities***

$10^{\underline{35}} - 11^{\underline{05}}$ **V.G. Chirskii**, ***Finite sufficiently non-periodic sequences***

$11^{\underline{10}} - 11^{\underline{30}}$ Coffee - break

$11^{\underline{30}} - 12^{\underline{00}}$ **G.V. Fedorov**, ***On the periodicity of continued fractions in elliptic fields***

$12^{\underline{05}} - 12^{\underline{35}}$ **A.M. Raigorodskii**, ***On the chromatic numbers of random graphs***

$12^{\underline{40}} - 13^{\underline{10}}$ **I.S. Rezvyakova**, ***Zeros of the Epstein zeta-function***

$13^{\underline{15}}$ **Closing of the Conference**

Краткие аннотации докладов

С.И. Безродных (sbezrodnykh@mail.ru)
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия

Об аналитическом продолжении функции Лауричеллы

Одним из обобщений гипергеометрической функции Гаусса $F(a,b;c;z)$ на случай многих комплексных переменных $(z_1,\ldots,z_N) =: \mathbf{z}$ является функция Лауричеллы $F_D^{(N)}(\mathbf{a};b,c;\mathbf{z})$, определяемая с помощью N–кратного ряда (см. [1], [2]):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a};b,c;\mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}(a_1)_{k_1}\cdots(a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}|}k_1!\cdots k_N!} z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N},$$

где b и $c \notin \mathbb{Z}^-$ – скалярные (комплексные) параметры, $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_N)$ – векторный параметр, $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_N)$ – целочисленный векторный индекс суммирования с неотрицательными компонентами. Приведенный ряд для функции Лауричеллы сходится в единичном поликруге $\mathbb{U}^N$.

В работе построена система формул аналитического продолжения функции $F_D^{(N)}$ в N–мерное комплексное пространство при произвольном числе переменных (см. [3]).

[1] G. Lauricella, *Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili.* Rendiconti Circ. math. Palermo. **7** (1893). P. 111 – 158.

[2] H. Exton, *Multiple hypergeometric functions and application.* N.-Y., J. Willey & Sons inc., 1976.

[3] С.И. Безродных, *Формулы аналитического продолжения и соотношения типа Якоби для функции Лауричеллы.* Доклады РАН. **467**:1 (2016) С. 7 – 12.

В.А. Быковский (vab@iam.khv.ru)
Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск, Россия

О распределении целых точек на гиперболоиде

Пусть d – целое число,

$$K_{\mathbb{Z}}(d) \;=\; \big\{(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3\ \ b^2-4ac \;=\; d\big\}$$

– множество целых точек на гиперболоиде

$$\big\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\;:\;x_2^2-4x_1x_2 \;=\; d\big\},$$

двуполостном при $d<0$ и однополостном при $d>0$, и пусть

$$K_{\mathbb{Z}}^{+}(d) \;=\; \big\{(a,b,c)\in K_{\mathbb{Z}}(d)\ \ c>0\big\}.$$

Множество $K_{\mathbb{Z}}(d)$ непусто тогда, и только тогда, когда $d\equiv 0,1(\operatorname{mod}4)$. Такие целые числа $d\neq 0$ называются дискриминантами, поскольку элементы $K_{\mathbb{Z}}(d)$ параметризуют бинарные квадратичные формы $Q(u,v) = au^2+buv+cv^2$ дискриминанта d с целыми коэффициентами.

Пусть, далее,

$$\delta_q(m) \;=\; \begin{cases}1, & \text{если }\ m\equiv 0(\operatorname{mod}q),\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Абсолютно сходящийся в области $\operatorname{Re}s>1$ ряд Дирихле

$$\sum_{c=1}^{+\infty}\bigg(\sum_{b(\operatorname{mod}2c)}\delta_{4c}(b^2-d)\bigg)\frac{1}{c^s} \;=\; \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\,G_d(s)\quad (d\neq n^2)$$

определяет целую функцию $G_d(s)$. Имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $d \neq n^2$, $d \equiv 0, 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, *и пусть* $\varphi(x, y)$ *– бесконечно дифференцируемая комплекснозначная функция на* $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ *с компактным носителем. Тогда для любого фиксированного* $\varepsilon > 0$ *справедливо равенство*

$$\sum_{(a,b,c)\in K_{\mathbb{Z}}^{+}(d)} \varphi\left(\frac{b}{2c}, \frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right) =$$

$$= \frac{3}{\pi^2}\sqrt{|d|}G_d(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\varphi(x, y)\,\frac{dx\,dy}{y^2} + O_{\varphi,\varepsilon}\big(|d|^{1/2-1/12+\varepsilon}\big).$$

А.Н. Васильев (antonvassilyev@mail.ru)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Казахстанский филиал), Астана, Казахстан

О последовательностях, не являющихся последовательностями Романова

В докладе пойдет речь о возрастающих последовательностях натуральных чисел, имеющих логарифмическую функцию распределения, но не являющихся последовательностями Романова (т.е. для них не выполнен аналог теоремы Романова). Будут указаны некоторые достаточные условия и приведены примеры.

Э.В. Весалаинен (esavesalainen@gmail.com)
Академия Або, Турку, Финляндия

Контрпримеры к гипотезе об ℓ-модулярной функции секретности

Гипотеза Бельфиоре и Соле о “функции секретности” для унимодулярных решёток, возникающая в связи с беспроводной связью, использующей кодирование с помощью ко-решётки на гауссовых каналах прослушивания, утверждает, что для n-мерной унимодулярной решётки Γ величина $\vartheta_\Gamma/\vartheta_{\mathbb{Z}^n}$ имеет на положительной мнимой полуоси единственный глобальный минимум в точке симметрии i. Аналогично, при целом $\ell \geqslant 2$ естественным обобщением этой гипотезы будет утверждение о том, что для ℓ-модулярной решётки величина $\vartheta_\Gamma/\vartheta_{(\ell^{1/4}\mathbb{Z})^n}$ на положительной части мнимой оси имеет единственный глобальный минимум в точке симметрии $i/\sqrt{\ell}$. Однако, Эрнвал-Хитонен и Сетураман показали, что это не так, поскольку функция, отвечающая 4-модулярной решётке $\mathbb{Z}\oplus\sqrt{2}\,\mathbb{Z}\oplus 2\,\mathbb{Z}$ ведёт себя противоположным предсказанному гипотезой образом: для неё существует единственный глобальный максимум в точке $y = 1/2$.

Настоящий доклад также будет посвящён гипотезе о функции секретности. В частности, будет описано бесконечное семейство ℓ-модулярных контрпримеров, отвечающих $\ell \geqslant 2$, построенных с помощью прямых произведений расширений $\mathbb{Z}$. Показано, что в каждом из этих случаев наблюдается явление, противоположное тому, что утверждает гипотеза. Одна из ключевых идей доказательства состоит в использовании свойства выпуклости классических ϑ-функций. Представленные утверждения являются результатами совместной работы с А.-М. Эрнвал-Хитонен.

О. Галато (aurelien.galateau@univ-fcomte.fr)
Лаборатория Математики, Университет Фраш-Комте, Безансон, Франция

Точная оценка кручения на подмногообразиях абелевых многообразий

Нами получена явная оценка для степени кручения подмножества, связанного с подмногообразием в абелевом многообразии. Доказательство сочетает элементы диофантовой геометрии и теорему Серра о гомотетиях представлений Галуа, построенных по подгруппе кручения абелева многообразия. Доклад представляет результаты совместной работы с К. Мартинесом.

К. Гонг (kg@henu.edu.cn)
Университет Хенань, Кайфэн, Китайская Народная Республика

Новые встречи с суммами характеров

Характеры Дирихле – очень важный, но крайне трудный объект исследования в аналитической теории чисел. За почти столетие, которое отделяет нас от классических результатов И.М. Виноградова и Д. Пойя (1918), в этой области произошло лишь немного значительных прорывов, подобных оценкам Д.А. Бёрджесса конца 1950-х гг. В конце 1960 г. А.А. Карацуба создал новый метод исследования сумм характеров, с помощью которого удалось получить большое число арифметических следствий. Благодаря использованию новых идей и методов, последние десятилетия стали свидетелями некоторых многообещающих перемен.

В настоящем докладе мы коснёмся некоторых старых и новых результатов, связанных с суммами характеров, напомним некоторые открытые проблемы, относящиеся к характерам Дирихле. Наконец, будет представлен недавний результат автора из совместной работы с Ч. Жиа и М.А. Королёвым.

С.А. Гриценко (s.gritsenko@gmail.com)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

О дробных моментах некоторых успокоенных арифметических рядов Дирихле

В 2002 г. А.А. Карацуба показал, что знание правильных порядков дробных моментов рядов Дирихле позволяет получить в задаче о числе нулей дзета-функции Римана на критической прямой результат, более точный, чем оценка Г. Харди-Дж. Литтлвуда (1921).

В 2017 г. автор получил правильные по порядку верхние и нижние оценки для некоторых успокоенных L-функций Дирихле и применил их к задаче о числе нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна на критической прямой. Под моментами успокоенных L-функций Дирихле здесь и далее понимаются интегралы

$$\int_T^{2T} \left| L\left(\tfrac{1}{2}+it,\chi\right)\phi\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt,$$

где функция $\phi\left(\frac{1}{2}+it\right)$ выбирается так, чтобы она не имела нулей нечетного порядка, а функция $L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)$ была по возможности близка к константе. Идея введения успокаивающей функции $\phi\left(\frac{1}{2}+it\right)$ принадлежит А. Сельбергу.

Число $2k$ называется порядком момента. Ранее автор рассматривал только моменты порядков $\frac{1}{2}$ и 1. В настоящем докладе будут представлены оценки моментов порядков $\frac{2}{v}$, где v – произвольное натуральное число, большее 2.

Сформулируем наш основной результат. Пусть ε – произвольно малое положительное число, $X = T^{\varepsilon}$. Пусть

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1 (\mathrm{mod}\, 5)} \left(1 - \frac{1}{2vp^s}\right) \prod_{p\equiv\pm2 (\mathrm{mod}\, 5)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{p^s}\right),$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\chi_1(\nu)\left(1 - \dfrac{\log \nu}{\log X}\right), & \text{при } \nu < X, \\ 0, & \text{при } \nu \geqslant X, \end{cases}$$

где $\chi_1(\nu)$ – характер по модулю 5 такой, что $\chi_1(2) = i$,

$$\varphi\left(\tfrac{1}{2} + it\right) = \sum_{\nu < X} \frac{\beta(\nu)}{\nu^{1/2+it}}, \quad \phi\left(\tfrac{1}{2} + it\right) = \left(\varphi\left(\tfrac{1}{2} + it\right)\right)^{2v}.$$

Теорема. *Справедливы следующие оценки:*

$$T(\log T)^{(1+2\varepsilon v)^2/(2v^2)} \ll \int_T^{2T} \left|L\left(\tfrac{1}{2} + it, \overline{\chi}_1\right)\phi\left(\tfrac{1}{2} + it\right)\right|^{2/v} dt \ll \\ \ll T(\log T)^{(1+2\varepsilon v)^2/(2v^2)},$$

$$\int_T^{2T} \left|L\left(\tfrac{1}{2} + it, \chi_1\right)\phi\left(\tfrac{1}{2} + it\right)\right|^{2/v} dt \ll T(\log T)^{(1-2\varepsilon v)^2/(2v^2)},$$

$$\int_T^{2T} \left|L\left(\tfrac{1}{2} + it, \overline{\chi}_1\right)\phi\left(\tfrac{1}{2} + it\right)\right| dt \ll T(\log T)^{(1+2\varepsilon v)^2/8},$$

$$\int_T^{2T} \left|L\left(\tfrac{1}{2} + it, \chi_1\right)\phi\left(\tfrac{1}{2} + it\right)\right| dt \ll T(\log T)^{(1-2\varepsilon v)^2/8}.$$

Пусть $N_0(T)$ — число нулей функции Дэвенпорта–Хейльбронна на отрезке $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + iT\right]$. Из приведенной выше теоремы следует, что

$$N_0(2T) - N_0(T) \gg T(\log T)^{1/2+1/12-\varepsilon}.$$

Н.М. Добровольский
(по совместной работе с Н.Н. Добровольским)
(e-mail dobrovol@tspu.tula.ru)
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого,
Тульский государственный университет, Тула, Россия

Об алгоритме Лагранжа для приведённых алгебраических иррациональностей

В 2015 году нами была доказана теорема, что для вычисления очередного неполного частного разложения алгебраического числа в цепную дробь достаточно вычисления двух значений минимального многочлена соответствующей остаточной дроби. В данном докладе мы доказываем аналогичный результат, но с заменой минимального многочлена остаточной дроби на минимальный многочлен исходного алгебраического числа.

Введем следующие обозначения

$$\delta(\alpha) = \min_{2\leqslant j\leqslant n}\left|\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right| > 0,$$

так как все корни различные.

Теорема. *Пусть* $\alpha = \alpha_0$ *— вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена*

$$f_0(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ – *его корни, и число* α *имеет разло-*

жение в цепную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Пусть номер $m_0 = m_0(\alpha, \varepsilon)$ *определен из неравенства*

$$\frac{2(n-1)}{Q_{m_0-1}\delta(\alpha)} < \varepsilon,$$

тогда для любого $m > m_0$ *справедливы равенства*

$$q_m =$$

$$= \begin{cases} q_m^*, & \text{если } (-1)^m f_0\left(\frac{q_m^* P_{m-1}+P_{m-2}}{q_m^* Q_{m-1}+Q_{m-2}}\right) > 0 \text{ и} \\ & (-1)^m f_0\left(\frac{(q_m^*+1) P_{m-1}+P_{m-2}}{(q_m^*+1) Q_{m-1}+Q_{m-2}}\right) < 0 \\ & \\ q_m^*+1, & \text{если } (-1)^m f_0\left(\frac{(q_m^*+1) P_{m-1}+P_{m-2}}{(q_m^*+1) Q_{m-1}+Q_{m-2}}\right) > 0 \\ & \\ q_m^*-1, & \text{если } (-1)^m f_0\left(\frac{q_m^* P_{m-1}+P_{m-2}}{q_m^* Q_{m-1}+Q_{m-2}}\right) < 0 \end{cases}$$

где

$$q_m^* = \left[\frac{f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{Q_{m-1}^2\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|} - \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}\right].$$

Н.П. Долбилин (dolbilin@mi.ras.ru)
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

О регулярных системах

Множество $X \subset \mathbb{R}^d$ называется *множеством Делоне*, если для некоторых положительных r и R выполняются два условия:

(1) шар $B_y(r)$ радиуса r с центром в произвольной точке $y \in \mathbb{R}^d$ содержит *не больше одной* точки $x \in X$;

(2) шар $B_y(R)$ радиуса R с центром в произвольной точке y содержит *хотя бы одну* точку $x \in X$.

Множества Делоне представляют вполне адекватную модель атомной структуры произвольного твердого тела. Однако столь хорошо организованные структуры как кристаллы описываются в терминах множества Делоне особого вида, а именно, в терминах множеств Делоне X с транзитивными группами симметрий, то есть с такими группами, в которых для любых точек x и x' из X существует симметрия g множества X такая, что $g(x) = x'$. Множество Делоне с транзитивной группой называется *правильной системой.*

Локальная теория правильных систем, в частности, была нацелена [1] на то, чтобы вывести существование транзитивной группы для множества Делоне X из попарной конгруэнтности окрестностей некоторого радиуса у точек из X. Основная проблема здесь – оценить радиус тех окрестностей, конгруэнтность которых обеспечивает правильность данного множества. Локальная теория непосредственно связана с попыткой объяснить, почему при фазовом переходе из жидкого состояния в твердое атомная структура вещества из аморфного состояния трансформируется в хорошо организованную, периодическую структуру с богатой группой симметрий [2].

Предполагается обсудить несколько основных результатов локальной теории правильных систем [3]-[5].

[1] Б.Н. Делоне, Н.П. Долбилин, М.И. Штогрин, Р.В. Галиулин, *Локальный критерий правильности систем точек.* Докл. АН СССР. **227**:1 (1976). С. 19 – 21.

[2] N.P. Dolbilin, J.C. Lagarias, M. Senechal, *Multiregular point systems.* Discrete Comput. Geom. **20**:4 (1998). P. 477 – 498.

[3] Н.П. Долбилин, *Критерий кристалла и локально антиподальные множества Делоне.* Труды Международной конференции “Квантовая топология”. Вестник ЧелГУ. **17** (2015). С. 6 — 17.

[4] Н.П. Долбилин, А.Н. Магазинов, *Теорема единственности для локально антиподальных множеств Делоне.* Современные проблемы математики, механики и математической физики. II. Сборник статей. Тр. МИАН. Т. 294. М. МАИК. 2016. С. 230 – 236.

[5] N. Dolbilin, *Delone Sets: Local Identity and Global Order.* Volume dedicated to the 60th anniversary of Professors Karoly Bezdek and Egon Schulte, Springer Contributed Volume on Discrete Geometry and Symmetry. Springer, 2016 (to appear). `arXiv: 1608.06842`

В.Г. Журавлёв (`vzhuravlev@mail.ru`)
Владимирский государственный университет, Владимир, Россия

Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби

Рассматривается симплекс-модульный алгоритм ($\mathcal{SM}$-алгоритм) разложения вещественных алгебраических чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в многомерные периодические цепные дроби.

Основу предлагаемого алгоритма составляют: 1) минимальные рациональные симплексы $\mathbf{s}$, содержащие точку α; и 2) целочисленные унимодулярные матрицы Пизо P_α, для которых $\widehat{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d, 1)$ – собственный вектор. $\mathcal{SM}$-алгоритм относится к категории гибких алгоритмов. Чтобы получить разложение в цепную дробь, требуется предварительная настройка этого алгоритма на точку α.

Данный алгоритм позволяет получать наилучшие приближения порядка $1/Q_a^{1+\varepsilon}$, где Q_a $(a = 0, 1, 2, \ldots)$ – знаменатели подходящих дробей и показатель $\varepsilon > 0$ зависит от настройки $\mathcal{SM}$-алгоритма.

А. Ивич (aleksandar.ivic@rgf.bg.ac.rs)
Сербская Академия наук и искусств, Белград, Сербия

Кратности нулей $\zeta(s)$ и её значения на коротких промежутках

Пусть $r = m(\rho)$ – кратность комплексного нуля $\rho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана $\zeta(s)$. В настоящем докладе, продолжающем исследования, начатые в [1], представлен ряд новых результатов, связанных с величинами $m(\rho)$.

Известно, что такая задача сводится к оценке интегралов, содержащих дзета-функцию, по “очень коротким” промежуткам. Последнее, в свою очередь, связано с “гипотезами Карацубы” относительно функции

$$F(T, \Delta) := \max_{t\in [T, T+\Delta]} \left|\zeta(\tfrac{1}{2} + it)\right|, \qquad 0 < \Delta = \Delta(T) \leqslant 1.$$

С помощью комплексного интегрирования мы получаем новую явную оценку для величины $m(\beta + i\gamma)$, которая представляет наибольший интерес при β, близких к единице. Как следствие, из неё получается неравенство

$$m(\beta + i\gamma) \leqslant 4 \log\log\gamma + 20(1-\beta)^{3/2}\log\gamma,$$

которое справедливо при $\frac{5}{6} \leqslant \beta < 1$ и $\gamma \geqslant \gamma_1$.

[1] A. Ivić, *On the multiplicity of zeros of the zeta-function.* Bulletin CXVIII de l’Académie Serbe des Sciences et des Arts –

1999, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Sciences mathématiques. №. 24. P. 119 – 131.

[2] А.А. Карацуба *О нижних оценках дзета-функции Римана.* Докл. РАН. **376**:1 (2001). С. 15 – 16.

А.Б. Калмынин (alkalb1995cd@mail.ru)
Национальный Исследовательский Университет "Высшая Школа Экономики", Москва, Россия

Омега-теоремы для дзета-функции Римана и её производных вблизи прямой $\Re s = 1$

Теорема Зайцева [1] утверждает, что

$$\limsup_{s\in\Sigma(T),\, T\to+\infty} \frac{|\zeta(s)|}{\ln T} \geqslant 1,$$

где $\Sigma(T)$ – область вида

$$1-(4+\varepsilon)\frac{\ln\ln\ln t}{\ln\ln t} \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad t_0 < |t| \leqslant T.$$

В докладе будет представлено обобщение метода Зайцева, позволяющее получить семейство омега-теорем для дзета-функции и её производных в различных областях критической полосы. В частности, удалось доказать, что в той же области $\Sigma(T)$ для всех n выполнено неравенство

$$\limsup_{s\in\Sigma(T),\, T\to+\infty} \frac{|\zeta^{(n)}(s)|}{e^{(\ln\ln T)^{1+\varepsilon/2-\delta}}} \geqslant 1,$$

где δ – произвольное положительное вещественное число.

[1] С.П. Зайцев, *Омега-теорема для дзета-функции Римана вблизи прямой* $\mathrm{Re}\, s = 1$. Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. **3** (2000). С. 54 – 57.

С.В. Конягин (konyagin@mi.ras.ru)
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

О неприводимых решениях уравнения с обратными величинами

Рассмотрим симметричное диофантово уравнение

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_r} = \frac{1}{x_{r+1}} + \ldots + \frac{1}{x_{2r}}, \tag{1}$$

в котором $r \geqslant 3$, а переменные $x_1, \ldots, x_{2r}$ принимают значения целых чисел из промежутка $[1, N]$. Уравнения такого вида возникают в задачах теории чисел, связанных с оценками неполных сумм Клоостермана.

Решение уравнения (1) называется неприводимым, если ни одна из компонент $x_1, \ldots, x_r$ не содержится среди компонент $x_{r+1}, \ldots, x_{2r}$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть $N, r \geqslant 3$. Тогда для количества $J_r(N)$ неприводимых решений уравнения (1) в положительных целых числах $1 \leqslant x_1, \ldots, x_{2r} \leqslant N$ справедлива оценка:*

$$J_r(N) < e^{(3r)^3 - 90} N^{r - \frac{r}{2(2r-1)}} \left(\frac{\ln N}{r} + 9 \right)^{10r^2} \exp\left(\frac{26 r^{3/2} \sqrt{\ln N}}{\ln(r \ln N)} \right).$$

С помощью оценки теоремы 1 можно получить и асимптотическую формулу для количества $I_r(N)$ решений уравнения (1) в целых числах $1 \leqslant x_1, \ldots, x_{2r} \leqslant N$. Так, справедлива

Теорема 2. *Пусть $N, r \geqslant 3$, Тогда для величины $I_r(N)$ справедливо равенство*

$$I_r(N) = r! N^r \big(1 + \delta_r(N)\big),$$

где

$$|\delta_r(N)| \leqslant e^{(3r)^3-90} N^{-\frac{r}{2(2r-1)}} \left(\frac{\ln N}{r}+9\right)^{10r^2} \exp\left(\frac{26r^{3/2}\sqrt{\ln N}}{\ln(r\ln N)}\right).$$

В докладе предполагается рассказать об основных идеях, которые позволили доказать приведенные выше теоремы, а также некоторые другие утверждения, связанные с количеством решений уравнения (1).

М.А. Королёв (korolevma@mi.ras.ru)
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Обратные вычеты и последовательности Пятецкого-Шапиро

Пусть $c > 1$ – фиксированное нецелое число. Последовательность $\mathcal{P}_c$, состоящая из целых чисел вида $m = \left[n^c\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, называется последовательностью Пятецкого-Шапиро. Имеется значительное число работ, в которых исследуются различные теоретико-числовые задачи с числами из последовательностей $\mathcal{P}_c$.

В настоящем докладе мы расскажем о распределении вычетов по заданному модулю q, обратных к элементам последовательности Пятецкого-Шапиро, т.е. о том, как распределены решения сравнения

$$mm^* \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$$

с условием $m \in \mathcal{P}_c$, $1 \leqslant m \leqslant X$, где $X = X(c, q) \to +\infty$ при $q \to +\infty$.

Ю.-К. Лау (yklau@maths.hku.hk)
Гонконгский Университет, Гонконг

Коэффициенты Фурье модулярных форм полуцелого веса

В докладе будет дан обзор недавних результатов, полученных разными исследователями, которые связаны с переменами знака в последовательности коэффициентов Фурье модулярных форм в случае, когда эти коэффициенты Фурье вещественны. Помимо этого, мы расскажем о наших собственных результатах о модулярных формах полуцелого веса, полученных в ходе сотрудничества двух коллективов, в которые вошли, соответственно, Ю.-Ж. Жанг, Г.-С. Лю, Э. Ройер, и Ж. Ву и коллега докладчика Б. Кейн. Первый из проектов связан с переменами знака в последовательности коэффициентов Фурье с бесквадратными номерами. Второй – с остановкой алгоритма, строящего суперсингулярные эллиптические кривые и использующего в качестве входных данных максимальный порядок кватернионной алгебры.

А. Лауринчикас (antanas.laurincikas@mif.vu.lt)
Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва

Распределение нулей дзета-функции Римана и явление универсальности

В 1975 г. С.М. Воронин открыл свойство универсальности дзета-функции Римана $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, состоящее в том, что широкий класс аналитических функций может быть приближен “сдвигами” вида $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Мы рассмотрим свойство универсальности $\zeta(s)$ в случае, когда параметр τ принимает значения из множества

$\{\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}$, где $0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots$ – мнимые части нетривиальных нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$.

Предположим, что неравенство

$$\sum_{\substack{\gamma_l, \gamma_k \leqslant T \\ |\gamma_l - \gamma_k| < \frac{c}{\log T}}} 1 \ll T \log T, \quad T \to \infty,$$

имеет место для некоторой постоянной $c > 0$. Эта оценка представляет собой ослабленную версию гипотезы Монтгомери о парной корреляции [1].

Пусть $D = \left\{ s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1 \right\}$, и пусть $\mathcal{K}$ – класс компактных подмножеств D, обладающих связным дополнением. Пусть, далее, $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, обозначает класс непрерывных функций, не обращающихся в нуль на K и аналитических на внутренности K. Тогда имеет место

Теорема. *Предположим, что ослабленная гипотеза Монтгомери верна. Пусть $K \in \mathcal{K}$ и пусть $f(s) \in H_0(K)$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $h > 0$ справедливо неравенство*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\gamma_k h) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

В докладе также будут затронуты вопросы, связанные с приближением аналитических функций вида $F(\zeta(s+i\gamma_k h))$, где F принадлежит некоторому классу операторов.

[1] H.L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function.* In: Analytic Number Theory, (St. Louis Univ., 1972), H.G. Diamond (ed.), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, Amer. Math. Soc. Providence, 1973. P. 181 – 193.

Х. Майер (helmut.maier@uni-ulm.de)
Ульмский университет, Ульм, Германия

Тернарная проблема Гольдбаха и простым и двумя изолированными простыми (по совместной работе с М.Т. Рассиасом).

Понятие изолированного простого числа тесно связано с задачей о больших расстояниях между соседними простыми числами. К решению этой задачи многократно применялся метод Эрдеша-Ранкина и его модификации. Совсем недавно значительные продвижения в ней были получены Фордом, Грином, Конягиным, Майнардом и Тао. Авторы настоящей работы совместили метод пяти перечисленных авторов с круговым методом, впервые применённым к тернарной проблеме Гольдбаха И.М. Виноградовым. Его результат впоследствии был обобщён на случаи, когда простые числа принадлежат некоторым специальным множествам, скажем, арифметическим прогрессиям. Авторам удалось, рассматривая простые числа из специально построенных классов вычетов, модифицировать метод Эрдеша-Ранкина и доказать следующее утверждение.

Теорема. *В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана всякое достаточно большое нечётное число может быть представлено в виде суммы простого и двух изолированных простых чисел.*

Ф.М. Малышев (`malyshevfm@mi.ras.ru`)
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия,

Порождение знакопеременной группы модульными сложениями

Рассматривается множество $V = \mathbb{Z}_q^n$, $n \geqslant 2$, представленное декартовой степенью кольца вычетов $\mathbb{Z}_q =$

$\{0, 1, \ldots, q-1\}$, целое $q \geqslant 2$. На множестве V вводятся специальные подстановки $\pi = \pi_{(i_1,\ldots,i_r)} \in S_V$. Каждая такая подстановка задаётся подмножеством $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и введённой на этом подмножестве линейной упорядоченностью: i_1 будет старшим номером, i_r – младшим. Мощность r подмножества, $1 \leqslant r \leqslant n$, своя для каждой такой подстановки π и может быть любой из указанного диапазона. Упорядоченность тоже может быть любой из $r!$ возможных. Если $\pi_{(i_1,\ldots,i_r)}(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, то $y_i = x_i$ для $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$, а

$$\sum_{t=1}^{r} y_{i_t} q^{r-t} = 1 + \sum_{t=1}^{r} x_{i_t} q^{r-t} (\mathrm{mod}\ q^r).$$

Множеству $\mathcal{S} = \{\pi_1, \ldots, \pi_s\}$ таких подстановок ставим в соответствие группу $G = G_{\mathcal{S}} = \langle \pi_1, \ldots, \pi_s \rangle$, ими порождаемую, и ориентированный граф $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{S}}$ на множестве вершин $\{1, \ldots, n\}$. Если подстановки π_j определяются соответственно наборами номеров $\left(i_1^{(j)}, \ldots, i_{r_j}^{(j)}\right)$, $j = 1, \ldots, s$, то дугами графа Γ являются: $i_t^{(j)} \leftarrow i_{t+1}^{(j)}$, $t = 1, \ldots, r_j - 1$, $j = 1, \ldots, s$. Дуги направлены от младших номеров к старшим.

Теорема. *Если граф $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{S}}$ сильно связен, $\mathcal{S} = \{\pi_1, \ldots, \pi_s\}$, $q \geqslant 2$, то группа $G = G_{\mathcal{S}} = \langle \pi_1, \ldots, \pi_s \rangle$ содержит знакопеременную группу A_V на множестве V, за единственным исключением при $q = 2$, $n \geqslant 3$, $r_j \leqslant 2$ для всех $j = 1, \ldots, s$, когда $G_{\mathcal{S}} = AGL(n, 2)$ – полная аффинная группа, действующая на пространстве $GF(2)^n$.*

Группа $G_{\mathcal{S}}$ совпадает со всей симметрической группой на V, когда $r_j = n$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, s\}$, а q чётно. Обратное к теореме утверждение очевидно, при нарушении сильной связности графа $\Gamma_{\mathcal{S}}$ группа $G_{\mathcal{S}}$ будет импримитивной.

Основная комбинаторная часть доказательства теоремы отводится установлению дважды транзитивности группы $G_{\mathcal{S}}$. Завершение доказательства оказалось возможным благодаря классификации конечных простых групп и доказанной в 2003 г. П. Михайлеску единственности решения уравнения $x^z - y^t = 1$ в целых числах больших единицы: $3^2 - 2 = 1$, известной с 1884 года как гипотеза Каталана.

Приложение. Цветной монитор на $2^{10} \times 2^{10}$ клеток (пикселей) – сегодняшняя реальность. У клетки 2^8 оттенков. Всего на монитор отводится 2^{28} "кубиков". Здесь $V = GF(2)^{2^8}$, $q = 2$, $n = 2^{28}$. Практика работы с изображениями предполагает потенциальную возможность получения любой чётной подстановки из $\bigl(2^{2^{28}}\bigr)!/2$ возможных, причём желательно с помощью простых машинных операций.

Ю. В. Матиясевич (yumat@pdmi.ras.ru)
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

Приближение дзета-функции Римана с помощью конечных эйлеровых произведений

Рассмотрим *конечное эйлерово произведение*

$$\zeta_m(s) = \prod_{k=1}^{m} (1 - p_k^{-s})^{-1},$$

где $p_1, \ldots, p_m$ – начальные простые числа, и *конечную кси-функцию* $\xi_m(s) = g(s)\zeta_m(s)$, где

$$g(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}(s-1)\Gamma\bigl(s/2+1\bigr)$$

– сомножитель из функционального уравнения. *Модифицированная симметризованная конечная кси-функция*

$$\xi_m^{:=}(s)=s^m(1-s)^m\big(\xi_m(s)+\xi_m(1-s)\big)$$

тривиальным образом удовлетворяет функциональному уравнению $\xi_m^{:=}(s) = \xi_m^{:=}(1-s)$. Все полюса $q_1, q_2, \dots$ этой функции являются простыми; пусть $r_1, r_2, \dots$ – это соответствующие им вычеты, так что разность

$$\xi_m^{:\mathrm{reg}=}(s) = \xi_m^{:=}(s) - \sum_{k=1}^{\infty} r_k/(s-q_k)$$

является регулярной частью функции $\xi_m^{:=}(s)$. *Регуляризированное конечное эйлерово произведение*

$$\zeta_m^{\approx}(s) = \xi_m^{:\mathrm{reg}=}(s)/\big(s^m(1-s)^m g(s)\big)$$

даёт удивительно хорошие приближения к значениям и нулям дзета-функции.

Пример 1. Наименьший по абсолютной величине невещественный нуль функции $\zeta_1^{\approx}(s)$ (определённой посредством всего одного эйлерова сомножителя $(1-2^{-s})^{-1}$) отличается от наименьшего нетривиального нуля дзета-функции менее чем на 10^{-6}.

Пример 2. Первые три эйлеровых сомножителя позволяют вычислить более 30 верных десятичных знаков $\zeta(1/2+100i)$.

Другие примеры см. на:
`http://logic.pdmi.ras.ru/ yumat/personaljournal/eulereverywhere`.

Р. Мацайтене (renata.macaitiene@su.lt)
Шауляйский Университет, Шауляйский Государственный колледж, Шауляй, Литва

Универсальность L-функций из класса Сельберга

Универсальность дзета- и L-функций – одно из наиболее удивительных явлений в аналитической теории чисел. Оно состоит, грубо говоря, в том, что всякая аналитическая функция может быть приближена с любой заданной точностью “сдвигами” дзета- и L-функций, причём равномерно по компактным подмножествам определённой области.

В докладе мы будем рассматривать, главным образом, универсальность L-функций из класса Сельберга [1], который является в настоящее время одним из наиболее активно изучаемых объектов аналитической теории чисел. Нами будет представлено два типа результатов – *непрерывная* и *дискретная* универсальность, отвечающие, соответственно, случаям, когда параметры сдвига принимают произвольные вещественные значения и значения из некоторого дискретного множества (скажем, из арифметической прогрессии). Именно, мы обсудим результаты, полученные в работах [2], [3] и [4].

[1] A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series.* In: Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), E. Bombieri et al. (Eds.). Univ. Salerno. Salerno, 1992. P. 367 – 385.

[2] H. Nagoshi, J. Steuding, *Universality for L-functions in the Selberg class.* Lith. Math. J. **50**:3 (2010). P. 393 – 411.

Дж. Миличевич (dmilicevic@brynmawr.edu)
Колледж Брин Мар, г. Брин Мар, США

Тригонометрические суммы: p-адический аспект

Многие принципиальные проблемы, связанные с аналитикой L-функций, такие как нахождение “сверхвыпуклых” оценок (т.е. оценок их модулей, более точных, чем те, что напрямую следуют из функционального уравнения и применения стандартных средств комплексного анализа), вычисление моментов, необращение в нуль этих функций в критических точках (вещественных точках критической прямой), сводятся к оценкам соответствующих тригонометрических сумм. В настоящем докладе мы расскажем о новых оценках коротких тригонометрических сумм с фазой, содержащей p-адический сдвиг. В качестве приложений будут получены “сверхвыпуклые” оценки для L-рядов Дирихле и скрученных модулярных L-функций с характерами по модулю, равному высокой степени простого числа, которые являются такими же по силе, как и соответствующие оценки “по t”.

С точки зрения аделей, аналогия между этим так называемым “p-адическим” аспектом и более привычным “t-аспектом” оказывается вполне естественной, если делать акцент на разветвлении в одной (конечной иди же бесконечной) точке. Среди применяемых нами средств – p-адический аналог разбиения Фарея, круговой метод и оценки ван дер Корпута. Некоторые из представленных результатов заимствованы из нашей совместной работы с В. Бломером.

Н.Г. Мощевитин (moshchevitin@gmail.com)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

О функциях меры иррациональности

Для вещественного числа α обычная функция меры иррациональности определяется равенством

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leqslant q \leqslant t,\, q \in \mathbb{Z}} ||q\alpha||, \quad t \geqslant 1$$

(здесь $||\xi|| = \min_{a\in\mathbb{Z}} |\xi - a|$ – расстояние от ξ до ближайшего целого числа). Эта функция тесно связана с наилучшими приближениями к числу α. Многие диофантовы свойства вещественных чисел могут быть описаны в терминах функции меры иррациональности $\psi_\alpha(t)$. В частности, спектры Лагранжа и Дирихле удобно определять в терминах величин

$$\liminf_{t\to\infty} t\psi_\alpha(t) \quad \text{and} \quad \limsup_{t\to\infty} t\psi_\alpha(t).$$

Другие интересные результаты связаны с осцилляторными свойствами разности $\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$.

В докладе будут рассмотрены некоторые свойства функций

$$\psi_\alpha^{[2]}(t) = \min_{\substack{(q,p):\ q,p\in\mathbb{Z},\, 1\leqslant q\leqslant t,\\ (p,q)\neq(p_n,q_n)\,\forall\, n=0,1,2,3,\ldots}} |q\alpha - p|$$

и

$$\psi_\alpha^{[2]*}(t) = \min_{\substack{(q,p):\ q,p\in\mathbb{Z},\, 1\leqslant q\leqslant t,\\ p/q\neq p_n/q_n\,\forall\, n=0,1,2,3,\ldots}} |q\alpha - p|,$$

связанные со “вторыми наилучшими” приближениями, а также некоторые свойства функции $\mu_\alpha(t)$, относящиеся к диагональной непрерывной дроби Минковского числа α.

В.Е. Назайкинский (nazaikinskii@yandex.ru)
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия

Об асимптотике считающей функции и типичной форме элементов арифметической полугруппы

Рассматривается *обобщенная задача о разбиениях* — задача об асимптотике при $x \to +\infty$ числа решений в целых неотрицательных числах n_j, $j = 1, 2, \ldots$, неравенства $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \cdots \leqslant x$, где $\lambda_j \to +\infty$ — заданная последовательность положительных чисел, а также о вероятностях уклонений случайным образом выбранного решения от бозе–эйнштейновского распределения $\overline{n}_j = (e^{\beta(x)\lambda_j} - 1)^{-1}$, где $\beta(x)$ определяется из уравнения $\lambda_1 \overline{n}_1 + \lambda_2 \overline{n}_2 + \cdots = x$. В статистической физике эта задача возникает как задача о распределении невзаимодействующих бозе-частиц по уровням энергии. Разнообразные ее варианты играют важную роль и в других дисциплинах.

В докладе рассказывается о некоторых соответствующих постановках и результатах, полученных в совместных работах автора с В.П. Масловым, Д.С. Миненковым и В.Л. Чернышевым для случая, когда считающая функция $\#\{j\colon \lambda_j \leqslant \lambda\}$ последовательности λ_j имеет при $\lambda \to +\infty$ степенную или экспоненциальную асимптотику. Рассмотрен также вариант задачи, в котором неравенство дополнено равенством $n_1 + n_2 + \cdots = k$, где k стремится к $+\infty$ вместе с x. Проводится сопоставление с хорошо известными классическими результатами.

Ю.В. Нестеренко (nester@mi.ras.ru)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Квазимодулярные функции и трансцендентные числа

Впервые модулярные функции для доказательства результатов о трансцендентности чисел были использованы в 1935 г. в совместной работе К. Малера и Я. Попкена для доказательства трансцендентности по крайней мере одного из значений рядов Эйзенштейна $E_2(\tau), E_4(\tau), E_6(\tau)$ при любом комплексном τ из верхней комплексной полуплоскости. Тогда же Малер сформулировал гипотезу о трансцендентности при любом τ, $\Im\tau > 0$, хотя бы одного из чисел $e^{2\pi i\tau}$ и $j(\tau)$. В 1937 г. Т. Шнейдер доказал трансцендентность значений модулярного инварианта $j(\tau)$ во всех алгебраических точках τ, $\Im\tau > 0$ степени большей 2. Шнейдер в доказательстве этой теоремы использовал свойства эллиптических функций Вейерштрасса, но ему казалось противоестественным доказывать таким способом утверждение о трансцендентности значений модулярной функции и он сформулировал задачу найти модулярное доказательство этой теоремы. Намного позже в 1995 г. французские математики К. Баре, Г. Диас, А. Гремейн и Ж. Филибер в попытках найти решение проблемы Шнейдера доказали гипотезу Малера, а докладчик доказал, что среди значений трёх указанных рядов Эйзенштейна и экспоненциальной функции в одной точке, всегда найдётся не менее трёх алгебраически независимых чисел. Отсюда последовало утверждение об алгебраической независимости чисел π и e^{π}, а также ряд интересных следствий о других числах. В настоящее время модулярное доказательство теоремы Шнейдера всё ещё не найдено. Не найдено также доказательство полной гипотезы Малера-Манина о значениях модулярного инварианта и экспоненциальной функции a^τ при алгебраическом $a \neq 0, 1$.

В докладе будет рассказано об упомянутых здесь и других доказанных результатах, о попытках использования других модулярных и квазимодулярных функций, о дальнейших продвижениях в этой области теории чисел.

Р.М. Нунес (ramon.moreiranunes@epfl.ch)
Федеральная политехническая школа Лозанны, Лозанна, Швейцария

Двенадцатый момент L-функций Дирихле, отвечающих гладким модулям

Хиз-Брауну принадлежит явная оценка двенадцатого момента дзета-функции Римана, одним из красивых следствий которой является классическое неравенство Вейля для модуля дзета-функции на критической прямой. Естественно поставить подобный вопрос для L-функций Дирихле в случае, когда модуль q неограниченно возрастает, т.е. рассмотреть "q-аспект" задачи. Точный аналог результата Хиз-Брауна для модулей общего вида неизвестен. Его наличие позволило бы уточнить знаменитую оценку Бёрджесса для L-функций Дирихле. Более простым представляется ограничить рассмотрение модулями, каноническое разложение которых имеет специальный вид. Есть два различных способа сделать это. Так, можно исследовать модули, которые являются большими степенями фиксированных простых чисел, или же рассматривать бесквадратные модули q, все простые делители которых не превосходят малой степени q. В докладе мы коснёмся второго способа и покажем, как в этом случае можно получить аналог результата Хиз-Брауна.

А.А. Панчишкин
(Alexei.Pantchichkine@ujf-grenoble.fr)
Институт Фурье, Гренобль, Франция

Модулярные и p-адические методы в теории дзета-функций

Для простого числа p и положительного целого числа m, рассматриваются дзета-функции эрмитовых модулярных форм $F = \sum_H A(H)q^H$ на эрмитовой верхней полуплоскости $\mathcal{H}_m$ степени m, где H пробегает положительно определённые полуцелые эрмитовы матрицы степени m, то есть $H \in \Lambda_m(\mathcal{O})$ над кольцом целых $\mathcal{O}$ мнимого квадратичного поля K, $q^H = \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(HZ)))$.

Аналитическое p-адическое продолжение этих дзета-функций строится путём построения их значений в виде интеграла от p-адических мер, как ограниченных, так и растущих. Ранее эта проблема была решена для зигелевых модулярных форм.

Основной результат формулируется в терминах многоугольника Ходжа $P_H(t) : [0, d] \to \mathbb{R}$ и многоугольника Ньютона $P_N(t) = P_{N,p}(t) : [0, d] \to \mathbb{R}$ дзета-функции $L_F(s)$, с $d = 4m$.

Основной результат работы даёт p-адическую аналитическую интерполяцию дзета значений в виде интегралов по мерам типа меры Мазура. Эти p-адические меры строятся по коэффициентам Фурье эрмитовых модулярных форм, и по собственным значениям операторов Гекке для эрмитовой группы. Доказывается целость этих мер при условии равенства значений $P_H(t)$ и $P_N(t)$ в центральной точке $t = d/2$.

Доказывается также, что в случае положительности разности $h = P_N(d/2) - P_H(d/2) > 0$ p-адическая аналитическая интерполяция роста $\log_p^h(\cdot)$ строится из h-допустимых (растущих) мер типа Амис-Велю, в виде интегрального преобразования Меллина по построенным мерам.

А.Н. Паршин (parshin@mi.ras.ru)
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Адельный подход к дзета-функциям многообразий над конечными полями

Пусть X – алгебраическое проективное гладкое многообразие определенное над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов. Тогда можно рассмотреть формальный степенной ряд

$$\zeta_X(s) = \exp\left(\sum_{m \geqslant 1} |X(\mathbb{F}_{q^m})| q^{-ms}/m\right),$$

где $|X(\mathbb{F}_{q^m}|$ – число рациональных точек на X в поле $\mathbb{F}_{q^m}$. Если $\dim X = n$, то этот ряд сходится для $\Re(s) > n$. Основные проблемы состоят в том чтобы продолжить эту функцию от s на всю s-плоскость, определить ее особенности и найти аналитическое поведение около них. Для всех n эти проблемы могут быть решены когомологическим методом Гротендика. В случае, когда $n = 1$, имеется ещё адельный метод, который работает также для дзета-функций полей алгебраических чисел. Мы объясним новую версию этого метода, которая является чисто алгебраической и функториальной по сравнению с классическим подходом, восходящим к Риману и состоящим в манипуляциях с формулами.

Мы обсудим также, как перенести этот подход на случай алгебраических поверхностей над полем $\mathbb{F}_q$.

Д.А. Попов
Научно-исследовательский институт физико-химической биологии им. А.Н. Белозерского МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

О величине $\boldsymbol{P(x)}$

В докладе будут представлены некоторые сравнительно недавние результаты о свойствах величины $P(x)$ – остаточного члена в задаче о числе целых точек в круге. Также будет сформулирован ряд гипотез, касающихся поведения величины $P(x)$ на коротких (длины $\asymp \sqrt{x}$) интервалах. Современный интерес к рассматриваемым задачам связан с теорией квантового хаоса и гипотезы универсальности.

А.В. Пухликов (pukh@liv.ac.uk)
Ливерпульский университет, Ливерпуль, Великобритания

Факториальные гиперповерхности

Факториальность – одно из важнейших свойств алгебраических многообразий. Оно является необходимым условием применения многих методов современной алгебраической геометрии. Знаменитая теорема Гротендика утверждает, что особенности полного пересечения факториальны, если коразмерность особого множества не ниже 4. Используя эту теорему, мы оцениваем коразмерность дополнения ко множетсву факториальных гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}^N$ при $d \geqslant 4$, $N \geqslant 7$. Одним из приложений этих результатов является существование расслоений Фано над базой большой размерности, каждый слой которых есть факториальное многообразие.

А.М. Райгородский (mraigor@yandex.ru)
Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

О хроматических числах случайных графов

Мой доклад посвящён хроматическим числам случайных подграфов из некоторой последовательности графов. Прежде всего, мы коснёмся ряда классических результатов о хроматических числах графов Эрдеша-Реньи, после чего перейдём к обсуждению некоторых новых задач. Так, например, мы рассмотрим последовательность графов $G(n, r, s)$, где $n \to \infty$, и $r = r(n)$, $s = s(n)$. Множество вершин $G(n, r, s)$ состоит изо всех r-подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$. Любые две вершины соединены ребром, если отвечающие им множества пересекаются в точности по s элементам. Такие графы возникают в теории кодирования, теории Рамсея и комбинаторной геометрии. В докладе будет дано определение случайных подграфов $G_p(n, r, s)$ графа $G(n, r, s)$, где $p = p(n) \in [0, 1]$ – вероятность независимого включения ребра из $G(n, r, s)$, и приведены недавние результаты о хроматических числах таких случайных графов.

З.Х. Рахмонов (zarullo_r@mail.ru)
Институт математики им. А. Джураева, Душанбе, Таджикистан

Суммы значений неглавных характеров в последовательности сдвинутых простых чисел

Впервые нетривиальную оценку суммы значений неглавного характера в последовательности сдвинутых простых чисел получил И.М. Виноградов. Он доказал: *если q – простое, $(l,q)=1$, χ – неглавный характер по модулю q, то*

$$T(\chi) = \sum_{p\leqslant x} \chi(p-l) \ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}} + x^{-1/6}\right).$$

При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна и из неё следует асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов) $\mod q$ вида $p-l$, $p\leqslant x$. Наилучший результат здесь принадлежит А.А. Карацубе. В 1970 г. он доказал: *если q — простое, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, $x\geqslant q^{1/2+\varepsilon}$, то*

$$T_1(\chi) \ll xq^{-\frac{\varepsilon^2}{1024}}.$$

В 2013 г. автор для составного q и примитивного характера χ_q Получил нетривиальную оценку $T(\chi_q)$ при $x\geqslant q^{5/6+\varepsilon}$. В докладе будет представлена следующая новая теорема.

Теорема. *Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер по модулю q, порожденный характером χ, q – свободное от кубов, $(l,D)=1$. Тогда при $x\geqslant D^{1/2+\varepsilon}$ имеем:*

$$T(\chi) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)\chi(n-l) \ll x\exp\left(-0.6\sqrt{\ln D}\right),$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε.

И.С. Резвякова (rezvyakova@mi.ras.ru)
Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия

О нулях дзета-функции Эпштейна

Доклад будет посвящен доказательству того факта, что положительная доля нетривиальных нулей дзета-функции Эпштейна, соответствующей бинарной положительно определенной квадратичной форме с целыми коэффициентами, имеет положительную долю нетривиальных нулей на критической прямой. Несмотря на то, что аналог гипотезы Римана для дзета-функции Эпштейна не имеет места (функция имеет много нетривиальных нулей вне критической прямой), методы, разработанные Атле Сельбергом, позволяют доказать упомянутый выше результат. Мы расскажем об идеях Сельберга и результатах, которые можно получить с их помощью в теории L-функций.

К. Рен (xmren@sdu.edu.cn)
Шаньдунский Университет, Цзинань, Китайская Народная Республика

Гиперсуммы Клоостермана по различным модулям и их приложения

Гиперсуммы Клоостермана по различным модулям возникают естественным образом в формуле суммирования Вороного для параболических форм, отвечающих $GL_m(\mathbb{Z})$. В докладе будут получены оценки гиперсумм Клоостермана для случая модулей, последовательно делящих друг друга. В качестве следствия будут получены оценки сглаженных сумм с коэффициентами Фурье форм Мааса, отвечающих $SL_m(\mathbb{Z})$, содержащих множителем величины $e(\alpha n)$.

Для таких сумм установлено очень быстрое убывание в случаях, когда α является фиксированным рациональным числом или же трансцендентным числом с показателем приближения $\tau(\alpha) > m$. Нетривиальные оценки для таких сумм получены уже в случае, когда $\tau(\alpha) > (m+1)/2$.

А.А. Седунова (alisa.sedunova@phystech.edu)
Математический институт, Гёттингенский университет имени Георга-Августа, Гёттинген, Германия

Эффективная версия теоремы Бомбьери -Виноградова

Доклад посвящён новой эффективной версии теоремы Бомбьери-Винградова, которая уточняет предыдущий результат Ф. Дресса, Х. Иванца и Дж. Тененбаума [1]. Именно, справедлива следующая

Теорема. *Пусть $x \geqslant 4$, $1 \leqslant Q_1 \leqslant Q \leqslant x^{1/2}$ и пусть $l(q)$ обозначает наименьший простой делитель числа q. Тогда*

$$\sum_{\substack{q \leqslant Q \\ l(q) > Q_1}} \max_{2 \leqslant y \leqslant x} \max_{(a,q)=1} \left| \psi(y;q,a) - \frac{\psi(y)}{\varphi(q)} \right| \ll$$

$$\ll \left(x Q_1^{-1} + Q x^{1/2} + x^{95/96} \log x \right) (\log x)^3.$$

(Уточнение состоит в замене множителя $(\log x)^{7/2}$ из [1] на $(\log x)^3$). Доказательство этой теоремы использует тождество Вона с весами, позволяющее применить сглаживание наряду с приёмами Грэхема, связанными с решетом Сельберга.

[1] F. Dress, H. Iwaniec, G. Tenenbaum, *Sur une somme liée à la fonction de Möbius.* J. Reine Angew. Math. **340** (1983). P. 53 – 58.

[2] S. Graham, *An asymptotic estimate related to Selberg's sieve.* J. Number Theory. **10**:1 (1978). P. 83 – 94.

Д.И. Толев (dtolev@fmi.uni-sofia.bg)
Софийский университет имени святого Климента Охридского, София, Болгария

О некоторых аддитивных задачах с простыми и почти простыми числами

1) Рассмотрим диофантово неравенство

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c - N| < (\log N)^{-E},$$

где $1 < c < \frac{15}{14}$, N – достаточно большое действительное число и $E > 0$ – произвольно большая константа. Доказывается, что оно имеет решение в простых числах p_1, p_2, p_3 таких, что каждое из чисел $p_1 + 2$, $p_2 + 2$, $p_3 + 2$ имеет не более чем $\left[\dfrac{369}{180 - 168c}\right]$ простых множителей (здесь $[t]$ означает целую часть t).

2) (по совместной работе с Ж. Петровым). Рассмотрим диофантово уравнение

$$[p^c] + [m^c] = N,$$

где $1 < c < \frac{29}{28}$ и N – достаточно большое целое число. Мы доказываем, что оно имеет решение p, m где p — простое число и m — почти простое с не более чем $\left[\dfrac{52}{29 - 28c}\right] + 1$ простых сомножителей.

К.-М. Тсанг (kmtsang@maths.hku.hk)
Университет Гонконга, Гонконг

О некоторых средних значениях, связанных с функцией делителей и дзета-функцией Римана

Пусть $\Delta(x)$ и $E(x)$ обозначают, соответственно, остаточные члены в проблеме делителей Дирихле и в формуле для второго момента дзета-функции Римана на критической прямой. В докладе мы рассмотрим некоторые средние значения общего вида, связанные с $\Delta(x)$ и $E(x)$. Из результатов, относящихся к этим средним значениям, можно сделать заключение о существенном различии между двумя указанными функциями, которое проявляется в том, что $E(x)$ в некотором смысле бывает отрицательной "чаще", чем $\Delta(x)$.

Г.В. Фёдоров (glebonyat@mail.ru)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Федеральный научный центр "Научно-исследовательский институт системных исследований РАН", Москва, Россия

О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях

В статье [1] поставлен вопрос о конечности числа свободных от квадратов многочленов $f \in \mathbb{Q}[h]$ фиксированной степени с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в поле $\mathbb{Q}((h))$, для которых поля $\mathbb{Q}(h)(\sqrt{f})$ не изоморфны друг другу и полям вида $\mathbb{Q}(h)(\sqrt{ch^n+1})$, где $c \in \mathbb{Q}^*$, $n \in \mathbb{N}$. В совместной статье В.П. Платонова и Г.В. Фёдорова [2] получен положительный ответ на этот вопрос для эллиптических полей $\mathbb{Q}(h)(\sqrt{f})$, $\deg f = 3$. В докладе будут представлены результаты последней статьи [2].

[1] В.П. Платонов, Г.В. Фёдоров, *О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях.* Доклады РАН.

2017 (в печати).

[2] В.П. Платонов, Г.В. Фёдоров, *О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях.* Доклады РАН. 2017 (в печати).

К. Форд (ford@math.uiuc.edu)
Иллинойсский университет в Урбане-Шампейне, г. Урбана, США

Подряд идущие составные числа в полиномиальных последовательностях

Все существующие методы нахождения больших промежутков между соседними простыми числами или, что то же, нахождения длинных строк, состоящих из подряд идущих составных чисел, основаны на отыскании больших промежутков в последовательности чисел, взаимно простых с $P(x)$ – произведением всех простых, не превосходящих x. Однако, эти методы очень трудно адаптировать к решению других родственных задач, таких, как, например, нахождение большого количества подряд идущих целых n, для которых величины n^2+1 будут составными. Указанная трудность объясняется тем фактом, что основной компонент доказательства – оценка для количества гладких чисел в конструкциях, связанных с большими расстояниями между соседними простыми, не может быть перенесён на случай последовательности n^2+1.

В настоящем докладе даётся обзор методов, позволяющих находить большие расстояния между соседними простыми числами, и приводится набросок нового вероятностного метода доказательства существования больших строк из последовательных целых чисел n, для которых числа n^2+1 будут составными. Именно, речь пойдёт о строках, состоящих из чисел $n \leqslant X$, длина которых имеет порядок, превышающий тривиальную границу $\log X$.

Кроме того, в докладе будут затронуты приложения нового метода к другим родственным задачам. Этот метод представляет собой результат совместной работы с С. Конягиным, Дж. Майнардом, К. Померансом и Т. Тао.

Д.А. Фроленков (frolenkov@mi.ras.ru)
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Необращение в ноль L-функций автоморфных форм относительно конгруэнц подгруппы, когда уровень равен степени простого числа (по совместным работам с О.Г. Балкановой)

Иванец и Сарнак доказали, что как минимум 25% значений L-функций, ассоциированных с голоморфными новыми формами четного веса и уровня $N \to \infty$, не обнуляются в критической точке, когда N свободно от квадратов и $\phi(N) \sim N$. Мы распространим данный результат на случай, когда уровень равен степени простого числа $N = p^{\nu}$, $\nu \geqslant 2$. Доказательство основано на вычислении асимптотических формул для скрученных моментов

$$M_1(l,u,v) = \sum_{f \in H_{2k}^*(N)}^{h} \lambda_f(l) L_f\left(\tfrac{1}{2}+u+v\right),$$

$$M_2(l,u,v) = \sum_{f \in H_{2k}^*(N)}^{h} \lambda_f(l) L_f\left(\tfrac{1}{2}+u+v\right) L_f\left(\tfrac{1}{2}+u-v\right),$$

и на применении техники успокаивающих множителей.

Г. Хиари (hiary.1@osu.edu)
Университет штата Огайо, Колумбус, США

О кубической тригонометрической сумме с малыми кубическими коэффициентами

В докладе будет получено явное асимптотическое разложение для кубической тригонометрической суммы. Это разложение оказывается наиболее востребованным в случае, когда кубические коэффициенты лежат в заданной области. Эти результаты обобщают предыдущие результаты такого рода, полученные для квадратичного случая, и помогают прояснить вопросы о численном приближении кубических тригонометрических сумм и о получении оценок для них.

В.Г. Чирский (vgchirskii@yandex.ru)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Московский педагогический государственный университет,
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Москва, Россия

Конечные достаточно непериодические последовательности

В работе [1] рассмотрен способ преобразования периодической последовательности цифр ($a_{n+T} = a_n$) в непериодическую бесконечную последовательность. Для этого в работах [1] и [2] рассматривались ряды некоторого вида с коэффициентами a_n и исследовались их арифметические свойства.

Так как в практических задачах рассматриваются конечные отрезки последовательности цифр бесконечного разложения, в настоящем докладе предложен некоторый способ измерения периодичности конечных отрезков последовательности, вводится понятие конечной достаточно непериодической последовательности и отмечена связь этого понятия с арифметическими свойствами рассматриваемых чисел.

[1] В.Г. Чирский, А.Ю. Нестеренко, *Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей*. Дискр. математика. **24**:4 (2015). С. 150 – 157.

[2] В.Г. Чирский, *Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами*. Докл. РАН. **439**:6 (2014). С. 677 – 679.

В.Н. Чубариков
(chubarik2009@live.ru, chubarik1@mech.math.msu.su)

Аддитивные и мультипликативные свойства арифметических функций

И.Д. Шкредов (ilya.shkredov@gmail.com)
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Приложения теории инцидентностей к некоторым тройным тригонометрическим суммам

Пусть χ – нетривиальный мультипликативный характер по простому модулю p. С помощью теории инцидентностей над $\mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_p$ мы находим новые оценки для сумм вида

$$\sum_{a\in A,\, b\in B,\, c\in C} \chi(a+b+c),$$

$$\sum_{a\in A,\, b\in B,\, c\in C,\, d\in D} \chi(a+b+cd), \qquad \sum_{a\in A,\, b\in B,\, c\in C,\, d\in D} \chi(a+b(c+d)),$$

по произвольным множествам, а также для триномиальной суммы

$$\sum_x \chi(x) e_p(ax^k + bx^m + cx^n)\,.$$

Й. Штойдинг (steuding@mathematik.uni-wuerzburg.de)
Вюрцбургский университет, Вюрцбург, Германия

Н. Освальд (oswald@uni-wuppertal.de)
Университет Вупперталь, Вупперталь, Германия

Теоремы единственности для дзета-функций

Ряды Дирихле и их аналитические продолжения играют ключевую роль в аналитической теории чисел. В настоящем докладе мы затронем вопросы, связанные с распределением значений рядов Дирихле с периодическими коэффициентами и, соответственно, их мероморфных продолжений (включая, например, L-функции Дирихле). Нами будет доказан аналог классической теоремы Рольфа Неванлинны о пяти точках (1926) для указанного семейства функций и получен ответ на следующий вопрос: как много общих значений (т.е. одинаковых значений, отвечающих одинаковым значениям аргумента) могут принимать два таких ряда Дирихле? Кроме того, мы затронем основы неванлинновской теории распределения значений и, в частности, коснёмся вклада, который внёс в неё Джордж Пойа.

Short abstracts

S.I. Bezrodnykh (sbezrodnykh@mail.ru)
Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

On the analytic continuation of Lauricella function

One of the generalizations of Gaussian hypergeometric function $F(a,b;c;z)$ to the case of several complex variables $(z_1,\dots,z_N) =: \mathbf{z}$ is Lauricella function $F_D^{(N)}(\mathbf{a};b,c;\mathbf{z})$, which is defined by N-multiple series (see [1], [2])

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a};b,c;\mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}(a_1)_{k_1}\cdots(a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}|}k_1!\cdots k_N!} z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N},$$

where b and $c \notin \mathbb{Z}^-$ are some scalar (complex-valued) parameters, $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_N)$ is some vector-valued parameter and $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_N)$ is multi-index of summation with non-negative components. This Lauricella series converges in the unit polydisk $\mathbb{U}^N$.

In the talk, we construct the system of formulae that continue analytically the function $F_D^{(N)}$ to N–dimensional complex space for an arbitrary number of variables (see [3]).

[1] G. Lauricella, *Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili.* Rendiconti Circ. math. Palermo. **7** (1893). P. 111 – 158.

[2] H. Exton, *Multiple hypergeometric functions and application.* N.-Y., J. Willey & Sons inc., 1976.

[3] S.I. Bezrodnykh, *Analytic continuation formulas and Jacobi-type relations for Lauricella function.* Doklady Math. **93**:2 (2016). P. 129 – 134.

V.A. Bykovskii (vab@iam.khv.ru)
Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia

The distribution of lattice points on the hyperboloid

Let d be an integer. Denote by

$$K_{\mathbb{Z}}(d) \;=\; \big\{(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3 \;\; b^2-4ac \;=\; d\big\}$$

the set of lattice points lying on the hyperboloid

$$\big\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x_2^2-4x_1x_2 \;=\; d\big\},$$

which is hyperbolic in the case $d<0$ and elliptic in the case $d>0$. Also, we denote

$$K_{\mathbb{Z}}^{+}(d) \;=\; \big\{(a,b,c)\in K_{\mathbb{Z}}(d) \;\; c>0\big\}.$$

The set $K_{\mathbb{Z}}(d)$ is non-empty if and only if $d\equiv 0,1(\operatorname{mod}4)$. Such numbers $d\neq 0$ are called as discriminants because the elements of the set $K_{\mathbb{Z}}(d)$ parametrize the binary quadratic forms $Q(u,v)=au^2+buv+cv^2$ of discriminant d with integers coefficients. Next, let

$$\delta_q(m) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{if } \; m\equiv 0(\operatorname{mod}q),\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Then Dirichlet series

$$\sum_{c=1}^{+\infty}\Bigg(\sum_{b(\operatorname{mod}2c)}\delta_{4c}(b^2-d)\Bigg)\frac{1}{c^s} \;=\; \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\,G_d(s) \quad (d\neq n^2)$$

converges absolutely in the half-plane $\operatorname{Re}s>1$ and determines the entire function $G_d(s)$. The following theorem holds true:

Theorem. *Suppose that* $d \neq n^2$, $d \equiv 0, 1 \pmod 4$, *and let* $\varphi(x, y)$ *be any smooth complex-valued function over* $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ *with a compact support. Then, for any fixed* $\varepsilon > 0$ *we have*

$$\sum_{(a,b,c)\in K_{\mathbb{Z}}^{+}(d)} \varphi\left(\frac{b}{2c}, \frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right) =$$

$$= \frac{3}{\pi^2}\sqrt{|d|}G_d(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\varphi(x, y)\,\frac{dx\,dy}{y^2} + O_{\varphi,\varepsilon}\left(|d|^{1/2-1/12+\varepsilon}\right).$$

V.G. Chirskii (vgchirskii@yandex.ru)
Lomonosov Moscow State University,
Moscow State Pedagogical University,
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia

Finite sufficiently non-periodic sequences

The paper [1] presents an approach to the transformation of a periodic sequence of digits ($a_{n+T} = a_n$) to a non-periodic one. In [1] and [2] we studied some arithmetic properties of certain series with periodic coefficients a_n.

For practical purposes, we can take only finitely many digits of the infinite expansion so here we propose a way to measure the periodicity of a finite sequence. We also introduce the notion of a finite sufficiently non-periodic sequence and try to link it with the arithmetic properties of the considered numbers.

[1] V.G. Chirskii, A.Yu. Nesterenko, *An approach to the transformation of periodic sequences.* Discrete Math. Appl. **27**:1 (2017). P. 1 – 6.

[2] V.G. Chirskii, *Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients.* Doklady Math. **90**:3 (2014). P. 766 – 768.

V.N. Chubarikov
(chubarik2009@live.ru , chubarik1@mech.math.msu.su)
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Additive and multiplicative properties of arithmetic functions

N.M. Dobrovol'skii
(e-mail dobrovol@tspu.tula.ru)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University,
Tula State University, Tula, Russia

On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities (joint paper with N.N. Dobrovol'skii)

In 2015, we proved that the calculation of another successive coefficient of the continued fraction expansion of a given algebraic number α requires the calculation of two values of the minimal polynomial corresponding to the residual fraction. In the talk, we prove the similar assertion where we replace the minimal plynomial of the residual fraction to the minimal polynomial of the initial number α.

Since all the roots are different, we introduce the following notation

$$\delta(\alpha) = \min_{2 \leqslant j \leqslant n} \left|\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right| > 0,$$

Theorem. *Let $\alpha = \alpha_0$ be the real root of an irreducible integer polynomial and let $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ be its rest roots. Next, suppose that α has the following expansion into continued* *fraction:*

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Define the index $m_0 = m_0(\alpha, \varepsilon)$ *by the inequalities*

$$\frac{2(n-1)}{Q_{m_0-1}\delta(\alpha)} < \varepsilon.$$

Then the following relations

$$q_m =$$

$$= \begin{cases} q_m^*, & \text{if } (-1)^m f_0\left(\dfrac{q_m^* P_{m-1} + P_{m-2}}{q_m^* Q_{m-1} + Q_{m-2}}\right) > 0 \text{ and} \\ & (-1)^m f_0\left(\dfrac{(q_m^*+1) P_{m-1} + P_{m-2}}{(q_m^*+1) Q_{m-1} + Q_{m-2}}\right) < 0 \\ \\ q_m^* + 1, & \text{if } (-1)^m f_0\left(\dfrac{(q_m^*+1) P_{m-1} + P_{m-2}}{(q_m^*+1) Q_{m-1} + Q_{m-2}}\right) > 0 \\ \\ q_m^* - 1, & \text{if } (-1)^m f_0\left(\dfrac{q_m^* P_{m-1} + P_{m-2}}{q_m^* Q_{m-1} + Q_{m-2}}\right) < 0 \end{cases}$$

hold for any $m > m_0$*; here*

$$q_m^* = \left[\frac{f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{Q_{m-1}^2\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|} - \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}\right].$$

N.P. Dolbilin (dolbilin@mi.ras.ru)
Steklov Mathematical Institute,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

On the regular systems

The regular system is the direct generalization of the concept of the integer lattice.

A set of points $X \subset \mathbb{R}^d$ is called *Delaunay set* if two following conditions hold for some positive r and R:

(1) the ball $B_y(r)$ of radius r centered at the point $y \in \mathbb{R}^d$ contains *at most one* point $x \in X$;

(2) the ball $B_y(R)$ of radius R contains *at least one* point $x \in X$.

A *lattice* of the rank d can be defined as a Delaunay set in $\mathbb{R}^d$ with a point-transitive group of translations.

A *regular system* is defined as a Delaunay set with a point-transitive group of isometries.

The class of regular systems is of great importance because these sets are considered as the models of the atomic structure of a crystalline matter.

The aim of Local theory [1] is to prove rigorously the existence of a point-transitive group for a Delaunay set X from pairwise congruence of neighborhoods of points of X. This problem is related to attempt of explaining why the atomic structure of a matter moves from amorphous state into structure with a rich symmetry group during the phase transition from liquid to solid state [2].

In the talk, we will discuss several key results of the local theory of regular systems [3]-[5].

[1] B.N. Delone, N.P. Dolbilin, M.I. Štogrin, R.V. Galiulin, *A local test for the regularity of a system of points.* (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR. **227**:1 (1976). P. 19 — 21.

[2] N.P. Dolbilin, J.C. Lagarias, M. Senechal, *Multiregular point systems.* Discrete Comput. Geom. **20**:4 (1998). P. 477 – 498.

[3] N.P. Dolbilin, *Crystal criterion and antipodal Delaunay sets.* Vestnik Chelyabinsk. Gos. Univ. 17 (2015). P. 6 – 17.

[4] N.P. Dolbilin, A.N. Magazinov, *Uniqueness theorem for locally antipodal Delaunay sets.* Proc. Steklov Inst. Math. **294** (2016). P. 215 -– 221.

[5] N. Dolbilin, *Delone Sets: Local Identity and Global Order.* Volume dedicated to the 60th anniversary of Professors Karoly Bezdek and Egon Schulte, Springer Contributed Volume on Discrete Geometry and Symmetry. Springer, 2016 (to appear). `arXiv: 1608.06842`

G.V. Fedorov (`glebonyat@mail.ru`)
Lomonosov Moscow State University,
Federal Scientific Center "Scientific Research Institute of System Development" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

On the periodicity of continued fractions in elliptic fields

The paper [1] raised the question of the finiteness of the number squarefree polynomials $f \in \mathbb{Q}[h]$ of fixed degree with periodic continued fraction expansion of $\sqrt{f}$ in the field $\mathbb{Q}((h))$, for which the fields $\mathbb{Q}(h)(\sqrt{f})$ are not isomorphic to one another and to fields of the form $\mathbb{Q}(h)(\sqrt{ch^n+1})$, where $c \in \mathbb{Q}^*$, $n \in \mathbb{N}$. In the joint paper, V.P. Platonov and G.V. Fedorov [2] obtained a positive answer to this question for elliptic fields $\mathbb{Q}(h)(\sqrt{f})$, $\deg f = 3$. The report will present the results of the article [2].

[1] V.P. Platonov, G.V. Fedorov, *On the periodicity of continued fractions in elliptic fields.* Doklady Mathematics. 2017 (to appear).

[2] V.P. Platonov, G.V. Fedorov, *On the periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields.* Doklady Mathematics. 2017 (to

appear).

K. Ford (ford@math.uiuc.edu)
University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, USA

Consecutive composite values in polynomial sequences

Existing methods for finding long gaps between consecutive primes, equivalently finding long strings of consecutive composite integers, are all based on locating long gaps in the sequence of integers coprime to $P(x)$, the product of primes up to x. It is difficult, however, to port these method to related problems, such as the problem of finding many consecutive values of n for which n^2+1 is composite. The difficulty stems from the fact that a crucial ingredient, a bound for smooth numbers which is the "big tool" in the prime gaps methods, cannot be used for the n^2+1 problem. In this talk, we review the methods for finding large gaps between primes, and outline a new probabilistic method for proving the existence of long strings of consecutive values of n for which n^2+1 is composite; that is, strings of $n \leqslant X$ whose length is of order larger than the trivial bound $\log X$. We also discuss the application of our methods to other, related questions. This is joint work with Sergei Konyagin, James Maynard, Carl Pomerance, and Terence Tao.

D.A. Frolenkov (frolenkov@mi.ras.ru)
Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia

Non-vanishing of automorphic L-functions of prime power level (joint papers with O.G. Balkanova)

Iwaniec and Sarnak showed that at the minimum 25% of L-values associated to holomorphic newforms of fixed even integral weight and level $N \to \infty$ do not vanish at the critical point when N is square-free and $\phi(N) \sim N$. We extend the given result to the case of prime power level $N = p^\nu$, $\nu \geqslant 2$. The proof is based on asymptotic evaluation of twisted moments

$$M_1(l,u,v) = \sum_{f \in H_{2k}^*(N)}^{h} \lambda_f(l) L_f\bigl(\tfrac{1}{2}+u+v\bigr),$$

$$M_2(l,u,v) = \sum_{f \in H_{2k}^*(N)}^{h} \lambda_f(l) L_f\bigl(\tfrac{1}{2}+u+v\bigr), L_f\bigl(\tfrac{1}{2}+u-v\bigr),$$

and the technique of mollification.

A. Galateau (aurelien.galateau@univ-fcomte.fr)
Laboratoire de Mathématiques de Besançon, France

An explicit bound for the torsion on subvarieties of abelian varieties

We give a precise bound for the degree of the torsion subset associated to a subvariety of an abelian variety. The proof combines diophantine geometry and a theorem of Serre on the homotheties of the Galois representation associated to a torsion subgroup of an abelian variety. This is joint with C. Martinez.

K. Gong (kg@henu.edu.cn)
Henan University, Kaifeng, People's Republic of China

Encounter with character sums

The theory of Dirichlet characters is an important but extremely difficult subject in number theory. Almost 100 years have passed since the fundamental contribution of G. Pólya and I. M. Vinogradov (1918), there were very few substantial progress like D. A. Burgess's work in late 1950s. A. A. Karatsuba created a new method to deal with character sums in late 1960s, from which many an arithmetical applications have been derived. The past decades have seen some promising changes due to the introduce of new ideas and tools. In this talk I will present some old and new results in the field of character sums, then revisit several open problems related to Dirichlet characters. Finally, I will present my recent joint works with C. H. Jia and M. A. Korolev.

S.A. Gritsenko (s.gritsenko@gmail.com)
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

On the fractional moments of some mollified arithmetical Dirichlet series

In 2002, A.A. Karatsuba demonstrated that the true order of fractional moments of some Dirichlet series allows one to obtain the estimate for the number of zeta-function zeros on the critical line which is more precise than the estimate of G. Hardy and J. Littlewood (1921).

In 2017, the author has found the true order lower and upper estimates for some mollified L-functions and has applied it to the estimate of the number of zeros of Davenport-Heilbronn function on the critical line. The moments of mollified Dirichlet L-functions mean the integrals

$$\int_T^{2T} \left|L\left(\tfrac{1}{2}+it,\chi\right)\phi\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt,$$

where the function $\phi\left(\frac{1}{2}+it\right)$ has no odd zeros and such that the function $L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)$ is such close to the constant function as possible. The idea of introducing such mollifier function $\phi\left(\frac{1}{2}+it\right)$ belongs to A. Selberg.

The exponent $2k$ is called the order of the moment. In his previous studies, the author considered only the moments of orders $\frac{1}{2}$ and 1. In the present talk, we present the estimates of moments of orders $\frac{2}{v}$, where v is any integer greater that 2.

Our main result is the following. Suppose that ε is an arbitrary small number, $X = T^{\varepsilon}$, and let

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1 (\mathrm{mod}\, 5)} \left(1 - \frac{1}{2vp^s}\right) \prod_{p\equiv\pm2 (\mathrm{mod}\, 5)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{p^s}\right),$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\chi_1(\nu)\left(1 - \dfrac{\log \nu}{\log X}\right), & \text{if } \nu < X, \\ 0, & \text{if } \nu \geqslant X, \end{cases}$$

where $\chi_1(\nu)$ is Dirichlet character modulo 5 with the condition $\chi_1(2) = i$,

$$\varphi\big(\tfrac{1}{2} + it\big) = \sum_{\nu<X} \frac{\beta(\nu)}{\nu^{1/2+it}}, \quad \phi\big(\tfrac{1}{2} + it\big) = \big(\varphi\big(\tfrac{1}{2} + it\big)\big)^{2v}.$$

Theorem. *The following estimates hold true:*

$$T(\log T)^{(1+2\varepsilon v)^2/(2v^2)} \ll \int_T^{2T} \big|L\big(\tfrac{1}{2} + it, \overline{\chi}_1\big)\phi\big(\tfrac{1}{2} + it\big)\big|^{2/v} dt \ll$$
$$\ll T(\log T)^{(1+2\varepsilon v)^2/(2v^2)},$$

$$\int_T^{2T} \big|L\big(\tfrac{1}{2} + it, \chi_1\big)\phi\big(\tfrac{1}{2} + it\big)\big|^{2/v} dt \ll T(\log T)^{(1-2\varepsilon v)^2/(2v^2)},$$

$$\int_T^{2T} \big|L\big(\tfrac{1}{2} + it, \overline{\chi}_1\big)\phi\big(\tfrac{1}{2} + it\big)\big| dt \ll T(\log T)^{(1+2\varepsilon v)^2/8},$$

$$\int_T^{2T} \big|L\big(\tfrac{1}{2} + it, \chi_1\big)\phi\big(\tfrac{1}{2} + it\big)\big| dt \ll T(\log T)^{(1-2\varepsilon v)^2/8}.$$

Denote by $N_0(T)$ the number of zeros of Davenport-Heilbronn function on the segment $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+iT\right]$. Then the above theorem implies that

$$N_0(2T) - N_0(T) \gg T(\log T)^{1/2+1/12-\varepsilon}.$$

G. Hiary (hiary.1@osu.edu)
The Ohio State University, Columbus, USA

On cubic exponential sums with a small cubic coefficient

An explicit asymptotic expansion for cubic exponential sums is derived. The expansion is most useful when the cubic coefficient is in a restricted range. This generalizes previous results in the quadratic case, and helps clarify how to numerically approximate cubic exponential sums and how to obtain upper bounds for them.

A. Ivić (aleksandar.ivic@rgf.bg.ac.rs)
Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade, Serbia

Multiplicites of zeros of $\zeta(s)$ and its values over short intervals

Let $r = m(\rho)$ denote the multiplicity of the complex zero $\rho = \beta + i\gamma$ of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$. The present work, which is a continuation of [1], brings forth several results involving $m(\rho)$. It is seen that the problem can be reduced to the estimation of integrals of the zeta-function over "very short" intervals. This is related to the "Karatsuba conjectures" (see [2]), related to the quantity

$$F(T, \Delta) := \max_{t\in[T,T+\Delta]} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)| \qquad 0 < \Delta = \Delta(T) \leqslant 1.$$

By the complex integration technique, a new, explicit bound for $m(\beta+i\gamma)$ is also derived, which is relevant when β is close to unity. As a corollary, it follows that, for $\frac{5}{6} \leqslant \beta < 1$ and $\gamma \geqslant \gamma_1$, we have

$$m(\beta + i\gamma) \leqslant 4 \log\log\gamma + 20(1-\beta)^{3/2} \log\gamma.$$

[1] A. Ivić, *On the multiplicity of zeros of the zeta-function.* Bulletin CXVIII de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts – 1999, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Sciences mathématiques. №. 24. P. 119–131.

[2] A.A. Karatsuba, *On lower bounds for the Riemann zeta-function.* Dokl. Math. **63**:1 (2001). P. 9 – 10 (translation from: Dokl. Akad. Nauk. **376**:1 (2001). P. 15 – 16).

A.B. Kalmynin (alkalb1995cd@mail.ru)
National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russia

Omega-theorems for Riemann's zeta function and its derivatives near the line $\Re s = 1$

Theorem of Zaitsev [1] states that

$$\limsup_{s\in\Sigma(T),\, T\to+\infty} \frac{|\zeta(s)|}{\ln T} \geqslant 1,$$

where $\Sigma(T)$ denotes the domain

$$1 - (4+\varepsilon)\frac{\ln\ln\ln t}{\ln\ln t} \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad t_0 < |t| \leqslant T.$$

In this talk, we will present a generalization of Zaitsev's method that allows us to obtain a family of omega-theorems for the Riemann's zeta function and its derivatives in various domains of the critical strip. In particular, we were able to prove that in the same domain $\Sigma(T)$ for all n and arbitrary positive δ the inequality

$$\limsup_{s\in\Sigma(T),\,T\to+\infty} \frac{|\zeta^{(n)}(s)|}{e^{(\ln\ln T)^{1+\varepsilon/2-\delta}}} \geqslant 1,$$

holds.

[1] S.P. Zaitsev, *Omega-theorems for the Riemann zeta-function near the line* $\operatorname{Re} s = 1$. Mosc. Univ. Math. Bulletin. **55**:3 (2000).

S.V. Konyagin (konyagin@mi.ras.ru)
Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia

On the irreducible solutions of the equation with inverses

Consider the following symmetric Diophantine equation

$$\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_r} = \frac{1}{x_{r+1}}+\ldots+\frac{1}{x_{2r}}, \tag{1}$$

where $r\geqslant 3$, and the variables $x_1,\ldots,x_{2r}$ run through the segment $[1,N]$. Such equations appear in te problems connected with the estimates of incomplete Kloosterman sums.

The solution of (1) is called irreducible if any component from the set $x_1,\ldots,x_r$ is not contained in the set $x_{r+1},\ldots,x_{2r}$. The following assertions holds true.

Theorem 1. *Let $N, r\geqslant 3$. Then the number $J_r(N)$ of irreducible solutions of the equation (1) with positive integer variables $1\leqslant x_1,\ldots,x_{2r}\leqslant N$ obeys the estimate:*

$$J_r(N) < e^{(3r)^3-90} N^{r-\frac{r}{2(2r-1)}} \left(\frac{\ln N}{r}+9\right)^{10r^2} \exp\left(\frac{26r^{3/2}\sqrt{\ln N}}{\ln(r\ln N)}\right).$$

The estimate of Theorem 1 allows one to derive an asymptotic formula for the whole number $I_r(N)$ of solutions of the equation (1) with integer variables $1 \leqslant x_1, \ldots, x_{2r} \leqslant N$. Namely, we have

Theorem 2. *Let $N, r \geqslant 3$. Then the number $I_r(N)$ satisfies the relation*

$$I_r(N) = r!N^r\bigl(1 + \delta_r(N)\bigr),$$

where

$$|\delta_r(N)| \leqslant e^{(3r)^3-90} N^{-\frac{r}{2(2r-1)}} \left(\frac{\ln N}{r} + 9\right)^{10r^2} \exp\left(\frac{26r^{3/2}\sqrt{\ln N}}{\ln (r \ln N)}\right).$$

In the talk, we briefly describe main ideas that allow one to derive the above theorems and some other assertions concerning the number of solutions of the equation (1).

M.A. Korolev (korolevma@mi.ras.ru)
Steklov Mathematical Institute,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Inverse residues and Pyatetskii-Shapiro sequences

Let $c > 1$ be fixed non-integer. Then the set $\mathcal{P}_c$ of integers $m = \bigl[n^c\bigr]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ is called as Pyatetskii-Shapiro sequence. There are a lot of papers devoted to different number-theoretical problems with the elements of the sequences $\mathcal{P}_c$.

In the talk, we will speak about the distribution of inverse residues modulo q for the elements of Pyatetskii-Shapiro sequence, that is, about the distribution of the solution of the congruence

$$mm^* \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$$

with the conditions $m \in \mathcal{P}_c$, $1 \leqslant m \leqslant X$, where $X = X(c, q) \to +\infty$ as $q \to +\infty$.

Y.-K. Lau (yklau@maths.hku.hk)
The University of Hong Kong, Hong Kong

Fourier coefficients of half-integral weight modular forms

In this talk, we give an exposition on some recent work, due to various researchers, on the sign of the Fourier coefficients of modular forms when the Fourier coefficients are real. Then we discuss our results for half-integral weight modular forms in two collaboration projects with the team comprising of Y. -J. Jiang, G. -S. Lü, E. Royer and J. Wu and with my colleague B. Kane respectively. One project is about the sign-change of Fourier coefficients over squarefree numbers. The other is concerned with the halting of an algorithm that constructs supersingular elliptic curves when a maximal order of the quaternion algebra is input into the algorithm.

A. Laurinčikas (antanas.laurincikas@mif.vu.lt)
Vilnius University, Vilnius, Lithuania

Zeros-distribution of the Riemann zeta-function and universality

In 1975, S.M. Voronin discovered the universality property of the zeta-function $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, i.e., that a wide class of analytic functions can be approximated by shifts $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

We consider the universality of $\zeta(s)$ when τ takes values from the set $\{\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}$, where $0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \dots$ are the imaginary parts of the non-trivial zeros of $\zeta(s)$.

We suppose that

$$\sum_{\substack{\gamma_l, \gamma_k \leqslant T \\ |\gamma_l - \gamma_k| < \frac{c}{\log T}}} 1 \ll T \log T, \quad T \to \infty,$$

with a certain constant $c > 0$. This estimate is a weak form of the Montgomery pair correlation conjecture [1].

Let $D = \left\{ s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1 \right\}$, $\mathcal{K}$ be the class of compact subsets of D with connected complements, and let $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, denote the class of continuous non-vanishing functions on K which are analytic in the interior of K. Then we have

Theorem. *Suppose that the weak Montgomery conjecture is true. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$ and $h > 0$,*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\gamma_k h) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

In the report, the approximation of analytic functions by $F(\zeta(s + i\gamma_k h))$ for some classes of operators F also will be discussed.

[1] H.L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function.* In: Analytic Number Theory, (St. Louis Univ., 1972), H.G. Diamond (ed.), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, Amer. Math. Soc. Providence, 1973. P. 181 – 193.

R. Macaitienė (renata.macaitiene@su.lt)
Šiauliai University, Šiauliai State College, Šiauliai, Lithuania

Universality for *L*-functions from the Selberg class

Universality of zeta and L-functions is one of the most interesting phenomenons of analytic number theory. Roughly speaking, it means that every analytic function can be approximated with a given accuracy by shifts of the considered zeta or L-functions, uniformly on compact subsets of a certain region.

In the report, we will focus on the universality of L-functions from Selberg's class [1], which is one of the most extensively studied objects in analytic number theory. We will present two types' results – *continuous* and *discrete* universality – when the shift can take arbitrary real values or values from a certain discrete set (e.g., from arithmetic progression), respectively. More precisely, the results given in [2], [3] and [4] will be discussed.

[1] A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*. In: Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), E. Bombieri et al. (Eds.). Univ. Salerno. Salerno, 1992. P. 367 – 385.

[2] H. Nagoshi, J. Steuding, *Universality for L-functions in the Selberg class*. Lith. Math. J. **50**:3 (2010). P. 393 – 411.

[3] R. Macaitienė, *Mixed joint universality for L-functions from Selberg's class and periodic Hurwitz zeta-functions*. Chebysh. Sb., **16**:1 (2015). P. 219 – 231.

[4] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, *Discrete universality in the Selberg class*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2017. V. 299. (to appear).

H. Maier (helmut.maier@uni-ulm.de)
University of Ulm, Ulm, Germany

The Ternary Goldbach Problem with a Prime and two Isolated Primes (joint paper with M.T. Rassias).

The concept of an isolated prime is closely related to the problem of large gaps between consecutive primes. This problem has mainly been studied by the Erdös - Rankin method and its extensions. Recently a significant improvement of the result has been achieved by Ford, Green, Konyagin, Maynard and Tao. The authors of the present paper combine the results and methods of these five authors with the circle method, which first has been applied to the ternary Goldbach problem by I.M. Vinogradov. His result has been extended to various special sets of primes, e.g. primes in arithmetic progressions. By considering primes in residue-classes, they have constructed by the improved Erdös-Rankin method, the authors obtain the following

THEOREM. *Under assumption of the Generalized Riemann Hypothesis each sufficiently large odd integer can be expressed as the sum of a prime and two isolated primes.*

F.M. MALYSHEV (malyshevfm@mi.ras.ru)
Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia

The generation of an alternating group by modular additions

We consider the set $V = \mathbb{Z}_q^n$, $n \geqslant 2$, represented by the Cartesian power of the residue ring $\mathbb{Z}_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$, and the integer $q \geqslant 2$. We introduce special substitutions $\pi = \pi_{(i_1,\dots,i_r)} \in S_V$ of the set V. Each of such substitutions is determined by a subset $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ and by linear order introduced on this subset, where i_1 is the low-order number and i_r is the high-order number. The power r of a subset, $1 \leqslant r \leqslant n$, has an individual value for each such substitution π and belongs to the range specified above. Also, there are $r!$ possibilities to determine the linear order. If $\pi_{(i_1,\dots,i_r)}(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ then $y_i = x_i$ for

$i \notin \{i_1, \dots, i_r\}$ and

$$\sum_{t=1}^{r} y_{i_t} q^{r-t} = 1 + \sum_{t=1}^{r} x_{i_t} q^{r-t} (\text{mod } q^r).$$

With the set $\mathcal{S} = \{\pi_1, \dots, \pi_s\}$ of such permutations, we associate the group $G = G_{\mathcal{S}} = \langle \pi_1, \dots, \pi_s \rangle$ generated by this set, and the oriented graph $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{S}}$ on the set of vertices $\{1, \dots, n\}$. If the permutations π_j are determined by the sets of numbers $\left(i_1^{(j)}, \dots, i_{r_j}^{(j)}\right)$, $j = 1, \dots, s$, then the graph Γ contains the edges $i_t^{(j)} \leftarrow i_{t+1}^{(j)}$, $t = 1, \dots, r_j - 1$, $j = 1, \dots, s$. Such edges are oriented from the low-order numbers to the high-order ones.

Theorem. *Suppose that the graph $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{S}}$ is strongly connected, $\mathcal{S} = \{\pi_1, \dots, \pi_s\}$, $q \geqslant 2$, then the group $G = G_{\mathcal{S}} = \langle \pi_1, \dots, \pi_s \rangle$ contains the alternating group A_V of the set V, with the only exception for $q = 2$, $n \geqslant 3$, $r_j \leqslant 2$ for all $j = 1, \dots, s$, when $G_{\mathcal{S}} = AGL(n, 2)$ is the affine group of the set $GF(2)^n$.*

The group $G_{\mathcal{S}}$ coincides with the symmetry group of the set V, if $r_j = n$ for some $j \in \{1, \dots, s\}$, and q is even. The converse theorem is obvious. If the graph $\Gamma_{\mathcal{S}}$ is not strongly connected, then the group $G_{\mathcal{S}}$ is imprimitive.

A main combinatorial part of the theorem proof is devoted to establishing of twice transitivity of the group $G_{\mathcal{S}}$. The completion of the proof is possible due to the classification of finite simple groups and the uniqueness theorem proved by P. Mihailescu in 2003 for a solution of the equation $x^z - y^t = 1$ in integers of large 1, $3^2 - 2^3 = 1$, known as the Catalan hypothesis since 1884.

Application. A color monitor having a resolution $2^{10} \times 2^{10}$ cells (pixels) is today's reality. Each cell has 2^8 shades. A total of 2^{23} "cubes" are allocated to the monitor. Here $V = GF(2)^{2^3}$,

$q = 2$, $n = 2^{23}$. The practice of working with images assumes the potential possibility of obtaining any even substitution from $\left(2^{2^{23}}\right)!/2$ possible variants, and it is desirable to use simple machine operations.

Yu.V. Matiyasevich (yumat@pdmi.ras.ru)
St.Petersburg Department of Steklov Institute of Mathemetics, St.Petersburg, Russia

Approximation of the zeta function via finite Euler products

Consider *finite Euler product*

$$\zeta_m(s) = \prod_{k=1}^{m} (1 - p_k^{-s})^{-1},$$

where $p_1, \ldots, p_m$ are the initial primes, and *finite xi function*

$$g(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}(s-1)\Gamma\bigl(s/2+1\bigr)$$

is the factor from the functional equation. *Modified symmetrized finite xi function*

$$\xi_m^{:=}(s) = s^m(1-s)^m\bigl(\xi_m(s) + \xi_m(1-s)\bigr)$$

trivially satisfies the functional equation $\xi_m^{:=}(s) = \xi_m^{:=}(1-s)$. All poles $q_1, q_2, \ldots$ of this function are simple; let $r_1, r_2, \ldots$ be corresponding residues, so the difference

$$\xi_m^{:\mathrm{reg}=}(s) = \xi_m^{:=}(s) - \sum_{k=1}^{\infty} r_k/(s-q_k).$$

Regularized finite Euler product

$$\zeta_m^{\approx}(s) = \xi_m^{:\mathrm{reg}=}(s)/\bigl(s^m(1-s)^m g(s)\bigr)$$

gives surprisingly good approximations to the values and zeroes of the zeta function.

Example 1. The least (in absolute value) non-real zero of function $\zeta_1^{\approx}(s)$ (which is defined via single Euler factor $(1-2^{-s})^{-1}$) differs from the least non-trivial zero of the zeta function less than by 10^{-6}.

Example 2. The three first Euler factors produce more than 30 correct decimal digits of $\zeta(1/2+100i)$.

For more examples visit `http://logic.pdmi.ras.ru/ yumat/personaljournal/eulereverywhere`.

D. Milićević (dmilicevic@brynmawr.edu)
Bryn Mawr College, Bryn Mawr, USA

Exponential sums in the depth aspect

Many of the principal analytic questions about L-functions, such as the subconvexity estimates, moment evaluations, and nonvanishing of their critical values, at their core rely on estimates of associated exponential sums. In this talk, we will present new estimates for short exponential sums with phases involving p-adically analytic fluctuations. As applications, we obtain subconvexity bounds for Dirichlet and twisted modular L-functions with characters to a high prime power modulus, which are as strong as those available in the t-aspect. From an adelic viewpoint, the analogy between this so-called "depth aspect" and the familiar t-aspect is particularly natural, as one is focusing on ramification at one (finite or infinite) place at a time. Among the tools, we develop p-adic counterparts to Farey dissection, the circle method, and van der Corput estimates. Some of the results are joint work with V. Blomer.

N.G. Moshchevitin (moshchevitin@gmail.com)
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

On irrationality measure functions

For a real α the ordinary irrationality measure function is defined as

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leqslant q \leqslant t,\, q \in \mathbb{Z}} ||q\alpha||, \quad t \geqslant 1$$

(here $||\xi|| = \min_{a \in \mathbb{Z}} |\xi - a|$ is the distance from ξ to the nearest integer). This function is connected with the best approximations to α. Many Diophantine properties of real numbers can be described in terms of the irrationality measure function $\psi_\alpha(t)$. In particular it is convenient to define Lagrange and Dirichlet spectra in terms of the values

$$\liminf_{t \to \infty} t\psi_\alpha(t) \quad \text{and} \quad \limsup_{t \to \infty} t\psi_\alpha(t).$$

Another interesting result is related to oscillation property of the difference $\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$.

In our lecture, we will discuss certain properties of the functions

$$\psi_\alpha^{[2]}(t) = \min_{\substack{(q,p):\ q,p \in \mathbb{Z},\, 1 \leqslant q \leqslant t, \\ (p,q) \neq (p_n, q_n)\, \forall\, n = 0,1,2,3,\dots}} |q\alpha - p|$$

and

$$\psi_\alpha^{[2]*}(t) = \min_{\substack{(q,p):\ q,p \in \mathbb{Z},\, 1 \leqslant q \leqslant t, \\ p/q \neq p_n/q_n\, \forall\, n = 0,1,2,3,\dots}} |q\alpha - p|$$

related to the “second best” approximations and certain properties of the function $\mu_\alpha(t)$ associated with the Minkowski diagonal continued fraction for α.

V.E. Nazaikinskii (nazaikinskii@yandex.ru)
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

On the asymptotics of the counting function and a typical shape of elements of an arithmetic semigroup

We consider a *generalized partition problem*, that is, the problem on the asymptotics as $x \to +\infty$ of the number of solutions $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ in nonnegative integers n_j of the inequality $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \cdots \leqslant x$, where $\lambda_j \to +\infty$ is a given sequence of positive numbers, and also on the probabilities of deviations of a random solution from the Bose–Einstein distribution $\overline{n}_j = (e^{\beta(x)\lambda_j} - 1)^{-1}$, where $\beta(x)$ is determined from the equation $\lambda_1 \overline{n}_1 + \lambda_2 \overline{n}_2 + \cdots = x$. This problem arises in statistical physics as the problem on the distribution of noninteracting Bose particles over energy levels and also plays an important role on other fields.

We present some of the corresponding statements and results obtained by the author in collaboration with V.P. Maslov, D.S. Minenkov, and V.L. Chernyshev for the case in which the counting function $\#\{j\colon \lambda_j \leqslant \lambda\}$ of the sequence λ_j has a power-law or exponential asymptotics as $\lambda \to +\infty$. We also consider a version of the problem in which the inequality is supplemented with the equation $n_1 + n_2 + \cdots = k$, where k tends to $+\infty$ together with x. A comparison with well-known classical results is carried out.

Yu.V. Nesterenko (nester@mi.ras.ru)
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Quasi-modular functions and transcendental numbers

For the first time modular functions for the proof of transcendence of numbers were used in 1935 in joint article of K. Mahler and Y. Popken. They proved that at any complex number τ, $\Im\tau > 0$, the set $E_2(\tau)$, $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$ (Eisenstein series) contains at least one transcendental number. The first transcendence result about values of the modular invariant $j(\tau)$ has been proved in 1937 by Th. Schneider. For the proof he used properties of Weierstrass's elliptic functions, but this way seemed to him unnatural and Schneider formulated a problem to find the modular proof of his theorem. Then Mahler formulated a hypothesis about transcendence at any τ, $\Im\tau > 0$, at least one of two numbers $e^{2\pi i\tau}$ and $j(\tau)$. Now a modular proof of Schneider's theorem is still not found. It is also open the complete hypothesis of Mahler-Manin about values of modular invariant and exponential function a^τ for algebraic $a \neq 0, 1$. In the talk we will discuss some results in this area and some attempts to use others modular and quasimodular functions, about further advances in this area.

R.M. Nunes (ramon.moreiranunes@epfl.ch)
Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Lausanne, Switzerland

The twelfth moment of Dirichlet *L*-functions with smooth moduli

Heath-Brown proved a strong boung for the twelfth moment of Riemann zeta function that has the nice feature of giving the Weyl's estimate as a corollary. It is very natural to ask similar questions for Dirichlet L-functions as we let the moduli q tend to infinity, the so-called q-aspect. The exact analog of Heath-Brown's result for general moduli is not known. Indeed it would improve upon the celebrated Burgess' bound for Dirichlet L-functions. An easier path is to restrict one's attention to numbers having a nice factorization. There are two orthogonal ways of doing so. We can either consider numbers that are large powers of a fixed prime or consider moduli q that are squarefree and all its prime factors are smaller than a small power of q. In this talk we will take the latter route and show how one can prove the exact analog of Heath-Brown's result in this context.

A.A. Panchishkin
(Alexei.Pantchichkine@ujf-grenoble.fr)
Institut Fourier, Grenoble, France

Modular and p-adic methods in the theory of zeta functions

For a prime p and a positive integer m, zeta function $L_F(s)$ is considered, attached to an Hermitian modular form $F = \sum_H A(H)q^H$ on the Hermitian upper half plane $\mathcal{H}_m$ of degree m, where H extends over all semi-integral positive definite hermitian matrices of degree m, i.e. $H \in \Lambda_m(\mathcal{O})$ over the integers $\mathcal{O}$ of an imaginary quadratic field K, where $q^H = \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(HZ))$. Analytic p-adic continuation of their zeta functions is constructed via p-adic measures, bounded or growing. Previously this problem was solved for the Siegel modular forms.

Main result is stated in terms of the Hodge polygon $P_H(t) : [0, d] \to \mathbb{R}$ and the Newton polygon $P_N(t) = P_{N,p}(t) : [0, d] \to \mathbb{R}$ of the zeta function $L_F(s)$, with $d = 4m$.

Main theorem gives a p-adic analytic interpolation of the L values in the form of certain integrals with respect to Mazur-type measures.

These p-adic measures are constructed from the Fourier coefficients of hermitian modular forms, and from certain eigenvalues of Hecke operators on the unitary group. The integrity of such measures is proven under the condition of the equality at the central point $t = d/2$ of $P_H(t)$ and $P_N(t)$. In the case of positivity of the difference $h = P_N(d/2) - P_H(d/2) > 0$ a weaker result is valid on the existence of h-admissible (growing) measures of Amice-Vélu-type which produced an unbounded p-adic analytic interpolation of the L-values of growth $\log_p^h(\cdot)$, using the Mellin transform of the constructed measures.

A.N. Parshin (parshin@mi.ras.ru)
Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia

Adelic approach to zeta-functions of varieties over finite fields

Let X be an algebraic projective smooth variety defined over a finite field $\mathbb{F}_q$. Then one can consider the formal power series

$$\zeta_X(s) = \exp\Bigg(\sum_{m\geqslant 1} |X(\mathbb{F}_{q^m})| q^{-ms}/m\Bigg),$$

If $\dim X = n$ then the series will convergent for $\Re(s) > n$. The main problems are to extend this function of s to the whole s-plane, to locate the singularities and to find the analytic behavior around them. For any n, these problems can be solved by the Grothendieck's cohomological method. In the case, when $n = 1$, there is an adelic method which works also for zeta-functions of the fields of algebraic numbers. We will explain a new version of this method which is purely algebraic and functorial comparing with the classical version going back to Riemann and where one uses a manipulation with formulas. We also discuss how to develop this approach for the case of algebraic surfaces over $\mathbb{F}_q$.

D.A. Popov
Lomonosov Moscow State University, Belozersky Research Institute of Physico-Chemical Biology, Moscow, Russia

On the function $P(x)$

In the talk, we present some recent results concerning the properties of the function $P(x)$, that is, the remainder term in the circle problem. We also formulate some new hypothesis about the behavior of $P(x)$ on the short segments (whose length has order $\asymp \sqrt{x}$). The present attention to such problems is connected with quantum chaos theory and the universality hypothesis.

A.V. Pukhlikov (pukh@liv.ac.uk)
The University of Liverpool, Liverpool, Great Britain

Factorial hypersurfaces

Factoriality is one of the most important properties of algebraic varieties. It is a necessary condition for many techniques of the modern algebraic geometry. The famous Grothendieck's theorem states that complete intersection singularities are factorial if the codimension of the singular set is at least 4. Using this theorem, we estimate the codimension of the complement to the set of factorial hypersurfaces of degree d in $\mathbb{P}^N$ for $d \geqslant 4$, $N \geqslant 7$. One of the applications of these results is the existence of Fano fibre spaces over a higher-dimensional base, every fibre of which is a factorial variety.

A.M. Raigorodskii (mraigor@yandex.ru)
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

On the chromatic numbers of random graphs

In my talk, I suppose to speak about the chromatic numbers of random subgraphs in some graph sequences. First, I will present some classical results on the chromatic numbers of Erdős–Rényi graphs. Then, I will proceed to the discussion of new questions. For example, I will consider a sequence of graphs $G(n, r, s)$, where $n \to \infty$ and $r = r(n)$, $s = s(n)$. The set of vertices of $G(n, r, s)$ consists of all r-subsets of the set $\{1, \ldots, n\}$. Any two vertices are joined by an edge, if the corresponding sets intersect in exactly s elements. Such graphs are related to coding theory, Ramsey theory and combinatorial geometry. I will define random subgraphs $G_p(n, r, s)$ of $G(n, r, s)$, where $p = p(n) \in [0, 1]$ is the probability of keeping any edge in $G(n, r, s)$ independently of each other. I will discuss recent results concerning the chromatic numbers of such random graphs.

Z.Kh. Rakhmonov (zarullo_r@mail.ru)
Juraev Institute of Mathematics, Dushanbe, Tajikistan

Non-principal character sums over shifted primes

I.M. Vinogradov was the first who obtained non-trivial estimates of the sum of values of non-principal character over the sequence of shifted primes. He proved that *if q is an odd prime number, $(l, q) = 1$, χ is a non-principal character modulo q, then*

$$T(\chi) = \sum_{p \leqslant x} \chi(p - l) \ll x^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-1/6} \right).$$

This estimate is non-trivial for $x \gg q^{1+\varepsilon}$ and yields to the asymptotic formula for the number of quadratic residues (non-residues) mod q of the form $p-l$, $p \leqslant x$. The best result here belongs to A.A. Karatsuba. In 1970 he proved that *if q is a prime number, χ is a non-principal character modulo q and $x \geqslant q^{1/2+\varepsilon}$, then the following estimate holds:*

$$T_1(\chi) \ll xq^{-\frac{\varepsilon^2}{1024}}.$$

In 2013, the author obtained non-trivial estimate of $T(\chi_q)$ for composite q and primitive character in the case $q^{5/6+\varepsilon}$. In the talk, we present the following new theorem:

THEOREM. *Let D be a sufficiently large natural number, χ is a non-principal character modulo D, χ_q is a primitive character modulo q that induces character χ, q is a cubefree number, $(l, D) = 1$. Then the following estimate holds*

$$T(\chi) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\chi(n-l) \ll x \exp\left(-0.6\sqrt{\ln D}\right),$$

for $x \geqslant D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ (the constant in $\ll$ depends only on ε).

X. REN (xmren@sdu.edu.cn)
Shandong University, Jinan, People's Republic of China

Hyper-Kloosterman sums of different moduli and applications

Hyper-Kloosterman sums of different moduli appear naturally in Voronoi's summation formula for cusp forms for $GL_m(\mathbb{Z})$. In this talk, we give estimates of Hyper-Kloosterman sum in the case of consecutively dividing moduli. As an application, smooth sums of Fourier coefficients of Maass forms for $SL_m(\mathbb{Z})$ against an exponential function $e(\alpha n)$ are estimated. These sums are proved to have rapid decay when α is a fixed rational number or a transcendental number with approximation exponent $\tau(\alpha) > m$. Non-trivial bounds are proved for these sums when $\tau(\alpha) > (m+1)/2$.

I.S. Rezvyakova (rezvyakova@mi.ras.ru,)
Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia

Zeros of the Epstein zeta-function

I shall talk about the proof of the following result: *the critical line contains a positive proportion of non-trivial zeros of the Epstein zeta-function, corresponding to a binary positive definite quadratic form.* The proof of this result for the function which violates the Riemann hypothesis (it has many non-trivial zeros off the critical line) relies heavily on the methods developed by Atle Selberg. We shall discuss some results, which can be obtained in the theory of L-functions following Selberg's ideas.

A.A. Sedunova (alisa.sedunova@phystech.edu)
Mathematisches Institut, Georg-August Universität Göttingen, Göttingen, Germany

An effective version of the Bombieri-Vinogradov theorem

In the talk, we deal with a new effective version of the Bombieri-Vinogradov theorem. This theorem improves the previous result belonging to F. Dress, H. Iwaniec and G. Tenenbaum [1]. Namely, we prove the following

Theorem. *Suppose that $x \geqslant 4$, $1 \leqslant Q_1 \leqslant Q \leqslant x^{1/2}$ and let*

$l(q)$ denotes the smallest prime divisor of q. Then

$$\sum_{\substack{q \leqslant Q \\ l(q)>Q_1}} \max_{2 \leqslant y \leqslant x} \max_{(a,q)=1} \left| \psi(y;q,a) - \frac{\psi(y)}{\varphi(q)} \right| \ll$$

$$\ll \bigl(xQ_1^{-1} + Qx^{1/2} + x^{95/96} \log x \bigr) (\log x)^3.$$

(Here we get the factor $(\log x)^3$ instead $(\log x)^{7/2}$ from [1]). In the proof, we use a weighted form of Vaughan's identity, allowing a smooth truncation inside the procedure and a technique of Graham [2] related to Selberg's sieve.

[1] F. Dress, H. Iwaniec, G. Tenenbaum, *Sur une somme liée à la fonction de Möbius*. J. Reine Angew. Math. **340** (1983). P. 53 – 58.

[2] S. Graham, *An asymptotic estimate related to Selberg's sieve*. J. Number Theory. **10**:1 (1978). P. 83 – 94.

I.D. Shkredov (ilya.shkredov@gmail.com)
Steklov Mathematical Institute,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Applications of incidences theory to some triple exponential sums

Let χ be a nonprincipal multiplicative character modulo a prime number p. Using the incidences theory over $\mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_p$, we find new bounds for the sums

$$\sum_{a \in A,\, b \in B,\, c \in C} \chi(a+b+c),$$

$$\sum_{a \in A,\, b \in B,\, c \in C,\, d \in D} \chi(a+b+cd), \qquad \sum_{a \in A,\, b \in B,\, c \in C,\, d \in D} \chi(a+b(c+d))$$

over arbitrary sets, and for a trinomial sum

$$\sum_x \chi(x) e_p(ax^k + bx^m + cx^n)\,.$$

J. Steuding (steuding@mathematik.uni-wuerzburg.de)
University of Würzburg, Würzburg, Germany

N. Oswald (oswald@uni-wuppertal.de)
University of Wuppertal, Wuppertal, Germany

Uniqueness Theorems for Zeta-Functions

Dirichlet series and their analytic properties play a central role in analytic number theory. In this talk we are concerned with the distribution of values of Dirichlet series with periodic coefficients, resp. their meromorphic continuations (including Dirichlet L-functions, for example). We prove an analogue of Rolf Nevanlinna's classical five point theorem (from 1926) for this family of functions and answer the question *how many values can two such Dirichlet series share?* Moreover, we discuss the origin of Nevanlinna's value distribution theory and highlight in particular the role played by George Pólya.

D.I. Tolev (dtolev@fmi.uni-sofia.bg)
Sofia University "St. Kliment Ohridsky", Sofia, Bulgaria

On certain additive problems with primes and almost-primes

1) We consider the Diophantine inequality

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c - N| < (\log N)^{-E},$$

where $1 < c < \frac{15}{14}$, N is a sufficiently large real number and $E > 0$ is an arbitrarily large constant. We prove that it has a solution in primes p_1, p_2, p_3 such that each of the numbers $p_1 + 2$, $p_2 + 2$, $p_3 + 2$ has at most $\left[\dfrac{369}{180 - 168c}\right]$ prime factors (here $[t]$ denotes the integer part of t).

2) (Joint work with Zh. Pertov). We consider the Diophantine equation

$$[p^c] + [m^c] = N,$$

where $1 < c < \frac{29}{28}$ and N is a sufficiently large integer. We prove that it has a solution p, m, where p is a prime and m is an almost prime with at most $\left[\dfrac{52}{29-28c}\right] + 1$ prime factors.

K.-M. Tsang (kmtsang@maths.hku.hk)
Hong-Kong University, Hong-Kong

On some mean values for the divisor function and the Riemann zeta-function

Let $\Delta(x)$ and $E(x)$ denote respectively the error terms in the summatory formula for the divisor function and the mean square formula for $\zeta(s)$ on the critical line. In this talk we shall discuss some general mean values for $\Delta(x)$ and $E(x)$. From these mean value results, we observe intrinsic difference between these two functions, which suggests that $E(x)$ is more negative then $\Delta(x)$.

A.N. Vasil'ev (antonvassilyev@mail.ru)
Lomonosov Moscow State University (Kazakhstan branch), Astana, Kazakhstan

On non-Romanoff sequences

The report will deal with the increasing sequences of natural numbers having a logarithmic distribution function which are non-Romanoff sequences. Some sufficient conditions and examples will be give

E.V. Vesalainen (esavesalainen@gmail.com)
Åbo Akademi University, Turku, Finland

Counterexamples to the ℓ-modular secrecy function conjecture

The secrecy function conjecture of Belfiore and Solé for unimodular lattices, which arose from wireless communications using lattice coset coding on gaussian wiretap channels, claims that for an n-dimensional unimodular lattice Γ, the quotient $\vartheta_\Gamma/\vartheta_{\mathbb{Z}^n}$ has, on the positive imaginary axis, a unique global minimum at the symmetry point i. Similarly, for integers $\ell \geqslant 2$, a natural extension of this conjecture would be to claim that for an ℓ-modular lattice, the quotient $\vartheta_\Gamma/\vartheta_{(\ell^{1/4}\mathbb{Z})^n}$ has, on the positive imaginary axis, a unique global minimum at the symmetry point $i/\sqrt{\ell}$. Alas, Ernvall-Hytönen and Sethuraman showed that this is not the case as the behaviour of this quotient for the 4-modular lattice $\mathbb{Z} \oplus \sqrt{2}\,\mathbb{Z} \oplus 2\,\mathbb{Z}$ is the opposite to the conjectured behaviour: there is a unique global maximum at the point $y = 1/2$.

In this talk, we discuss the secrecy function conjecture. In particular, we describe an infinite family of ℓ-modular counterexamples with $\ell \geqslant 2$, constructed from direct products of dilates of $\mathbb{Z}$, for which we show that the behaviour is again opposite to what the extended secrecy function conjecture requires. One of the key ideas is using convexity properties of classical ϑ-functions. The results described are joint work with A.-M. Ernvall-Hytönen.

V.G. Zhuravlev (vzhuravlev@mail.ru)
Vladimir State University, Vladimir, Russia

Simplex-modular algorithm for the decomposition of algebraic numbers into multidimensional continued fractions

We consider a simplex-modular algorithm ($\mathcal{SM}$-algorithm) for the decomposition of algebraic numbers $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ into multidimensional periodic continued fractions. The $\mathcal{SM}$-algorithm is based on the following: 1) the minimal rational simplexes $\mathbf{s}$ that contain the point α; 2) integer unimodular Pisot matrices P_α for which $\widehat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d, 1)$ is an eigenvector.

The $\mathcal{SM}$-algorithm is a flexible algorithm. This algorithm gives the best approximation of order $1/Q_a^{1+\varepsilon}$, where Q_a ($a = 0, 1, 2, \ldots$) are denominators of the convergents and $\varepsilon > 0$ depends on the settings of the $\mathcal{SM}$-algorithm.

Подписано в печать 11.05.2017.
Тираж __ экз.

ПО “ПОЛИГРАФФ”