Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской зимней математической школы

УДК 517.53 (97; 98)

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 13-01-06002

Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж: ВГУ, 2013. 310 с.

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской зимней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем теории функций, оптимального управления, теории игр, качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

ISBN

INVERSE PROBLEM FOR A NONLINEAR EQUATION OF THE THIRD ORDER

Yuldashev T.K. (Krasnoyarsk)
tursunbay@rambler.ru

In the domain $D \equiv D_T \times \mathbb{R}$ we consider the following equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y) u(s,y) dy ds \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t,x) = p(t) u(t,x) + f(t,x,u(t,x)) \qquad (1)$$

with initial value conditions

$$u(t,x)_{|t=0} = \varphi_1(x), \ \frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_{k+1}(x), \ x \in \mathbb{R}, \ k = 1,2 \qquad (2)$$

and supplementary condition

$$u(t,x)_{|x=x_0} = \psi(t), \qquad (3)$$

where $f(t,x,u) \in C(D \times \mathbb{R})$, $\varphi_i(x) \in C(\mathbb{R})$, $i = \overline{1,3}$, $\psi(t) \in C^3(D_T)$, $\psi(0) \neq 0$, $p(t), u(t,x)$ are unknown functions, $a = a\left(t, x, \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} K_2(s,y) u(s,y) dy ds \right) \in C^{2,2}(D \times \mathbb{R})$, $0 < K_i(t,x) \in C(D)$, $i = 1,2$, $D_T \equiv [0,T]$, $0 < T < \infty$.

Theorem *Let be fulfilled the following conditions*:

1. $\|\varphi_1(x)\| + \|\varphi_2(x)\| T + \|\varphi_3(x)\| \frac{T^2}{2} + \max_{t \in D_T} \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \|f(s,x,0)\| ds \leqslant \Delta < \infty$;

2. $\varphi_i(x) \in Lip\{L_{i|x}\}$, $0 < L_i = const, i = \overline{1,3}$;

3. $a(t,x,u) \in Lip\{L_4(t)_{|u}\}$, $0 < \int_0^t L_4(s) ds < \infty$;

4. $f(t,x,u) \in Lip\{L_5(t)_{|u}\}$, $0 < \int_0^t L_5(s) ds < \infty$;

5. $\rho < 1$, $\rho = L_1 \max_{t \in D_T} \int_0^t L_4(s) \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} K_2(\theta, y) dy d\theta ds +$

$$+ \left(L_2T^2 + L_3\frac{T^3}{2}\right)\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)dyds +$$
$$\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\left(\frac{\|g'''(s)\|}{\|\psi(s)\|} + L_5(s)\right)ds.$$

Then there exists a unique solution of the inverse problem (1)-(3) *in D.*

РАЗМЕРНОСТЬ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И НУЛЕВЫЕ МНОЖЕСТВА ПЕНЛЕВЕ[1]

Абанин А.В. (Владикавказ, Ростов-на-Дону)
abanin@math.rsu.ru

В докладе будут представлены совместные с Фам Чонг Тиеном результаты автора [1] о структуре конечномерных пространств голоморфных в области функций с равномерными весовыми оценками и их приложениях к решению нескольких известных задач. В частности, описан класс областей, для которых нет конечномерных пространств указанного типа, кроме тривиального. Оказалось, что ответ обусловлен тем, является ли дополнение области до расширенной комплексной плоскости нулевым множеством Пенлеве или нет. Приводятся примеры, показывающие, что выделенный класс областей нельзя расширить. Получены новые критерии компактности индуктивных спектров, формулируемые в естественных терминах и не использующие в отличие от предшествующих работ других авторов (K. D. Bierstedt, J. Bonet, P. Domanski, D. Vogt и др.) никаких ограничений.

Литература

Abanin A.V., Pham Trong Tien. Painlevè null sets, dimension and compact embedding of weighted holomorphic spaces // Studia Math.— 2013 (принята к печати)

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашения № 14.A18.21.0356 и № 8210)

ТЕОРЕМА ДЕЛЕНИЯ И ВЫМЕТАНИЕ МАСС СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ[1]

Абанина Д.А., Кузьминова А.В. (Владикавказ, Ростов-на-Дону)

abanina@math.rsu.ru

Пусть A и B — некоторые пространства целых функций. Мультипликатором пары A, B называется такая функция μ, что $\mu A \subset B$. Мультипликатор μ называется делителем, если из того, что $g \in B$, $\frac{g}{\mu} \in H(\mathbb{C})$, вытекает, что $\frac{g}{\mu} \in A$. Под теоремой деления понимается результат об описании множества всех делителей пары A и B.

В работе рассматривается следующее нерадиальное пространство целых функций

$$H^{1,\infty}_{u,v} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{q_n u(|z|)+nv(|\operatorname{Im} z|)}} < \infty \right\}.$$

Здесь $0 < q_n \uparrow 1$; u и v — некоторые весовые функции. Для этого пространства получена теорема деления.

Теорема. *Пусть весовая функция v удовлетворяет условию (A). Для того чтобы нетривиальный мультипликатор пространства $H^{1,\infty}_{u,v}$ был его делителем, необходимо и достаточно, чтобы*
$\forall\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists r_0 > 0 \,\big|\, \forall x \in \mathbb{R}$ *с* $|x| \geqslant r_0 \quad \exists t \in \mathbb{R}:$

$$|t - x| \leqslant \delta v^{-1}\big(u(x)\big) \quad \text{и} \quad |\mu(t)| \geqslant e^{-\varepsilon u(t)}.$$

Условие (A) на вес v, при котором установлен данный результат, имеет следующий вид:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists R_0 > 0 : \forall R \geqslant R_0\,,\ \forall z \in K_{0,R}\ V(z) - v(|\operatorname{Im} z|) \leqslant (1+\varepsilon)V(0)\,.$$

Здесь $K_{0,R} = \{z : |z| \leqslant R\}$, $V(z)$ — функция, полученная из $v(|\operatorname{Im} z|)$ процедурой выметания масс на границу круга $K_{0,R}$. В работе указываются классы весов v, для которых условие (A) выполнено, а также приводятся примеры функций v, для которых оно нарушено.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашения № 14.A18.21.0356 и № 8210)

О ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССОМ, ОПИСЫВАЕМЫМ УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА

Абдукаримов М.Ф., Крицков Л.В. (Москва)

mahmadsalim_ 86@mail.ru, kritskov@cs.msu.su

Для процесса, описываемого уравнением Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом $q(x,t)$:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = 0, \quad x \in [0,l],\, t \in [0,T], \tag{1}$$

рассмотрены задачи граничного управления, производимого: 1) смещением на одном конце при закрепленном втором и 2) смещениями на двух концах. Решение уравнения понимается в обобщенном смысле (см. [1]), и предполагается, что коэффициент $q(x,t)$ в (1) ограничен и измерим.

Для первой из этих задач доказано, что при критическом времени $T = 2l$ существует единственная граничная функция $\mu(t) = u(0,t) \in W_2^1[0,2l]$, которая при произвольных $\{u(x,0) = \varphi(x) \in W_2^1[0,l],\ u_t(x,0) = \psi(x) \in L_2[0,l]\}$ и финальных $\{u(x,2l) = \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l],\ u_t(x,2l) = \psi_1(x) \in L_2[0,l]\}$ состояний, удовлетворяющих лишь условиям закрепления $\varphi(l) = 0$ и $\varphi_1(l) = 0$, переводит рассматриваемый процесс из начального состояния в финальное.

Для второй задачи доказано, что при критическом времени $T = l$ для существования единственных граничных управлений $\mu(t) = u(0,t) \in W_2^1[0,l]$ и $\nu(t) = u(l,t) \in W_2^1[0,l]$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$B\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right) + \int\limits_0^l \int\limits_\tau^{l-\tau} K(\xi,\tau)B(\xi,\tau)\,d\xi d\tau = 0,$$

где $B(x,t) = \varphi(x-t) + \varphi(x+t) + \int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi - \varphi_1(x-t+l) - \varphi_1(x+t-l) + \int\limits_{x+t-l}^{x-t+l}\psi_1(\xi)d\xi$, а ядро $K(\xi,\tau)$ вычисляется через $q(\xi,\tau)$.

Литература

1. *Ильин В. А.* Избранные труды. М.: «МАКС Пресс», 2008. Т. 2. — 692 с.

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Авдеева О.И. (Воронеж)
avdeeva.olga.official@gmail.com

Пусть $A = (a_{ij})$ - вещественная или комплексная квадратная n×n матрица и $\lambda_1(A)$,$\lambda_2(A)$,..., $\lambda_n(A)$ полный набор ее собственных значений. Матрица A называется матрицей Ляпунова, если

$$Re\lambda_i(A) < 0 \text{ или } Re\lambda_i(A) = 0, \text{ j=1...n},$$

причём в последнем случае нулевые и чисто мнимые собственные значения имеют лишь простые элементарные делители.

Важность этого определения вытекает из следующего утверждения: система с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

устойчива в смысле Ляпунова, т.е.

$$\left|e^{tA}\right| \leqslant C,\ 0 \leqslant t < +\propto, \tag{2}$$

тогда и только тогда, когда матрица A является ляпуновской.

Имеет место следующий критерий (сравнимый с критерием Севастьянова - Котелянского в [1, с.371-372]).

Теорема 1. *Для того чтобы вещественная внедиагонально неотрицательная матрица $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$, была матрицей Ляпунова, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. все главные миноры матрицы $(-A)$ были неотрицательными:

$$(-1)^p A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geqslant 0,\ 1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n,\ p = 1\dots n; \tag{3}$$

2. ранг матрицы A равен ее главному рангу:

$$rangA = main\ rangA. \tag{4}$$

При этом ранг матрицы понимается в обычном смысле, а под главным рангом понимается ранг, подсчитанный с помощью только главных миноров.

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. — 576 с.

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ В СИММЕТРИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Акишев Г. (Караганда)

akishev@ksu.kz

$X(\varphi)$ – симметричное пространство 2π – периодических функций на $[0, 2\pi]$, с фундаментальной функцией φ (см. [1]). $\|f\|_X$ означает норму элемента $f \in X(\varphi)$. Для функции $\varphi(t), \quad t \in [0, 1]$ положим

$$\alpha_\varphi = \underline{\lim}_{t\to+0}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}, \qquad \beta_\varphi = \overline{\lim}_{t\to+0}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}.$$

Введем обозначения $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$, для $n = 1, 2, 3, ..$ и χ_Ω – характеристическая функция множества Ω.

Теорема 1. *Пусть* $1 < \alpha_\varphi, \beta_\varphi < 2$. *Если* $a_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, ...$ *и функция*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta a_k|)\chi_{(\frac{\pi}{n+1},\frac{\pi}{n}]}(x) \in X(\varphi),$$

то найдется функция $f \in X(\varphi)$ *такая, что* $f(x) \backsim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ *и*

$$\|f\|_X \leqslant C\|\sum_{n=1}^{\infty} n(\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta a_k|)\chi_{(\frac{\pi}{n+1},\frac{\pi}{n}]}\|_X.$$

Теорема 2. *Если* $\{a_n\} \in RBVS$, *([2]) то* $f \in X(\varphi)$ *тогда и только тогда когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \chi_{(\frac{\pi}{n+1},\frac{\pi}{n}]}(x) \in X(\varphi).$$

В случае $X(\varphi) = L_p$ из теоремы 1 следует результат Боаса. Для $a_n \downarrow 0$ при $n \to +\infty$ теорема 2 ранее доказана В.А. Родиным.

Литература

1. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.*, Интерполяция линейных операторов. М. 1978.- 400 с.

2. *Leindler L.*, Embedding results pertaining to strong approximation of Fourier series II, Anal. Math., 1997, Vol. 23 - P. 223 – 240.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК научных проектов.

О СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Аль-Кхазраджи Сундус Х.М. (Воронеж)
saohhatem@yahoo.com

В данной работе представлен итерационный способ построения фрактальных поверхностей [1],[2]. Отличительной особенностью, которого является возможность создавать двупараметрическое семейство фрактал.

Алгоритм построения имеет вид:

1. Квадрат со стороной равной 1 покрывается меньшими квадратами со стороной $\frac{1}{a}$, $a \in \mathbb{N}$. Для полного покрытия используется a^2 экземпляров.

2. Из этого покрытия формируется образец путём удаления из покрытия k квадратов. Общее число квадратов составляющих образец, таким образом, составляет $a^2 - k$.

3. Каждый из оставшихся квадратов разбиваем a^2 меньших квадратов и из каждого разбиения удаляем k квадратов по сформированному образцу. Таким образом, полученный объект будет состоять из $(a^2 - k)^2$ квадратов со стороной $\frac{1}{a^2}$.

4. Повторяя эту процедуру к каждому из полученных квадратов и получим $(a^2 - k)^3$ квадратов со стороной $\frac{1}{a^3}$.

Для вычисления фрактальной размерности используется формула

$$D = -\frac{\ln N}{\ln 2} = \frac{\ln(a^2 - k)^n}{\ln a^n} = \frac{\ln(a^2 - k)}{\ln a}$$

при $k = 0$ (квадраты не выбираются) размерность равна 2, а при $k = a^2 - 1$ (сохраняется только один квадрат) размерность равна 0.

Варьируя параметры a и k, получаем счетное множество значений в отрезке [0,2].

Конструкция легко обобщается на единичный куб в m-мерном пространстве.

Результаты компьютерного эксперимента, построенного про данному алгоритму приведены на следующих рисунках.

Литература

[1] Р.М. Кроновер Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. Москва: Постмаркет, 2000.— 352 с.

[2] Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 128 с.

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ[1]

Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И. (Алматы)

muvasharkhan@gmail.com

Во многих приложениях возникает необходимость решения модельных задач для уравнений нестационарного переноса в областях с подвижной границей (в нецилиндрических областях). Когда размер области зависит от времени, либо область вырождается в некоторых точках, не всегда удается согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы области теплопереноса.

Вопрос об исследовании краевых задач в области с вырождением в начальный момент времени не исчерпал своей актуальности. Поиски в этом направлении имеют активное продолжение.

В области $G = \{(x;\ t): \quad t > 0, \quad 0 < x < t\}$ найти решение граничной задачи

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \\ u(x,\ t)|_{x=0} = v(t), \quad u(x,\ t)|_{x=t} = w(t), \end{cases} \tag{1}$$

где функции $v(t)$ и $w(t))$ связаны соотношением

$$w(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} v(\tau) d\,\tau. \tag{2}$$

Равенство (2) имеет место и для функций $v(t) \equiv 0,\ w(t) \equiv 0$.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Граничная задача (1) при условии (2) имеет единственное нетривиальное решение*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \ \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \ \nu_0(\tau)\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{x-\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \ \exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi_0(\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

[1]Работа выполнена по Гранту № 264 (23.02.2012) Министерства образования и науки Республики Казахстан

которое не зависит от функций $v(t)$ и $w(t)$, и где

$$\nu_0(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi_0(\tau)\, d\tau,$$

функция $\varphi_0(t)$ определяется по формуле

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)\right],$$

причем, решение (3) принадлежит классу

$$[\gamma(x,t)]^{-1} \cdot u(x,t) \in L_\infty(G),$$

где

$$\gamma = \max\left[\frac{\sqrt{t}}{t-x} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2 t}\right\};\ \exp\left\{\frac{t-x}{a^2}\right\}\right],$$

$$\gamma(x,t) \geqslant 1,\ \{x,t\} \in G.$$

Из теоремы 1 мы получаем следующее

Следствие. *Классом единственности граничной задачи (1) является*

$$[\gamma_\varepsilon(x,t)]^{-1} \cdot\ u(x,t) \in L_\infty(G),$$

где

$$\gamma_\varepsilon = \max\left[\left(\frac{\sqrt{t}}{t-x}\right)^{1-\varepsilon} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2 t}\right\};\ \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)(t-x)}{a^2}\right\}\right],$$

$$\varepsilon > 0,\ \gamma_\varepsilon(x,t) \geqslant 1,\ \{x,t\} \in G.$$

Граничная задача (1) сводится к исследованию особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $\varphi_0(t)$, для решения которого используются результаты работы [1].

Литература

Амангалиева М. М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.// Дифференц. уравнения, 2011. Т. 47, №2. С.231–243.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ[1]

Андрианова А.А.(Казань)
aandr78@mail.ru

Для решения задач условной оптимизации нахождения $f^* = \min\{f(x), x \in D\}$, где $D = \{x : x \in R_n, g(x) \leqslant 0\}$, с заданной точностью $\varepsilon > 0$ с помощью алгоритмов из класса методов последовательной безусловной оптимизации внутренней и внешней точки предлагается использовать единый подход, связанный с аппроксимацией допустимого множества - замены множества D на вложенное в него (для методов внешней точки) или окаймляющее его (для методов внутренней точки). Доказано, что проведение "классических"алгоритмов указанных методов для модифицированной таким образом задачи позволяет за конечное число итераций получить решение или псевдорешение заданной точности исходной задачи. В качестве критерия остановки вычислений используется условие попадания итерационной точки в "полоску"($D \setminus D_1$ для методов внешней точки, $D_1 \setminus D$ для методов внутренней точки).

Для того чтобы множество D_1 можно было использовать в данной процедуре, требуется, чтобы D_1 являлось подходящей аппроксимацией допустимого множества ([1]). Получены два способа построения подходящей аппроксимации допустимого множества, например, для методов внешней точки:

1) Для вида $D_1 = \{x : x \in R_n, g(x) + p \leqslant 0\}$ аппроксимация будет подходящей, если $0 < p \leqslant -\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\}$. Здесь X^*_ε - множество ε-решений исходной задачи.

2)Для вида $D_1 = \{x : x \in R_n, V(x) \leqslant \gamma p\}$, где $V(x)$ - функция штрафа для $\{x : x \in R_n, g(x) + p \leqslant 0\}$, аппроксимация будет подходящей, если $0 < p \leqslant -\frac{1}{1-\gamma}\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\}$ при $\gamma \in (0; 1)$.

Литература

Андрианова А.А. О применении штрафной функции при построении аппроксимации допустимого множества в задачх оптимизации// Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Девятой Всероссийской конференции. - Казань: Отечество, 2012. - с.23 - 27.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00728)

О ПОВЕДЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КРАТНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ

Антонов Н.Ю. (Екатеринбург)
Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Пусть d — натуральное число, $\mathbf{n} = (n^1, n^2, ..., n^d)$ — d-мерный вектор с неотрицательными целочисленными координатами, функция f интегрируема по Лебегу на d-мерном торе $[0, 2\pi)^d$. Обозначим через $S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in [0, 2\pi)^d$, $\mathbf{n}$-ю прямоугольную частичную сумму (кратного) тригонометрического ряда Фурье функции f. Пусть $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — неубывающая функция. Через $\varphi(L)_{[0,2\pi)^d}$ обозначим множество всех определенных на $[0, 2\pi)^d$ измеримых по Лебегу вещественнозначных функций f, таких, что $\varphi(|f|)$ интегрируема на $[0, 2\pi)^d$.

Пусть $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность d-мерных векторов с неотрицательными целочисленными координатами: $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, ..., n_k^d)$. В докладе планируется обсудить вопрос о поточечном поведении с точностью до множества меры нуль последовательностей $\{S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})\}_{k=1}^{\infty}$ в зависимости от принадлежности функции f к классам $\varphi(L)_{[0,2\pi)^d}$.

Если последовательность $\{\mathbf{n}_k\}$ представима в виде

$$n_k^j = \alpha_j m_k + O(1), \quad k \geqslant 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant d, \qquad (1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ — вектор с положительными координатами, а $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, то [1] для $f \in L(\ln^+ L)^{d-1}_{[0,2\pi)^d}$ справедлива оценка

$$S_{\mathbf{n_k}}(f, \mathbf{x}) = o(\ln k) \quad \text{ п.в.},$$

а для $f \in L(\ln^+ L)^d(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)_{[0,2\pi)^d}$ последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})$ сходится почти всюду [2]. В случае $\varphi(L)_{[0,2\pi)^d} = L_{[0,2\pi)^d}$ справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность d-мерных векторов, удовлетворяющих условию (1), $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что*

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(\ln m)^{d-2}}{m\, \lambda_m} < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in L_{[0,2\pi)^d}$ *для почти всех* $\mathbf{x} \in [0, 2\pi)^d$ *справедлива оценка*

$$S_{\mathbf{n_k}}(f, x) = o(\lambda_{m_k} \ln k).$$

Предполагается также рассмотреть поведение последовательностей прямоугольных сумм Фурье для $\{\mathbf{n}_k\}$ произвольного вида в случае $d = 2$.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН "Современные проблемы теоретической математики" при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-Т-1-1003/5), а также при поддержке РФФИ (проект 11-01-00347) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011).

Литература

1. *Антонов Н.Ю.* О скорости роста последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Труды Института математики и механики УрО РАН. Т.11, №2. 2005. С.10–29.

2. *Антонов Н.Ю.* О сходимости почти всюду последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т.14, № 3. С. 3–18.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ОПЕРАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВ

Аршава Е.А. (Харьков)
elarshava@mail.ru

На основе полученных в работах [1-4] результатов рассмотрим решение задачи фильтрации нестационарного случайного процесса.

Пусть интегральный оператор имеет вид

$$SG = \int_0^{\omega} K(x,t)G(t,\tau)dt, \tag{1}$$

где $K(x,t) = g(x-t)e^{\frac{-\alpha(x+t)}{2}} + f(x+t)$ - корреляционная функция случайного входного процесса, $f(x+t)$-эрмитово неотрицательна,

τ-фиксированный параметр. Интегральные операторы такого вида встречаются при решении задачи фильтрации нестационарного случайного сигнала на конечном интервале [5]. Оператор (1) можно записать в виде

$$SG = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx}\right)\int\limits_0^\omega S(x,t)G(t,\tau)dt,$$

где $S(x,t) = g_1(x-t)e^{\frac{-\alpha(x+t)}{2}} + f_1(x+t)$ - ядро оператора S.

Пусть $S(x,t) = \frac{sign(x-t)}{\nu}e^{-\nu|x-t|}e^{\frac{-\alpha(x+t)}{2}} + e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)(x+t)}$. Тогда

$$M_1(x) = S(x,0) = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)x},$$

$$M_2(x) = S'(x,0) = \left(-1-\frac{\alpha}{2\nu}-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)x},$$

$$M_3(t) = -S(0,t) = \left(\frac{1}{\nu}-1\right)e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)t},$$

$$M_4(t) = -S'(0,t) = \left(1+\frac{\alpha}{2\nu}-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)t}.$$

Решая уравнения

$$\begin{array}{lll} S^*P_1 = 1, & S^*P_2 = M_3^*(t), & S^*P_3 = M_4^*(t), \\ S^*P_4 = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}, & SQ_1 = M_1(x), & SQ_2 = 1, \\ SQ_3 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}, & SQ_4 = M_2(x). & \end{array}$$

в классе функций $f(x) = \gamma\delta(x)+\beta\delta(\omega-x)+g(x)$, где $g(x)\in L_2(0,\omega)$, получаем

$$P_1(t) = \frac{\nu}{\alpha}e^{\alpha t} + \frac{2\nu}{\alpha(\nu-1)}\left(\frac{\nu}{\alpha-2\nu}-\frac{1}{\alpha+2\nu}\right)\delta(t)+$$

$$+\frac{2\nu}{\alpha(2\nu-\alpha)}e^{\alpha\omega}\delta(\omega-t), \qquad P_2(t) = \frac{4}{\alpha^2-4\nu^2}\delta(t),$$

$$P_3(t) = \frac{4\nu}{(\nu-1)(4\nu^2-\alpha^2)}\left(1+\frac{\alpha}{2\nu}-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)\delta(t),$$

$$P_4(t) = \frac{\nu}{\alpha^2}e^{\alpha t} + \frac{2\nu}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha+2\nu}-\frac{e^{\alpha\omega}}{\alpha-2\nu}\right)\delta(\omega-t) + \frac{\nu}{\alpha^2}+$$

$$+\frac{8\nu^2(\nu+1)}{\alpha^2(\alpha^2-4\nu^2)(\nu-1)}\delta(t), \qquad Q_1(t)=\frac{4}{4\nu^2-\alpha^2}\delta(t),$$

$$Q_2(t)=-\frac{\nu}{\alpha}e^{\alpha t}-\frac{2\nu}{\alpha(\nu+1)}\left(\frac{1}{\alpha+2\nu}+\frac{1}{\alpha-2\nu}\right)\delta(t)+$$

$$+\frac{2\nu}{\alpha(\alpha-2\nu)}e^{\alpha\omega}\delta(\omega-t),$$

$$Q_3(t)=-\frac{\nu}{\alpha^2}e^{\alpha t}+\frac{2\nu}{\alpha^2}\left(\frac{e^{\alpha\omega}}{\alpha-2\nu}-\frac{1}{\alpha+2\nu}\right)\delta(\omega-t)-$$

$$-\frac{\nu}{\alpha^2}+\frac{8\nu^2(\nu-1)}{\alpha^2(4\nu^2-\alpha^2)(\nu+1)}\delta(t),$$

$$Q_4(t)=\frac{4\nu}{(\nu+1)(4\nu^2-\alpha^2)}\left(-1-\frac{\alpha}{2\nu}-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)\delta(t).$$

Литература

1. *Аршава Е.А., Янцевич А.А.* Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений. // Дифференциальные уравнения. - Минск, 1996. - Т.32, №10. - С. 1427-1428.

2. *Аршава Е.А.* Об одном классе интегральных уравнений со специальной правой частью. // Труды 5-й международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений": в двух томах. - Т.1. Математический анализ. - Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. - С. 25 - 29.

3. *Аршава Е.А.* Обращение интегральных операторов на основе обобщенных коммутационных соотношений. // Материалы Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы". - Воронежский государственный университет, 2011.- С.19-24.

4. *Аршава Е.А.* Обращение векторных интегральных операторов.// Материалы Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач". - Воронежский государственный университет, 2011.- С.16-21.

5. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. - М.: ГТТИ, 1957.

ВЕСОВОЕ НЕРАВЕНСТВО ХИНЧИНА В СИММЕТРИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Асташкин С.В. (Самара)

astash@samsu.ru

Пусть $0 < p < \infty$. Ввиду классического неравенства Хинчина существуют константы $A_p, B_p > 0$ такие, что для любой $a = (a_i) \in \ell^2$ имеем: $A_p\|a\|_2 \leqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^\infty a_i r_i(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \leqslant B_p\|a\|_2$, где $\|a\|_2 := \left(\sum_{i=1}^\infty a_i^2\right)^{1/2}$, а r_i — функции Радемахера, т.е. $r_i(t) := \operatorname{sign}\sin(2^i\pi t)$, $t \in [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$.

В 2011 году в [1] был доказан следующий весовой вариант этого неравенства: если w — "вес" на $[0,1]$, удовлетворяющий условиям: (a) $w \in L^q$ для некоторого $q > p$ и (b) $m(\operatorname{supp}(w)) > 2/3$, то существует константа $C > 0$, зависящая от p и w, такая, что для каждой $a = (a_i) \in \ell^2$

$$C^{-1}\|a\|_2 \leqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^\infty a_i r_i(t)\right|^p |w(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant C\|a\|_2. \qquad (1)$$

Как оказалось, последнее утверждение может быть усилено в различных направлениях. Во-первых, условия (a) и (b) могут быть заменены на существенно более слабые: $w \in L^p(\log L)^{1/2}$ и $m(\operatorname{supp}(w)) > 1/2$, которые в определенном смысле точны. Во-вторых, выявлен несколько неожиданный факт существования "весов" w с носителями сколь-угодно малой меры, для которых справедливо (1). И наконец, найдены достаточно широкие условия, при которых весовое неравенство Хинчина выполнено в симметричном пространстве.

В основу доклада положены результаты, полученные недавно совместно с G. Curbera [2].

Литература

[1] *M. Veraar,* On Khintchine inequalities with a weight, *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (2011) 4119-4121.

[2] *S.V. Astashkin and G.P. Curbera,* A weighted Khintchine inequality, *Rev. Mat. Iberoamericana* (принято в печать).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12–01–00198а)

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА Р-МАТРИЦЫ ПРИ РЕШЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА НА ГРАФЕ

Афанасенкова Ю.В., Гладышев Ю.А. (Калуга)
dvoryanchikova_ y@mail.ru

Решение нестационарных задач теплопроводности для системы стержней приводит к необходимости построить решения системы уравнений определенных на ребрах графа

$$a_1(x)\frac{d}{dx}\left(a_2(x)\frac{du^{(i)}}{dx}\right)+l_i^2u^{(i)}=0, \quad i=1,2,...B. \tag{1}$$

удовлетворяющих нулевым граничным условиям на ∂G и условием согласования на внутренних вершинах. Здесь постоянная

$$l_i^2=a_i^2\lambda_r^2+o_i^2k^2-\chi_i, \tag{2}$$

где χ_i, a_i - величины зависящие от физических характеристик стержня, λ_r - собственное значение гармоники Фурье, а k - величина произвольная выбранная так, чтобы $l^2>0$. Величины $a_1(x), a_2(x)$ определяют геометрию графа.

Уравнения (1) только знаком отличаются от соответствующего уравнения для стационарных процессов теплопроводности

$$a_{2i}(x)\frac{d}{dx}\left(a_{1i}(x)\frac{dT^{(i)}}{dx}\right)-m_i^2T^{(i)}=0, \quad i=1,2,...B. \tag{3}$$

и путем замены $m_i=il_i$ переходит в (1). Все условия согласования остаются неизменными. Поэтому аналитический аппарат метода Р-матрицы остается в силе [1].

Основной результат метода Р-матрицы состоит в установлении связи между потоками J_i и температурами T_i открытых вершин при стационарном режиме

$$J_i=\sum P_{ik}T_k.$$

В случае нестационарной задачи $T_k=0$, но потоки на открытых вершинах J_i отличны от нуля. Последнее возможно только если все элементы P_{ik} матрицы потоков стремятся к бесконечности. Это требование приводит к условиям для собственных значений.

Литература

1. *Афанасенкова Ю.В., Гладышев Ю.А.* Об одной форме метода Р-матрицы при изучении процесса теплопроводности в системах стержней. Воронеж:Издательско-полиграфический центр Воронеж. гос. ун-та, 2012. - 313 с.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Афонина (Калабухова) С.Н. (Воронеж)

Sv-tik.86@mail.ru

В работе [1] были изучены некоторые приложения уплотняющих возмущений замкнутых сюръективных операторов в теории дифференциальных уравнений. Рассмотрим еще одно.

Пусть E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый линейный сюръективный оператор, $B : D(B) \subset E_1 \to E_3$ – замкнутый линейный оператор, подчиненный оператору A (см. [2]). Пусть $x_0 \in D(A)$ – некоторая точка, $B_R[x_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0. Рассмотрим вполне непрерывное отображение $f_1 : [0, T] \times B_R[x_0] \to E_2$ и непрерывное отображение $f_2 : [0, T] \times E_3 \to E_2$, являющееся липшицевым по второму аргументу, то есть существует число $m > 0$ такое, что для любого $t \in [0, T]$ и любых $x, y \in E_3$ выполнено неравенство

$$||f_2(t, x) - f_2(t, y)|| \leqslant m||x - y||.$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$(Ax(t))' = f_1(t, x(t)) + f_2(t, Bx(t)), \tag{1}$$

$$A(x(0)) = Ax_0. \tag{2}$$

Решением задачи (1), (2) на промежутке $[0, h]$, $0 < h \leqslant T$ будем называть непрерывную функцию x_*, определенную на этом промежутке такую, что функция $A(x_*(t))$ является дифференцируемой, то есть

$$(Ax_*(t))' = f_1(t, x_*(t)) + f_2(t, Bx_*(t))$$

и $A(x_*(0)) = Ax_0$.

Теорема 1. *При сделанных предположениях существует число $h_0 > 0$ такое, что задача (1), (2) имеет решение на промежутке $[0, h_0]$.*

Литература

1. Gel'man B.D., Kalabukhova S.N. On Condensing Perturbations of Closed Linear Surjective Operators/ B.D.Gelman, S.N. Kalabukhova// Global and Stochastic Analysis. – 2012. – Vol.2, №1.

2. Калабухова С.Н. Об отображениях, уплотняющих относительно замкнутого оператора/ С.Н. Калабухова// Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2011. – Т.16. – Вып.4. – С. 1092–1094.

ПОСТРОЕНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Баев А.Д., Давыдова М.Б., Садчиков П.В. (Воронеж)

alexsandrbaev@mail.ru

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha^/(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right)\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$, определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty\left(R^1_+\right)$. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье $F_{\tau\to\eta}$ следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, где $u_\alpha(\tau) = \left.\sqrt{\alpha(t)}u(t)\right|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}$,что даёт возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, и рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \left.\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\right|_{\tau=\varphi(t)}$.

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения

$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1,2,...,$ где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $\left|\alpha^{/}(t)\alpha^{-\nu}(t)\right| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 = s_1(\nu)$.

С помощью преобразования F_α и преобразования Фурье $F_{x\to\xi},\ x \in R^1$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле $K(x,t,D_x,D_{\alpha,t})\,v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha\left[\lambda(x,t,\xi,\eta)\,F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]\right]$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(x,t,\xi,\eta)$ принадлежит классу символов $S^m_\alpha(R^1\times\Omega\times R^1\times R^1)$, $m \in R^1$, $\Omega \subseteq (0;+\infty)$, $x \in R^1$, $t \in (0;+\infty)$, $\quad \xi \in R^1$, $\eta \in R^1$, если $\lambda(x,t,\xi,\eta) \in C^\infty\left(\Omega\times R^1\times R^1\times R^1\right)$ и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^\tau}{\partial x^\tau}\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m\frac{\partial^l}{\partial\xi^l}\frac{\partial^p}{\partial\eta^p}\lambda(x,t,\xi,\eta)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{\tau,m,l,p}\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-l-p)},$$

где $\tau,m,l,p = 0,1,2,...$; $\quad c_{\tau,m,l,p} > 0$ - некоторые константы, не зависящие от

Определение 2. Сопряженным оператором к весовому п. д. о. $P(x,t,D_x,D_{\alpha,t})$ назовем оператор $P^*(x,t,D_x,D_{\alpha,t})$, удовлетворяющий равенству

$$(P(x,t,D_x,D_{\alpha,t})u(x,t),v(x,t))_{L_2(R^n_+)} =$$

$$= (u(x,t),P^*(x,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t))_{L_2(R^n_+)}$$

для всех $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, $u(x,t) \in L_2(R^n_+)$ таких, что $P(x,t,D_x,D_{\alpha,t})u(x,t) \in L_2(R^n_+)$.

Здесь $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $L_2(R^n_+)$.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $p(t,\xi,\eta) \in S^m_\alpha(\Omega)$, $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $m \in R^1$. Тогда оператор $P^*(t,D_x,D_{\alpha,t})$, сопряженный к весовому п. д. о. $P(t,D_x,D_{\alpha,t})$ с символом $p(t,\xi,\eta)$, является весовым псевдодифференциальным оператором с символом $p^*(t,\xi,\eta) \in S^m_\alpha(\Omega)$. Причём справедливо соотношение

$$p^*(t,\xi,\eta) - \sum_{j=0}^{N-1}\frac{(i)^j}{j!}(\alpha(t)\partial_t)^j\partial^j_\eta\bar{p}(t,\xi,\eta) \in S^{m-N}_\alpha(\Omega)$$

для любых $N = 1, 2, \ldots.$

Если символ $p(x, t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора не зависит от x, то утверждение, аналогичное теореме 1 доказано в [1].

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Баев А.Д., Панков В.В. (Воронеж)
alexsandrbaev@mail.ru, pankovfam@mail.ru

Процессы с вырождением – это модели, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, которые на границе области меняют порядок по одной из переменных. Подобные уравнения используются при исследовании стационарных процессов конвекции – диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде.

В работе В.П. Глушко [1] были получены оценки решений общей краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося а границе области в уравнение первого порядка по переменной t. В работе А.Д Баева, В.П. Глушко [2] были получены априорные оценки общей краевой задачи для одного вырождающегося уравнения высокого порядка, которое вырождается на границе области в уравнение второго порядка по переменной t.

В настоящей работе получены априорные оценки решений одной краевой задачи для уравнения, частным случаем которого является уравнение, рассмотренное в [2].

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t)>0$ при $t > 0$. Введём интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье

$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau, \quad \eta \in R^1$ следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}$, что даёт возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения

$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, ...,$ где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

В полосе $R^n_d = \{0 < t < d,\ x \in R^{n-1}\}$ рассматривается задача

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m,1}(D_x, D_{\alpha,t})v - L_{2,2}(D_x, \partial_t)v = F(x,t), \quad (1)$$

где

$$L_{2m,1}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{1,\tau,j}D_x^\tau D^j_{\alpha,t}, \quad L_{2,2}(D_x,\partial_t) = b_2\partial_t^2 + b_1\partial_t,$$

$b_1,\ b_2,\ \ a_{k,\tau,j},\ k = 1; 2.\quad -$ комплексные числа.$Im\,\overline{b}_2 a_{1,0,2m} = 0$.

На границе $t=0$ полосы R_d^n задается условие

$$v|_{t=0} = G(x) \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau l}$.

На границе $t=d$ полосы R_d^n заданы условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\, v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\, v|_{t=d} = 0. \tag{3}$$

Условие 1. При всех $(\xi,\eta) \in R^n$ справедливы неравенства $Re\bar{b}_2 L_{1,2m}(\xi,\eta) \geqslant c_1(1+|\xi|+|\eta|)^{2m}$, где постоянная $c_1>0$ не зависит от (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t>0$.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$ ($s \geqslant 0$ - действительное число) состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(R_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m} =$$

$$=\{ \sum_{l=0}^{[sm^{-1}]} \left\| F_{\xi\to x}^{-1} F_{\alpha}^{-1} [(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-ml)} F_{\alpha} F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]] \right\|_{L_2(R_d^n)}^2 \}^{\frac{1}{2}},$$

где $[sm^{-1}]$ - целая часть числа sm^{-1}.

Если s - целое неотрицательное число, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{ \sum_{|\tau|+j+ml\leqslant s} \left\| D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j} \partial_t^l v \right\|_{L_2(R_d^n)} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $s \geqslant 2m$ - целое число и выполнены условия 1 - 2. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1) - (3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,m} \leqslant c(\|Av\|_{s-2m,\alpha,m} + \|B\, v|_{t=0}\|_{s-\frac{m}{2}}),$$

где постоянная $c>0$ не зависит от v.

Здесь $\|\cdot\|_s$ - норма в пространстве Соболева - Слободецкого $H_s(R^{n-1})$.

Литература

1. Глушко В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого

порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1979. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048 – 79.

2. Баев А. Д. Корректная разрешимость общих краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений /А. Д. Баев, В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1979. – 60 с. – Деп. в ВИНИТИ 9.02.79, № 536-79.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ВСПЛЕСКАМИ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОЙ ГЛАДКОСТИ

Балгимбаева Ш.А., Смирнов Т.И. (Алматы)

sc_s@mail.ru

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ – множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$; $\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \quad |x| = \sqrt{xx}, \ |x|_\infty = \max\{|x_\nu|, \nu = 1, ..., n\}$. $S(\mathbb{R}^n)$ и $S'(\mathbb{R}^n)$– пространства Шварца пробных функций и умеренных распределений на $\mathbb{R}^n$; $F(f)$ и $F^{-1}(f)$ – прямое и обратное преобразование Фурье $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. Для $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ и $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ положим $\varphi(D)f(x) = [F^{-1}(\varphi F(f))](x)$. Далее, $L_p(\mathbb{R}^n) \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ – стандартное лебегово пространство с нормой $\|\cdot\|_p$, ℓ_q $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$ – пространство числовых последовательностей $(a_k) = (a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ с обычной нормой $\|(a_k)\|_{\ell_q}$.

Для последовательности функций $(f_\nu) = (f_\nu(x))_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ введем две нормы

$\|(f_\nu)\,|\ell_q(L_p)\| = \left\|(\|f_\nu\|_p)\right\|_{\ell_q}, \ \|(f_\nu)\,|L_p(\ell_q)\| = \left\|\|(f_\nu(\cdot))\|_{\ell_q}\right\|_p.$

Определение. *Последовательность* $\gamma = (\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}_+$

(i) ***почти возрастает,*** *если* $\exists\, d_0 > 0 :\ d_0\gamma_j \leqslant \gamma_k \ \forall\, j,\, k \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leqslant j \leqslant k$;

(ii) ***сильно возрастает,*** *если она почти возрастает и* $\exists\, \kappa_0 \in \mathbb{N}_0$: $2\gamma_j \leqslant \gamma_k \,\forall\, j,\, k \in \mathbb{N}_0\ \ j + \kappa_0 \leqslant k$;

(iii) ***ограниченного роста,*** *если* $\exists\, d_1 > 0$ и $J_0 \in \mathbb{N}_0$:$\gamma_{j+1} \leqslant d_1\gamma_j \ \ j \geqslant J_0 \,\forall j \in \mathbb{N}_0$.

Всюду далее $N := (N_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ сильно возрастает и ограниченного роста; $\sigma := (\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ ограниченного роста такая, что $\exists\, d_2 > 0$: $d_2\sigma_j \leqslant \sigma_{j+1} \,\forall\, j \in \mathbb{N}_0$.

Для $N = (N_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ и фиксированного $J \in \mathbb{N}$ ассоциированное покрытие $\Omega^{N,J} = (\Omega_j^{N,J})_{j \in \mathbb{N}_0}$ пространства $\mathbb{R}^n$ определяем так

$$\Omega_j^{N,J} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi|_\infty \leqslant N_{j+J_{\kappa_0}}\right\}, \text{ если } j = 0, 1, ..., J_{\kappa_0} - 1,$$

$\Omega_j^{N,J} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : N_{j-J_{\kappa_0}} \leqslant |\xi|_\infty \leqslant N_{j+J_{\kappa_0}}\right\}$, если $j = J_{\kappa_0}, J_{\kappa_0}+1, ...$

Фиксируем функцию $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\rho(\xi) = 1$, если $|\xi| \leqslant 1$, $\operatorname{supp}\rho \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ |\xi| < 2\}$, убывает вместе с $|\xi|_\infty$. Положим $\varphi_j^{N,J}(\xi) = \rho(N_j^{-1}\xi), j = 0, 1, ..., J_{\kappa_0} - 1$, и $\varphi_j^{N,J}(\xi) = \rho(N_j^{-1}\xi) - \rho(N_{j-J_{\kappa_0}}^{-1}\xi)$ для всех $j \geqslant J_{\kappa_0}$.

Введем следующие пространства обобщенной гладкости ($1 \leqslant p, q \leqslant \infty$) [1]

$$B_{p,q}^{\sigma,N} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \left\| f \,|B_{p,q}^{\sigma,N} \right\| = \left\| (\sigma_j \varphi_j^{N,j}(D) f)_{j\in\mathbb{N}_0} \,|\ell_q(L_p) \right\| < \infty \right\}$$

— пространство Бесова;

$$F_{p,q}^{\sigma,N} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \left\| f \,|F_{p,q}^{\sigma,N} \right\| = \left\| (\sigma_j \varphi_j^{N,j}(D) f)_{j\in\mathbb{N}_0} \,|L_p(\ell_q) \right\| < \infty \right\}$$

— пространство Лизоркина—Трибеля.

Рассматриваются следующие вопросы для пространств $B_{p,q}^{\sigma,N}$ и $F_{p,q}^{\sigma,N}$:

I. теорема представления и характеризации с помощью всплесков;

II. точные по порядку оценки приближения специальными параллелепипедальными частичными суммами этих разложений;

III. кроме того, будут обсуждаться точные по порядку оценки поперечников Фурье единичных шаров пространств $B_{p,q}^{\sigma,N}$ и $F_{p,q}^{\sigma,N}$.

Литература

1. *Farkas W. , Leopold H.–G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness// Annali di Matematica, 2006, V. 185, No 1, p. 1–62.

КРАТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ-УОЛША ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ОРЛИЧА С "J_k-ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ"[1]

Блошанская С.К., Блошанский И.Л. (Москва)
ig.bloshn@gmail.com

Пусть $M = \{1, \ldots, N\}$, $J_k = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset M$, $j_1 < \cdots < j_k$, $1 \leqslant k \leqslant N-2$, $N \geqslant 3$, и пусть $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_+^k$, $j_s \in J_k$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00321).

$s=1,\ldots,k$. Символом $n^{(\lambda)}=n^{(\lambda)}[J_k]=(n_1,\ldots,n_N)\in\mathbb{Z}_+^N$ обозначим N-мерный вектор, у которого компоненты n_j, $j\in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей (для $j\in J_k\colon n_j=n_j^{(\lambda_j)}$, $n_j^{(\lambda_j+1)}/n_j^{(\lambda_j)}\geqslant q>1$, $\lambda_j=1,\,2,\ldots$).

Далее пусть $\Omega[J_2]\subset\mathbb{I}[J_2]$ – произвольное (непустое) открытое множество, $W[J_2]=\Omega[J_2]\times\mathbb{I}[M\setminus J_2]$, здесь $\mathbb{I}[J_s]=\{(x_{j_1},\,\ldots,\,x_{j_s})\colon 0\leqslant x_{j_l}\leqslant 1,\, l=1,\ldots,s\}\subset\mathbb{I}^N=[0,1]^N$, $s=2,\ N-2$ (при этом любой вектор $z=(z_1,\ldots,z_{2N})\in\Omega[J_2]\times\mathbb{I}[M\setminus J_2]$, мы отождествляем с вектором $x=(x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{I}^N$ по формуле: $x_s=z_s$ при $s\in J_2$ и $x_s=z_{N+s}$ при $s\in M\setminus J_2$). Положим

$$W(J_k)=\bigcup_{J_2\subset M\setminus J_k}W[J_2]\quad\text{и}\quad W^0(J_k)=\bigcap_{J_2\subset M\setminus J_k}W[J_2].$$

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A}\subset\mathbb{I}^N$, $N\geqslant 3$, $\mu\mathfrak{A}>0$ (μ -мера Лебега), и пусть J_k – произвольная "выборка" из M, $1\leqslant k\leqslant N-2$. Если существует множество $W(J_k)$ такое, что $\mu(W(J_k)\setminus\mathfrak{A})=0$, то для любой функции $f\in L(\log^+L)^{2k+3}(\mathbb{I}^N)$, $f(x)=0$ на $\mathfrak{A}$, "J_k-лакунарная последовательность частичных сумм" ряда Фурье функции f, т.е. $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x;f)$, сходится почти всюду к нулю на множестве $W^0(J_k)$, точнее,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j\to\infty,j\in J_k,\\ n_j\to\infty,j\in M\setminus J_k}}S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x;f)=0\ \ \textit{для почти всех}\ x\in W^0(J_k).$$

Результат теоремы показывает, что если k компонент ($1\leqslant k\leqslant N-2$) "номера" $n\in\mathbb{Z}_+^N$ прямоугольной частичной суммы $S_n(x;f)$ будут элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей (т.е. $S_n(x;f)=S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x;f)$), то для кратных рядов Фурье-Уолша (суммируемых по прямоугольникам) в классах $L(\log^+L)^{2k+3}(\mathbb{I}^N)$ при $N\geqslant 3$ будет справедлива слабая обобщенная локализация почти всюду на "кресте" $W(J_k)$. Отметим, что при возрастании k (т.е. при увеличении числа лакунарных компонент в номере n) возрастают требования к "гладкости" разлагаемой в ряд Фурье-Уолша функции f, но при этом (вообще говоря) мы получаем увеличение множества, на котором рассматриваемый ряд сходится, с одновременным уменьшением множества, на котором необходимо равенство нулю функции f. И, наконец, при "максимальной гладкости" функции $f(x)$ $(f\in L(\log^+L)^{2N-1}(\mathbb{I}^N))$ указанные множества совпадают, т.е. $W^0(J_{N-2})=W(J_{N-2})=Omega[J_2]\times\mathbb{I}[M\setminus J_2]$.

Ранее (см. [1],[2]) аналогичный результат был получен в классах $L_p(\mathbb{I}^N)$, $p > 1$.

Литература

1. *Блошанская С. К., Блошанский И. Л.* Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье-Уолша с J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм// Совр. проблемы теории функций и их прил. Труды 15-ой Сарат. зимней шк. Саратов. 2010. С. 28-29.

2. *Блошанская С. К., Блошанский И. Л., Лифанцева О. В.* Тригонометрические ряды Фурье и ряды Фурье-Уолша с лакунарной последовательностью частичных сумм. // Мат. заметки. 2013. Т. 93(2). С. 305-309.

"ПОЧТИ" ФУНДАМЕНТАЛЬНОСТЬ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ L_p, $p > 1$[1]

Блошанский И.Л., Графов Д.А. (Москва)

ig.bloshn@gmail.com, grafov.den@yandex.ru

Пусть 2π-периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $\mathbb{T}^N = [-\pi,\pi)^N$, $N \geqslant 1$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье $f(x) \sim \sum c_k e^{ixk}$, и $S_n(x;f)$, $n \in \mathbb{Z}_+^N$, – прямоугольная частичная сумма этого ряда, и пусть функция $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $N \geqslant 1$, разложена в кратный интеграл Фурье $g(x) \sim \int \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$, и $J_\alpha(x;g)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^N$, – собственный интеграл Фурье.

Предположим, что $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^N$. Обозначим символом $R_\alpha(x;f,g)$ разность $R_\alpha(x;f,g) = S_n(x;f) - J_\alpha(x;g)$ и символом $R_\alpha(x;f)$ разность $R_\alpha(x;f) = S_n(x;f) - J_\alpha(x;g)$, если $g(x) = 0$ вне $\mathbb{T}^N$, здесь $n = [\alpha] = ([\alpha_1], \ldots, [\alpha_N]) \in \mathbb{Z}_+^N$ ($[t]$ — целая часть $t \in \mathbb{R}_+^1$). В работе [1] доказано, что для $N = 2$ и $p > 1$ $R_\alpha(x;f,g) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ (т.е $\min\limits_{1 \leqslant s \leqslant N} \alpha_s \to \infty$) почти всюду на $\mathbb{T}^2$. В этой же работе выяснена существенность условий $N = 2$, $p > 1$. В частности, построена функция $f_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geqslant 3$, такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha\to\infty}} |R_\alpha(x;f_0)| = +\infty$ всюду внутри $\mathbb{T}^N$. В связи с этим возникает вопрос: как ведет себя разность $R_\alpha(x;f,g)$, если компоненты n_j и α_j векторов $n \in \mathbb{Z}_+^N$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+^N$ связаны соотношением:

$$| \alpha_j - n_j | \leqslant const, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00321).

Ответом на этот вопрос для $N = 2$ является

Теорема 1. *Для любого* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}^2_+$, *удовлетворяющего условию* (1), *и для любых функций* $g(x)$ *и* $f(x)$ *таких, что* $g \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, *и* $g(x) = f(x)$ *при* $x \in \mathbb{T}^2$,

$$\lim_{\alpha_1,\, \alpha_2 \to \infty} R_{\alpha_1,\, \alpha_2}(x; f, g) = 0 \ \textit{почти всюду на} \ \mathbb{T}^2.$$

Заметим, что аналогичный результат верен и при $N = 1$ в классе L_1.

Далее, обозначим $RS_{n+m}(x; f) = S_{n+m}(x; f) - S_n(x; f)$, $n, m \in \mathbb{Z}^N_+$. Эквивалентным теореме 1 является следующий результат.

Теорема 1$'$. *Для любой ограниченной последовательности* $\{m(n)\}$, $m(n) \in \mathbb{Z}^2_+$, $n \in \mathbb{Z}^2_+$, *и для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$,

$$\lim_{n \to \infty} RS_{n+m(n)}(x; f) = 0 \ \textit{почти всюду на} \ \mathbb{T}^2.$$ [1]

Как мы говорили выше, для $N \geqslant 3$ теорема 1 не справедлива уже в классе $\mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$. Нетрудно установить, что результат теоремы 1$'$ также не верен в этом же классе. В таком случае, возникает следующий вопрос: как ведут себя разности $R_\alpha(x; f, g)$ и $RS_{n+m}(x; f)$ в классах L_p, при $N \geqslant 3$, если некоторые компоненты n_j вектора $n = [\alpha]$ являются элементами (однократных) лакунарных последовательностей ($\{k^{(s)}\}, k^{(s)} \in \mathbb{Z}^1_+$, – лакунарная последовательность, если $k^{(s+1)}/k^{(s)} \geqslant q > 1$, $s = 1, 2, \dots$).

Возможность получения новых результатов в случае дополнительных ограничений на вектор $n = [\alpha]$ связана с тем, что в классах L_p, $p > 1$, "лакунарные" подпоследовательности частичных сумм кратных рядов Фурье обладают лучшими свойствами сходимости п.в. по сравнению со всей последовательностью $S_n(x; f)$.

Частичным ответом на последний вопрос являются следующие результаты (которые, в частности, показывают, что при $N \geqslant 3$ разности $R_\alpha(x; f, g)$ и $RS_{n+m}(x; f)$ не эквивалентны).

Теорема 2. *Существует функция* $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geqslant 3$, *такая, что для любой последовательности* $\widetilde{\alpha} = (\alpha_3, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^{N-2}_+$

$$\overline{\lim_{n_1,\, n_2,\, \widetilde{\alpha} \to \infty}} |R_{n_1,\, n_2,\, \widetilde{\alpha}}(x; f)| = +\infty \ \textit{всюду внутри} \ \mathbb{T}^N.$$

[1] Заметим, что эта оценка справедлива и для расходящихся п.в. рядов Фурье.

Теорема 3. *Для любой ограниченной последовательности* $\{m(n)\}$, $m(n) \in \mathbb{Z}_+^2$, $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, *для любых лакунарных последовательностей* $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_+^1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots,$ $j = 3, \dots, N$, *и для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geqslant 3$, *почти всюду на* $\mathbb{T}^N$:

$$\lim_{n_1, n_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N \to \infty} RS_{n_1+m_1(n), n_2+m_2(n), n_3^{(\lambda_3)}, \dots, n_N^{(\lambda_N)}}(x; f) = 0.$$

Литература

1. *Блошанский И. Л.* // Матем. заметки, 1975, **18**:2, 153-168.

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСТАБИЛЬНОЙ ТОЧКОЙ ПОВОРОТА 2-ГО РОДА

Болилый В.А., Зеленская И.А. (Кировоград, Украина)
Kopchuk@yandex.ru

Исследована система сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений (ССВДУ) 4-го порядка с дифференциальной точкой поворота 2-го рода:

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon) Y(x, \varepsilon) = h(x), \tag{1}$$

где $\varepsilon \to 0$, $x \in [0, l]$, $Y(x, \varepsilon) = colon(y_1(x, \varepsilon), y_2(x, \varepsilon), y_3(x, \varepsilon), y_4(x, \varepsilon))$ - искомая вектор-функция, $h(x) = colon(0, 0, 0, h(x))$,

$$A(x, \varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix},$$

– матрица с элементами $a(x) = -x\tilde{a}(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – бесконечно дифференцируемые на отрезке $[0; l]$.

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = 0$ i $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{x\tilde{a}(x)}$.

С помощью модифицированного метода регуляризации существенно-особых функций, построена асимптотика решения в виде ряда с использованием функций $U_k(t)$ Эйри-Лангера:

$$\tilde{y}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{2} \alpha_k(x, \varepsilon) U_k(t) + \beta_k(x, \varepsilon) U_k'(t) +$$

$$+f(x,\varepsilon)\nu(t)+\varepsilon^{\gamma}g(x,\varepsilon)\nu'(t)+\omega(x,\varepsilon). \qquad (2)$$

Теорема 1. Пусть: 1) $a(x) \equiv -x\tilde{a}(x), b(x), h(x) \in C^{\infty}[0;l]$; 2) $\widetilde{a}(x) < 0$. Тогда на отрезке $[0;l]$ можно построить общее решение ССВДР (1) в виде асимптотичного ряда (2), коэффициенты которого достаточно гладкие функции на отрезке $[0;l]$.

Литература

В.О. Болілий, І.О. Зеленська. Диференціальна точка звороту 2-го роду в системі сингулярно збурених диференціальних рівнянь 4-го порядку. // Міжнародна наукова конференція - Київ – 2012. С. 1-2.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Болотин А.Е. (Москва)
artem-bolotin@yandex.ru

Рассматривается модель поведения производителя. Имеются n различных товаров, причем первые $m \leqslant n$ товаров создает производитель, потребляя при производстве все n товаров. Оставшиеся $n-m$ товаров импортируются в рассматриваемую систему извне. Заданы: цена j-го товара $p_j > 0$ и используемый при производстве i-ой продукции объем имеющихся финансовых средств для приобретения ресурсов $b_i > 0$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Обозначим через $x_{ij} > 0$ объем j-ой продукции, расходуемый для производства i-ой продукции $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Известна функция прибыли $\pi : \mathbb{R}_+^{m\times n} \to \mathbb{R}_+$, значением которой $\pi(x)$ является прибыль производителя при заданном расходе ресурсов $x=(x_{11},x_{12},\ldots,x_{1n},\ldots,x_{m1},x_{m2},\ldots,x_{mn})$ и фиксированной цене $p=(p_1,...,p_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Из всех возможных наборов ресурсов $x \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$ таких, что стоимость производства i-го товара не превышает b_i при любом $i=\overline{1,m}$, производитель выбирает тот, при котором прибыль максимальна.

Для производственных функций, заданных по формуле

$$f_i(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{in}) = C_i\prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\beta_{ij}},\ i=\overline{1,m},$$

где $C_i > 0$ — коэффициенты нейтрального технического прогресса, $\beta_{ij} > 0$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ — коэффициенты эластичности по ресурсам,такие, что $\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} < 1$, $i = \overline{1,m}$, получена соответствующая функция спроса как решение экстремальной задачи максимизации прибыли. Для этой функции вычислена константа накрывания. Проведено исследование положения равновесия в модели, соответствующей полученной функции предложения и функции спроса для функции потребительского предпочтения Р. Стоуна.

О СВЯЗЯХ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ КОЛИЧЕСТВЕННЫМИ И КАЧЕСТВЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ РОСТА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Брайчев Г.Г. (Москва)

braichev@mail.ru

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно большая последовательность комплексных чисел, упорядоченная по возрастанию модулей,

$n(t) = \sum_{|\lambda_n| \leqslant t} 1$ - ее считающая функцию, а $N(r) = \int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt$ - усредненная считающая функция.

Зафиксируем число $\rho > 0$, величины

$$\underline{\overline{\Delta}} = \underline{\overline{\lim}}_{r \to +\infty} \frac{n(r)}{r^\rho}, \underline{\overline{\Delta}}^* = \underline{\overline{\lim}}_{r \to +\infty} \frac{n(r)}{r^\rho}, \underset{\sim}{\widetilde{\Delta}} = \underline{\overline{\lim}}_{n \to \infty} \frac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}$$

называются *верхними (соотв. нижними)ρ-плотностями* (обычной, усредненной и дискретной усредненной) последовательности. Здесь верхнее и нижнее подчеркивания соответствуют друг другу во всех частях равенств.

В отличие от приведенных, следующие характеристики являются внутренними, или качественнми, т.к. не зависят от скорости стремления последовательности к бесконечности, выраженной показателем $\rho > 0$. Именно, определим *индекс лакунарности* и *верхнюю* и *нижнюю относительные плотности* последовательности равенствами

$$l = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|}, \quad \underline{\overline{\nu}} = \underline{\overline{\lim}}_{r \to +\infty} \frac{N(r)}{n(r)} .$$

В сообщении обсуждается изаимный рост этих и некоторых других характеристик. Например, справедлив следующий результат

Теорема *Выполняются точные неравенства*

$$\underline{\Delta}^* \frac{e^{\rho\underline{\nu}-1}}{\rho\underline{\nu}} \leqslant \overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta} \frac{e^{\rho\underline{\nu}-1}}{\rho\underline{\nu}}, \quad \overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta} \frac{e^{\rho\overline{\nu}-1}}{\rho\overline{\nu}}, \quad \overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta} \frac{l^\rho}{\ln l^\rho + 1},$$

$$\overline{\Delta}^* \geqslant \underline{\Delta}^* \, l^{\frac{\rho}{l^\rho - 1}} \frac{l^\rho - 1}{e \ln l^\rho}, \quad \underline{\Delta}^* \frac{l^\rho - 1}{a_2 \ln l^\rho} \leqslant \overline{\Delta}^* \leqslant \underline{\Delta}^* \frac{l^\rho - 1}{a_1 \, l^\rho \, \ln l^\rho},$$

где a_1 *и* a_2 *— корни уравнения* $a \ln \dfrac{e}{a} = \underline{\Delta}^* / \overline{\Delta}^*$, $0 \leqslant a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2 \leqslant e$.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ

Бунеев С.С. (Елец)
limes88@mail.ru

В работах А. Д. Баева [1]-[2] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка.

В данной работе доказана теорема о существовании и единственности решения краевой задачи в полосе для уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе в уравнение третьего порядка по одной из переменных. Существование решения устанавливается в пространствах, частными случаями которых являются пространства, рассмотренные в [3].

В полосе $R^n_d = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$- некоторое число, рассматривается уравнение вида

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) v(x,t) = F(x,t). \tag{1}$$

Здесь

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) v - b\partial_t^3 v,$$

$$L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j \leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j,$$

$a_{\tau j}$ — комплексные числа, $Im\, a_{02m} = 0$.

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}.$$

На границе $t=0$ полосы R_d^n задается условие вида

$$B_j(D_x)\, v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m^*-m(j-1)} b_\tau D_x^\tau \partial_t^j\, v|_{t=0} = G_j(x), \;\; j=1;2 \qquad (2)$$

с комплексными коэффициентами b_τ.

На границе $t=d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\, v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\, v|_{t=d} = 0. \qquad (3)$$

Пусть что выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi,\eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta) \geqslant c(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m$, где постоянная $c>0$ не зависит от (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m+\max(m_1, m_2)$ функция$\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0)=\alpha'(0)=0$, $\alpha(t)>0$ при $t>0$.

Условие 3. $B_j(\xi)\neq 0$, $j=1,2$ при всех $\xi\in R^{n-1}$.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3). Следуя [2], рассмотрим интегральное преобразование F_α, которое на функциях $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Для этого преобразования можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F_{\eta\to\tau}^{-1}$ - обратное преобразование Фурье. Кроме того, для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,m,k}(R_d^n)$ ($s\geqslant 0$ - действительное число, k- целое число) состоит из тех функций $v(x,t)\in S'$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m} =$$

$$\{\sum_{l=0}^{[\frac{3s}{2m}]}\Big\|(1+|x|^2)^k F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{3}l)}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]]\Big\|^2_{L_2(R_d^n)}\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{3s}{2m}]$ - целая часть числа $\frac{3s}{2m}$.

Если s - целое неотрицательное число такое, что число $\frac{3s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}l \leqslant s} \left\| (1+|x|^2)^k D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|_{L_2(R_d^n)} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 2. Пространство $H_{s,k}(R^{n-1})$ (s- действительное число, k- целое число) состоит из всех функций $u(x) \in L_2(R^{n-1})$, для которых конечна норма

$$\|u\|_s = \left\| (1+|x|^2)^k F_{\xi \to x}^{-1}[(1+|\xi|)^s F_{x\to\xi}[u(x)]] \right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть $s \geqslant \max\{2m,\ \max(m_1, m_2 + \frac{2m}{3}) + \frac{m}{3}\}$ - целое число, $m \geqslant 3$, k- целое число, и выполнены условия 1 - 3. Тогда для любых $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},k}(R_d^n)$, $G_j(x) \in H_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{3}-\frac{m}{3},k}(R^{n-1})$, $j = 1, 2$, существует единственное решение задачи (1)-(3), принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3},k}(R_d^n)$.

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

2. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка/А. Д. Баев // Доклады Академии наук, 2008, т. 422, №6, с. 727 – 728.

3. Бунеев С.С. О корректности одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка/ С.С. Бунеев// Материалы V Международной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования", Воронеж, 2012, с. 55-57.

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Бунеев С.С. (Елец)
limes88@mail.ru

Краевые задачи для уравнений с вырождением относятся к "неклассическим" задачам математической физики. Главная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при "степенном" характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [1]. В работе В.П. Глушко [2] были получены априорные оценки краевых задач для уравнений, вырождающихся на границе в уравнение первого порядка по одной из переменных. В работах А. Д. Баева [3]-[4] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка.

В данной работе получена априорная оценка решений краевой задачи в полосе для уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе в уравнение третьего порядка по одной из переменных. Аналогичная краевая задача была рассмотрена в [5]. В этой работе утанавливается априорная оценка решений в пространствах, подпространствами которых являются пространства. Рассмотренные в [5].

В полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$- некоторое число, рассматривается уравнение вида

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t). \tag{1}$$

Здесь

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + b\partial_t^3 v,$$

$$L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j,$$

$a_{\tau j}$ – комплексные числа, $Im\,\bar{b}a_{02m} = 0$.

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x^{\tau} = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}.$$

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задается условие вида

$$B(D_x)\ v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m^*} b_\tau D_x^\tau\ v|_{t=0} = G(x) \qquad (2)$$

с комплексными коэффициентами b_τ.

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\ v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\ v|_{t=d} = 0. \qquad (3)$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi,\eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta) \geqslant c(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m+m^*$ функция$\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $B(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3).

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,m,k}(R_d^n)$ ($s \geqslant 0$ - действительное число, m- натуральное число, k- целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in S'$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m,k} =$$

$$\{\sum_{l=0}^{[\frac{3s}{2m}]}\left\|(1+|x|^2)^k F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{3}l)}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]]\right\|^2_{L_2(R_d^n)}\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{3s}{2m}]$ - целая часть числа $\frac{3s}{2m}$.

Если s - целое неотрицательное число такое, что число $\frac{3s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}l\leqslant s}\left\|(1+|x|^2)^k D_x^\tau D_{\alpha,t}^j\partial_t^l v\right\|_{L_2(R_d^n)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 2. Пространство $H_s(R^{n-1})$ (s- действительное число, k- целое число) состоит из всех функций $u(x) \in L_2(R^{n-1})$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{s,k} = \left\|(1+|x|^2)^k F^{-1}_{\xi\to x}[(1+|\xi|)^s F_{x\to\xi}[u(x)]]\right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть $s \geqslant \max\{2m,\ m^* + \frac{m}{3}\}$ - целое число, k- целое число и выполнены условия 1 - 3. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1) - (3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,m,k}(R^n_d)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,m,k} \leqslant c(\|Av\|_{s-2m,\alpha,m,k} + \|B\ v|_{t=0}\|_{s-m^*-\frac{m}{3},k}),$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от v.

Литература

1. Вишик М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. – 1970. – Т. 25, вып. 4. – С. 29-56.

2. Глушко В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1979. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048 – 79.

3. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

4. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка/А. Д. Баев // Доклады Академии наук, 2008, т. 422, №6, с. 727 – 728.

5. Бунеев С.С. Оценки решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка/ С.С. Бунеев// Материалы V Международной конференции “Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования”, Воронеж, 2012, с. 58-60.

О ТЕОРЕМЕ ЖОРДАНА-ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ[1]

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж)

bmsh2001@mail.ru

Рассматривается функционально-дифференциальный оператор с инволюцией

$$Ly = y'(1-x) + \alpha y'(x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x),\ \ y(0) = \gamma y(1),$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270)

где $x \in [0,1]$, $p_i(x) \in C^1[0,1]$, $\alpha^2 \neq 1$, α, γ — комплексные постоянные. В [1] установлена равносходимость на отрезке $[0,1]$ рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям (далее с.п.ф.) операторов L и $L_0 y = y'(1-x) + \alpha y'(x)$, $y(0) = \gamma y(1)$:

Теорема 1 [1]. *Пусть $\gamma \neq b$, $\gamma \neq b^{-1}$, $b = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Тогда для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ имеет место соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - S_r^0(f,x)\|_\infty = 0,$$

где $S_r(f,x)$ ($S_r^0(f,x)$) — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора L (L_0), включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k (λ_k^0), для которых $|\lambda_k| < r$ ($|\lambda_k^0| < r$).

На основании теоремы 1 получена

Теорема 2 (Жордана-Дирихле). *Если $f(x) \in C[0,1] \bigcap V[0,1]$ и $f(0) = \gamma f(1)$, $\gamma \neq b$, $\gamma \neq b^{-1}$, то*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - S_r(f,x)| = 0.$$

Литература

Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика. вып. 4. - С.3-10

МНОГОМЕРНЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ[1]

Васильев А.В. (Белгород), Васильев В.Б. (Липецк)

alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru

Мы рассматриваем следующий дискретный аналог многомерного сингулярного интеграла Кальдерона – Зигмунда

$$u_h(\tilde{x}) \longmapsto \sum_{\tilde{y}\in\mathbf{Z}_h^m} K(\tilde{x}, \tilde{x}-\tilde{y}) u_h(\tilde{y}) h^m, \ \tilde{x} \in \mathbf{Z}_h^m \tag{1}$$

где введены следующие обозначения.

Пусть $\mathbf{Z}_h^m$ – целочисленная ($\mod h$, $h > 0$) решетка в $\mathbf{R}^m$, u_h – функция дискретного аргумента, определенная на $\mathbf{Z}_h^m$, $K(x,y)$

[1] Работа выполнена без финансовой поддержки РФФИ

– специальное ядро Кальдерона – Зигмунда [1], удовлетворяющее некоторым условиям гладкости, $K(x,0)\equiv 0, \forall x\in \mathbf{R}^m$.

В настоящей работе дается оценка порядка приближения континуального сингулярного интеграла Кальдерона – Зигмунда оператором (1) в точках решетки $\mathbf{Z}_h^m$. Если рассматривать приближение на классах функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\alpha, 0<\alpha<1$, то этот порядок дается величиной $h^\alpha \ln 1/h$.

Литература

1. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. — 256 с.

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА С ВЕСАМИ, ЯВЛЯЮЩИМИСЯ ФУНКЦИЕЙ РАССТОЯНИЯ ДО h-МНОЖЕСТВА[1]

Васильева А.А. (Москва)
vasilyeva_ nastya@inbox.ru

Пусть $r\in\mathbb{N}$, $1<p\leqslant\infty$, $1\leqslant q<\infty$, область $\Omega\subset\left[-\frac12,\,\frac12\right]^d$ удовлетворяет условию Джона с параметром $a>0$ (см. [1], [2]), g, $v:\Omega\to\mathbb{R}_+$ — измеримые функции. Положим $\|f\|_{q,v}{=}\|fv\|_{L_q(\Omega)}$, $L_{q,v}(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R}|\ \ \|f\|_{q,v}<\infty\}$,

$$W^r_{p,g}(\Omega)=\left\{f:\ \Omega\to\mathbb{R}\right|\exists\varphi:\ \|\varphi\|_{L_p(\Omega)}\leqslant 1,\,\nabla^rf=g\cdot\varphi\right\}$$

(соответствующую векторнозначную функцию φ будем обозначать $\nabla^r f/g$).

Пусть $h:(0,1]\to(0,\infty)$ — неубывающая функция, равная в окрестности нуля $t^\theta\Lambda(t)$, где $0\leqslant\theta<d$, Λ — положительная абсолютно непрерывная функция, такая что $\frac{t\Lambda'(t)}{\Lambda(t)}\underset{t\to+0}{\to}0$. Пусть $\Gamma\subset\partial\Omega$ — h-множество (т.е. существует конечная мера μ на $\mathbb{R}^d$ такая, что $\operatorname{supp}\mu=\Gamma$ и для любого $x\in\Gamma$, $t\in(0,1]$ выполнено $\mu(B_t(x))\asymp h(t)$; см. [3]); $g(x)=\varphi_g(\mathrm{dist}(x,\Gamma))$, $v(x)=\varphi_v(\mathrm{dist}(x,\Gamma))$, $\varphi_g(t)=t^{-\beta_g}\Psi_g(t)$, $\varphi_v(t)=t^{-\beta_v}\Psi_v(t)$, Ψ_g, Ψ_v — абсолютно непрерывные функции такие, что $\frac{t\Psi_g'(t)}{\Psi_g(t)}\underset{t\to+0}{\to}0$, $\frac{t\Psi_v'(t)}{\Psi_v(t)}\underset{t\to+0}{\to}0$, при этом $-\beta_vq+d-\theta>0$, $\delta:=r+\frac{d}{q}-\frac{d}{p}>0$. Кроме того, будем предполагать, что а) $\beta_g+\beta_v<\delta-\theta\left(\frac1q-\frac1p\right)_+$ или б) $\beta_g+\beta_v=\delta$, $\theta=0$. В случае б) будем считать, что $\Lambda(t)=|\log t|^\gamma\tau(|\log t|)$, $\Psi_g(t)=|\log t|^{-\alpha_g}\rho_g(|\log t|)$,

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 12-01-00554)

$\Psi_v(t) = |\log t|^{-\alpha_v} \rho_v(|\log t|)$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y\tau'(y)}{\tau(y)} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y\rho_g'(y)}{\rho_g(y)} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y\rho_v'(y)}{\rho_v(y)} = 0$, $\gamma < 0$ и $\alpha := \alpha_g + \alpha_v > (1-\gamma)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$. Обозначим $\mathfrak{Z} = (r, d, p, q, \beta_g, \beta_v, \theta, \Lambda, \Psi_g, \Psi_v, a)$.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ найдется полином Pf степени не выше $r-1$ такой, что $\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega)}$. При этом, отображение $f \mapsto Pf$ линейно.*

Литература

[1] Ю.Г. Решетняк, “Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей”, *Сиб. матем. журнал*, **21**:6 (1980), 108–116.

[2] А.А. Васильева, “Поперечники весовых классов Соболева на области, удовлетворяющей условию Джона” (*Тр. МИАН им. В.А. Стеклова*, принято к печати).

[3] M. Bricchi, “Tailored Besov spaces and h-sets”, *Math. Nachr.*, **263/264** (2004), 36–52.

К ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИЯХ ЦИКЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЬНЫХ РЕЗОНАНСОВ

Владимирова Е.В., Карпова А.П., Сапронов Ю.И. (Воронеж)

vev444@mail.ru, karpovaantonina@mail.ru, yusapr@mail.ru

Несмотря на то, что имеется много публикаций, посвященных разработке и апробации методов исследования зарождения периодических волн, вихревых структур и циклов динамических систем (вблизи вырожденных стационарных состояний) [1]–[3], проблема многомодового циклогенеза все еще исследована недостаточно. В данном сообщении обсуждается задача приближенного вычисления амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии сильных резонансов 1:1 и 1:1:1. Методологическую основу предложенной процедуры составляет теория гладких $SO(2)$-эквивариатных фредгольмовых уравнений в банаховых пространствах [3]–[5].

Пусть заданы банаховы пространства E, F и гильбертово пространство H такие, что E непрерывно вложено в F, F непрерывно вложено в H и E плотно в H. Пусть, далее, задано семейство фредгольмовых отображений нулевого индекса $f : E \times \mathbb{R}^m \longrightarrow F$, гладкое по совокупности переменных, представленное в виде

$$\mathcal{A}(\varepsilon)x + \mathcal{B}(x, x, \varepsilon) + \mathcal{C}(x, x, x, \varepsilon) + o(\|x\|_E^3),$$

где $\mathcal{A}(\varepsilon)$ — гладкое семейство линейных фредгольмовых операторов нулевого индекса, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ — квадратичный и кубический операторы.

Преположим, что зафиксирован слабо гладкий гомоморфизм $\mathcal{T} : SO(2) \longrightarrow O(H)$ — из группы $SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований пространства H (слабая гладкость означает, что индуцированное действие $SO(2)$ на любом конечномерном инвариантном подпространстве $N \subset H$ является гладким). Гомоморфизм $\mathcal{T}$ задает ортогональное действие окружности на H. Будем предполагать также, что E и F инвариантны, а f эквивариантно относительно данного действия.

$$\mathcal{T}_g(E) \subset E, \quad \mathcal{T}_g(F) \subset F, \quad f(\mathcal{T}_g(\cdot), \varepsilon) = \mathcal{T}_g(f(\cdot, \varepsilon)) \quad \forall g \in SO(2), \ \varepsilon.$$

Из эквивариантности f следует эквивариантность его производной (в нуле) $\mathcal{A}(\varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \varepsilon)$ и инвариантность подпространства $N := Ker\, \mathcal{A}(0)$. Пусть $E = N \oplus R_*, \quad F = N \oplus R, \quad dimN = 2n, \ \mathcal{A}(\varepsilon)(N) \subset N, \quad \mathcal{A}(\varepsilon)(R_*) \subset R$. Предположим также, что в N выбран базис $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ (не зависящий от ε), в котором матрица $A_{(2n)}(\varepsilon)$ оператора $\mathcal{A}_{(2n)}(\varepsilon) := \mathcal{A}(\varepsilon)\Big|_N$ имеет блочно-диагональный вид:

$$\mathrm{diag} \begin{pmatrix} \alpha_1(\varepsilon) & -\beta_1(\varepsilon) \\ \beta_1(\varepsilon) & \alpha_1(\varepsilon) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_n(\varepsilon) & -\beta_n(\varepsilon) \\ \beta_n(\varepsilon) & \alpha_n(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $A_4(\varepsilon)$ суть следующие комплексные числа: $\lambda_1 = \alpha_1(\varepsilon) \pm \imath\beta_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n = \alpha_n(\varepsilon) \pm \imath\beta_n(\varepsilon)$. Будем также требовать выполнение условия регулярности в нуле отображения $\varepsilon \longmapsto \Big(\alpha_1(\varepsilon), \beta_1(\varepsilon), \dots, \alpha_n(\varepsilon), \beta_n(\varepsilon)\Big)^\top$, означающего, что ранг его матрицы Якоби в нуле равен $2n$.

Пусть $\mathcal{P} : \mathcal{E} \to \mathcal{N}, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{I} - \mathcal{P}$ — ортопроекторы (в H). Следуя методу Ляпунова-Шмидта, запишем исходное операторное уравнение $f(x, \varepsilon) = 0$ в виде системы двух уравнений

$$\left.\begin{array}{rcl} f_{(2n)}(u + v, \varepsilon) & = & 0, \\ f_{(\infty-2n)}(u + v, \varepsilon) & = & 0, \end{array}\right\}$$

где $u = \mathcal{P}x, \quad v = \mathcal{Q}x, \quad f_{(2n)}(x, \varepsilon) := \mathcal{P}f(x, \varepsilon), \quad f_{(\infty-2n)}(x, \varepsilon) := \mathcal{Q}f(x, \varepsilon)$. Из второго уравнения системы получаем, в силу теоремы о неявной функции, выражение $v = \Phi(\xi, \varepsilon)$. Имеет место соотношение: $\Phi(\xi, \varepsilon) = o(\xi)$, то есть $\Phi(\xi, \varepsilon) = \Phi^{(2)}(\xi, \varepsilon) + o(|\xi|^2)$, где

$\Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon) = \sum\limits_{|k|=2} \Phi_k \xi^k, \;\; k = (k_1, k_2, \ldots, k_{2n})$, и

$$\Phi_k \xi^k := \Phi_{k_1 k_2 k_3 k_4} \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \xi_3^{k_3} \xi_4^{k_4}, \quad |k| = k_1 + k_2 + k_3 + k_4, \quad k_j \in \mathbb{Z}_+;$$

$\Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon) = -\overline{\mathcal{A}}^{\,-1}\, \mathcal{B}_{(\infty-2n)}(u,u,\varepsilon), \quad u := \sum_{j=1}^4 \xi_j \, e_j, \quad \overline{\mathcal{A}} := \mathcal{A}\Big|_{\mathcal{N}^\perp}$, $\mathcal{B}_{(\infty-4)} := \mathcal{Q}\mathcal{B}$. Для ключевого отображения получаем представление

$$\Theta(\xi,\varepsilon) := \Theta^{(1)}(\xi,\varepsilon) + \Theta^{(2)}(\xi,\varepsilon) + \Theta^{(3)}(\xi,\varepsilon) + o(|\xi|^3),$$

где

$$\Theta^{(1)}(\cdot,\varepsilon) = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1(\varepsilon) & -\beta_1(\varepsilon) \\ \beta_1(\varepsilon) & \alpha_1(\varepsilon) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_n(\varepsilon) & -\beta_n(\varepsilon) \\ \beta_n(\varepsilon) & \alpha_n(\varepsilon) \end{pmatrix} \right).$$

Для слагаемых $\Theta^{(2)}, \; \Theta^{(3)}$ имеются специальные формулы [3]-[5] (с использованием образующих инвариантов действия окружности на N).

В случае резонанса 1 : 1 получим ключевое отображение в (комплексной) форме:

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda_{1,1}(\varepsilon) & \lambda_{1,2}(\varepsilon) \\ \lambda_{2,1}(\varepsilon) & \lambda_{2,2}(\varepsilon) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{4} \mathcal{I}_k \begin{pmatrix} c_{1,1,k} & c_{1,2,k} \\ c_{2,1,k} & c_{2,2,k} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ o(|\xi|^4) + O(\varepsilon) O(|\xi|^3),$$

$z_1 = \xi_1 + i\,\xi_2, \;\; z_1 = \xi_1 + i\,\xi_2; \;\; I_1, \, I_2, \, I_3, \, I_4$ — инварианты действия окружности: $\mathcal{I}_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \; \mathcal{I}_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2, \;\; \mathcal{I}_3 = \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4, \; \mathcal{I}_4 = -\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3; \;\; \lambda_{p,q}(0) = 0, \;\; \{c_{p,q,k}\}$ — комплексные константы.

После введения в последнее уравнение полярных координат $z_1 = r_1 \exp(i\varphi_1), \;\; z_2 = r_2 \exp(i\varphi_2)$, и отбрасывания общих множителей получим систему уравнений в форме, удобной для проведения дискриминантного анализа.

Аналогичные результаты имеются и в случае резонанса 1:1:1.

Литература

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука. 1984. 432 с.

2. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир. 1985. 280 с.

3. Карпова А.П., Сапронов Ю.И. Приближенное вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии резонансов// Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008, вып. 3. С.12-22.

4. Карпова А.П., Ладыкина У.В., Сапронов Ю.И. Бифуркационный анализ фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и его приложения// Математические модели и операторные уравнения. - Т. 5, ч. 1. Воронеж: ВорГУ, изд-во "Созвездие 2008. С.45-90.

5. Карпова А.П., Копытин Н.А., Сапронов Ю.И. Ключевые уравнения в динамических системах с 2-кратными резонансами// Математические модели и операторные уравнения. Том 6. Воронеж: ВГУ, изд-во "Созвездие 2009. С.51-58.

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Власова Н.В., Куценко И.Л. (Москва)

vlasova-nv@yandex.ru

Основная трудность в преподавании математики студентам нематематических специальностей состоит в балансе между прикладным и теоретическим содержанием. Проблема состоит также в том, что изменилось преподавание математики в большинстве школ. При преподавании математики в колледже и ВУЗе не приходится надеяться на подготовленность абитуриентов: главной целью подготовки школьников является успешная сдача ЕГЭ. Поэтому по многим вопросам необходимо вести подготовку студентов практически "с нуля".

В настоящее время с целью повышения качества образования в колледжа и ВУЗах разрабатываются и внедряются новые образовательные технологии преподавания математики. Цель преподавания математики студентам неэкономических специальностей состоит в том, чтобы сформировать у студента целостное представление о месте и роли математики в современном мире, мировой культуре и истории, о математическом мышлении, индукции и дедукции в математике, принципах математических рассуждений и математических доказательствах, о математическом моделировании. Эффективность обучения достигается путем совершенствования содержания, форм, средств и методов преподавания.

В докладе представлены разработанные на основе многолетнего опыта преподавания учебно-методические комплексы и учебные пособия по математике для различных специальностей.

УСЛОВИЯ ФОРМОСОХРАНЕНИЯ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СПЛАЙНАМИ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ПО СУББОТИНУ И ПО МАРСДЕНУ[1]

Волков Ю.С.(Новосибирск),
Шевалдин В.Т.(Екатеринбург)
volkov@math.nsc.ru, valerii.shevaldin@imm.uran.ru

В задачах интерполяции сплайнами чётной степени множество точек интерполяции и сетку узлов сплайна принято выбирать несовпадающими, в то время как для сплайнов нечётной степени эти сетки совпадают. При интерполяции сплайнами второй степени распространены два подхода: по Субботину и по Марсдену. Ю.Н.Субботин предложил узлы параболического сплайна выбирать посередине между заданными точками интерполяции, а М.Марсден, наоборот, стал считать сетку узлов сплайна заданной, а точки интерполяции выбирал посередине между узлами сплайна.

Конечно, в случае равномерных сеток получается одна и та же конструкция, но в общем случае эти два разных сплайна обладают различными аппроксимативными свойствами.

Несмотря на принципиальные отличия интерполянтов, между сплайнами по Субботину и по Марсдену существует тесная связь, и между аппроксимативными свойствами этих разных конструкций был переброшен своеобразный мостик. Матрицы систем определяющих уравнений в одном подходе являются транспонированными от соответствующих матриц в другом.

Нами устанавлены достаточные условия k-монотонности сплайнов второй степени, интерполирующих k-монотонные исходные данные ($k = 0, 1, 2, 3$). Причём, поскольку системы определяющих уравнений для сплайнов по Субботину и по Марсдену связаны между собой, нами получены условия формосохранения для обеих конструкций.

Литература

Волков Ю. С., Шевалдин В. Т. Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену, Тр. ИММ УрО РАН. 18 (2012), 4, 145–152.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 11-07-00447, № 11-01-00347) и программы поддержки совместных интеграционных проектов СО РАН и УрО РАН (проекты 2012-Б32, 12-С-1-1018)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n—ГО ПОРЯДКА

Вязанкина М.И. (Воронеж)

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение n—го порядка следующего специального вида:

$$x^{(n)} + qx = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}), \qquad (1)$$

не разрешенное относительно старшей производной, в котором q — постоянная, не равная нулю, а нелинейная функция $f(t, x_0, \ldots, x_n)$ непрерывна по совокупности переменных (причем $f(t, 0, \ldots, 0)$ ограничена) и удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(t, x_0, x_1, \ldots, x_n) - f(t, y_0, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \sum_{j=0}^{n} |x_j - y_j|, \qquad (2)$$

где $l_0, l_1, \ldots, l_n$ — некоторые неотрицательные постоянные. Пусть выполнено условие:

$$q \equiv \sum_{j=0}^{n} \sigma_j l_j < 1, \qquad (3)$$

где $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n$ — частотные постоянные. Тогда уравнение (1) имеет единственное ограниченное вместе с производными до n—го порядка решение. Оно периодично (почти периодично), если $f(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ периодична (почти периодична) по t.

Теорема для случая, когда правая часть (1) не содержит старшей производной $x^{(n)}$, содержится в статье [1]; см. также [2].

Частотные постоянные, о которых говорится в (3), имеют вид:

$$\sigma_0 = |q|^{-1}, \sigma_n = 1;$$

$$\sigma_j = |q|^{\frac{j}{n}-1} = \begin{cases} \varphi(j/n), n = 2k \ (k \in \mathrm{N}) \\ \sqrt{\varphi(j/n)}, n = 2k+1 \ (k \in \mathrm{N}) \end{cases} \forall j = \overline{1, n-1}; \qquad (4)$$

$$\varphi(x) = x^x (1-x)^{1-x}, x \in (0; 1). \qquad (5)$$

Литература

1. Перов А. И. Частотные методы в теории ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений n—го порядка. Дифференциальные уравнения, 2012, т. 48, №5, с. 663—673.

2. Коструб И. Д. Ограниченные решения векторно—матричных уравнений n—го порядка. 2011, Воронеж (канд. диссертация).

КРИТЕРИЙ СОВПАДЕНИЯ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ ПОДПРОСТРАНСТВ[1]

Галатенко В.В., Лукашенко Т.П., Садовничий В.А. (Москва)

lukashenko@mail.ru

Орторекурсивные разложения по последовательности подпространств являются обобщением определенных в [1] орторекурсивных разложений по последовательности элементов и определенных в [2] рекурсивных разложений по цепочке систем. Системы представления по подпространствам рассматривались в [3], в [4] изучались орторекурсивные разложения по последовательностям подпространств, задаваемых сжатиями и сдвигами одной функции. Некоторые свойства орторекурсивных разложений по подпространствам рассматривались в статье [5]. В данной работе обобщается часть результатов этой статьи.

Приведем определение орторекурсивных разложений по последовательности подпространств. Для этого введем сначала некоторые обозначения.

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, E — замкнутое подпространство H. Ортогональное дополнение E в H (см., например, [6, Гл. III, § 4, п. 7]) будем обозначать через $E^{\perp}$ или $E^{\perp/H}$. Оператор ортогонального проектирования на E будем обозначать через Pr_E. Если $E \subset F$, где F — замкнутое подпространство H, то ортогональное дополнение E относительно F будем обозначать через $E^{\perp/F}$.

Определение 1. Пусть $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система замкнутых подпространств H, f — элемент H. Определим индуктивно последовательность элементов разложения $\left\{\check{f}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность остатков разложения $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$: положим $r_0(f) = f$; если уже определен остаток $r_{n-1}(f)$, то положим $\check{f}_n = \mathrm{Pr}_{H_n}(r_{n-1}(f))$, $r_n(f) =$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ по постановлению №220 для господдержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых, в ФГБОУ ВПО "МГУ имени М.В. Ломоносова" по договору №11.G34.31.0054, а также грантов НШ–6406.2012.1, НШ–979.2012.1, РФФИ №11–01–00321 и РФФИ №11-01-00476.

$r_{n-1}(f) - \check{f}_n = \mathrm{Pr}_{H_n^\perp}(r_{n-1}(f))$. Ряд $\sigma(f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \check{f}_n$ называется *орторекурсивным разложением* элемента f по последовательности подпространств $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Частичной суммой орторекурсивного разложения с номером N назовем сумму $S_N(f) = \sum\limits_{n=1}^{N} \check{f}_n$. Из определения орторекурсивного разложения сразу следует равенство $S_N(f) = f - r_N(f)$.

Так как $\|r_{n-1}\|^2 = \|\check{f}_n\|^2 + \|r_n\|^2$, для орторекурсивных разложений по последовательности подпространств выполняется аналог тождества Бесселя $\|f - S_N(f)\|^2 = \|r_N(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{n=1}^{N} \|\check{f}_n\|^2$, из которого следуют аналог неравенства Бесселя $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\check{f}_n\|^2 \leqslant \|f\|^2$ и утверждение об эквивалентности сходимости орторекурсивного разложения к разлагаемому элементу (равенства $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \check{f}_n$) и равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\check{f}_n\|^2$.

В отличие от классических разложений в ряды Фурье по ортогональным системам, для орторекурсивных разложений возможен случай, при котором разложения по различным последовательностям подпространств совпадают. Условия на последовательности подпространств, обеспечивающие совпадение орторекурсивных разложений по этим последовательностям, могут быть установлены на основе следующей леммы.

Лемма. *Пусть A, D и E — замкнутые подпространства H. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) для любого $x \in A$ ортогональные проекции x на D и E совпадают;

(ii) имеет место равенство $(D \cap A^\perp)^{\perp/D} = (E \cap A^\perp)^{\perp/E}$.

Отметим, что при фиксированном значении n множество всех n-х остатков ортерекурсивного разложения $\{r_n(f)\}_{f \in H}$ образует замкнутое подпространство в H.

С учетом приведенной выше леммы и этого замечания, критерий совпадения орторекурсивных разложений по последовательностям подпространств может быть сформулирован следующим образом.

Теорема (Критерий совпадения ОРР). *Пусть $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ и*

$\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательности замкнутых подпространств* H. *Тогда справедливы следующие утверждения.*
(а) Если для любого элемента $f \in H$ *орторекурсивные разложения по этим последовательностям подпространств совпадают, то* $V_1 = W_1$ *и* $\left(V_n \cap \mathbf{R}_{n-1}^{\perp}\right)^{\perp/V_n} = \left(W_n \cap \mathbf{R}_{n-1}^{\perp}\right)^{\perp/W_n}$ *при всех* $n > 1$, *где* $\mathbf{R}_{n-1} = \{r_{n-1}(f)\}_{f \in H}$ *— подпространство всех* $(n-1)$*-х остатков (совпадающее для последовательностей подпространств* $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$*).*
(б) Обратно, если $V_1 = W_1$ *и при всех* $n > 1$ *имеет место равенство* $\left(V_n \cap (\mathbf{R}_{n-1}^{V})^{\perp}\right)^{\perp/V_n} = \left(W_n \cap (\mathbf{R}_{n-1}^{W})^{\perp}\right)^{\perp/W_n}$, *где* $\mathbf{R}_{n-1}^{V}$ *и* $\mathbf{R}_{n-1}^{W}$ *— подпространства всех* $(n-1)$*-х остатков орторекурсивного разложения по последовательности подпространств* $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ *соответственно, то для любого элемента* $f \in H$ *орторекурсивные разложения по последовательностям подпространств* $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ *совпадают.*

Применение сформулированного критерия может быть проиллюстрировано на примере разложений по системам типа Хаара, рассмотренных в [5].

Пусть $v = \{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность различных точек отрезка $I = [a, b]$, причем $v_0 = a$, $v_1 = b$. Определим последовательность функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ на I следующим образом: положим $\varphi_1(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{b-a}}$; при $k > 1$ положим $a_k = \max\{v_j : v_j < v_k,\, j < k\}$, $b_k = \min\{v_j : v_j > v_k,\, j < k\}$,

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{b_k - v_k}}{\sqrt{(v_k - a_k)(b_k - a_k)}}, \text{ если } x \in (a_k, v_k), \\ -\frac{\sqrt{v_k - a_k}}{\sqrt{(b_k - v_k)(b_k - a_k)}}, \text{ если } x \in (v_k, b_k), \\ 0, \text{ если } x \notin [a_k, b_k]. \end{cases}$$

Построенная система функций ортонормирована в $\mathrm{L}^2(I)$. Разложение в ряд Фурье по ней совпадает с орторекурсивным разложением по последовательность одномерных подпространств, задаваемых функциями введенной системы ($V_n(v) = \mathrm{span}\{\varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$).

Замечание. Если $[a, b] = [0, 1]$ и для $k = 2^m + j \geqslant 2$ ($1 \leqslant j \leqslant 2^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$) $v_k = \frac{2j-1}{2^{m+1}}$, то система функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ совпадает с системой Хаара (см., например, [7, Гл. 3]). В [5] доказано, что если система точек $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ всюду плотна на I, то для любой $f \in \mathrm{L}^2(I)$ ряд Фурье $\sigma(f)$ по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f. Если система точек $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ не является всюду плотной на I, то найдутся функции $f \in \mathrm{L}^2(I)$, ряды Фурье которых не будут сходится к ним.

Свяжем теперь с этой же последовательностью точек υ другую последовательность функций $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$: положим $\lambda_1(x) = \varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$ на I; при $k > 1$ положим

$$\lambda_{2k-2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a_k, \upsilon_k], \\ 1, & x \in (a_k, \upsilon_k), \end{cases} \quad \lambda_{2k-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [\upsilon_k, b_k], \\ 1, & x \in (\upsilon_k, b_k), \end{cases}$$

где, как и выше, $a_k = \max\{\upsilon_j : \upsilon_j < \upsilon_k,\, j < k\}$, $b_k = \min\{\upsilon_j : \upsilon_j > \upsilon_k,\, j < k\}$.

Построенная система функций не ортогональна. Функция φ_k является линейной комбинацией функций λ_{2k-2} и λ_{2k-1} и ортогональна их сумме.

Определим по функциональной последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность подпространств: $W_1(\upsilon) = \mathrm{span}\{\lambda_1\}$, $W_n(\upsilon) = \mathrm{span}\{\lambda_{2n-2}, \lambda_{2n-1}\}$, $n = 2, 3, \ldots$.

Утверждение. *Пусть $\upsilon = \{\upsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность различных точек отрезка $I = [a, b]$, $\upsilon_0 = a$, $\upsilon_1 = b$. Тогда одинаковы орторекурсивные разложения по любым последовательностям подпространств $\{U_n(\upsilon)\}_{n=1}^{\infty}$, где $U_n(\upsilon)$ — это $V_n(\upsilon)$ или $W_n(\upsilon)$.*

Литература

1. *Лукашенко Т.П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Матем. Механ. 2001. № 1. С. 6–10.

2. *Лукашенко Т.П., Садовничий В.А.* О рекурсивных разложениях по цепочке систем // ДАН. 2009. Т. 425. №6. С. 741-746.

3. *Терехин П.А.* Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по системам сжатий и сдвигов // Изв. ВУЗов. Сер. мат. 1999. № 8. С. 74–81.

4. *Политов А.В.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., Мех. 2010. № 3. С. 3–7.

5. *Лукашенко Т.П., Садовничий В.А.* Орторекурсивные разложения по подпространствам // ДАН, 2012. Т. 445. № 2. С. 135-138.

6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.–570 с.

7. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.– 550 с.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НА ГРАФЕ

Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А. (Калуга)

К необходимости построения решений нестационарных краевых задач на графе приводят модели явлений переноса, например, теплопроводности, в системах стержней и оболочек. Если стационарные задачи исследовались в ряде работ [1], то даже самые основные нестационарные задачи требуют создания достаточно общего и эффективного метода решения.

В настоящем сообщении показано, что методы формализма Берса позволяют не только представить решение на графе через решение на каждом ребре, но дают аппарат для получения условий нахождения собственных значений и нормировки в достаточно общем случае.

Решение задачи Фурье теплопроводности на графе приводит к необходимости решения уравнения вида

$$D_{2i}D_{1i}U^{(i)} + l_i^2 U^{(i)} = 0,$$

при $D_{1i} = a_{1i}(x)\frac{d}{dx}$, $D_{2i} = a_{2i}(x)\frac{d}{dx}$ и $l_i^2 = m_i^2 - k^2 + \lambda^2$.

Условие согласования состоит в непрерывности функции на графе G и суммарной непрерывности ее D_1–производной.

Рассмотрим i-ую вершину, определенную координатой x_i. Пусть α, β номера ребер из общего множества V_i — рёбер, примыкающих к вершине i. Общее решение для ребра α, примыкающего к вершине i, которое обращается в ноль на другой вершине, имеет форму произведения

$$U_i^{(\alpha)} = c_i \prod_{\beta \in V_i} \sin l_\beta X_\beta(x_i + (x - x_i)\delta_{\alpha\beta}, x_j), \tag{1}$$

здесь x_i — координата ребра β, отличная от x_i, а $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронеккера. Не исключено, что координаты x_j рёбер могут совпадать. Основные свойства этих решений можно сформулировать так: они все на соответствующем ребре удовлетворяют уравнению, все решения исчезают при x_j, при $x = x_i$ они все равны между собой.

Например, для случая простейшего графа вида, представленного на рис.1.

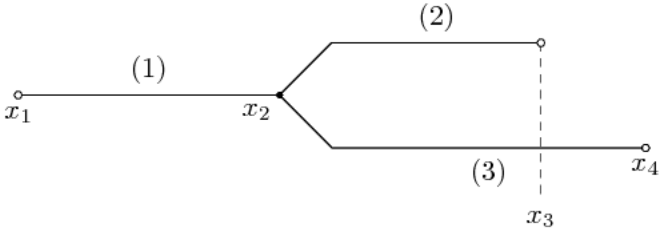


Рис. 1

В этом случае $i = 2$, $j = 1, 3, 4$, $\alpha = 1, 2, 3$. Если ввести сокращенное обозначение

$$\sin l_\beta X_\beta(x_i, x_j) = S_\beta(x_i, x_j),$$

то имеем

$$\begin{aligned} U_2^{(1)} &= c_2 S_1(x, x_1) S_2(x_2, x_3) S_3(x_2, x_4), \\ U_2^{(2)} &= c_2 S_1(x_2, x_1) S_2(x, x_3) S_3(x_2, x_4), \\ U_2^{(3)} &= c_2 S_1(x_2, x_1) S_2(x_2, x_3) S_3(x, x_4). \end{aligned}$$

Используем условие суммарной непрерывности D_1-производной

$$D_{1(2)} U^{(1)} \Big|_{x_2} = D_{1(2)} U^{(2)} \Big|_{x_2} + D_{1(3)} U^{(3)} \Big|_{x_2}$$

и тот факт, что

$$D_{1(i)} \sin l_i X_i = D_1 S_i = l_1 \cos l_i X_i = \tilde{c}_i,$$

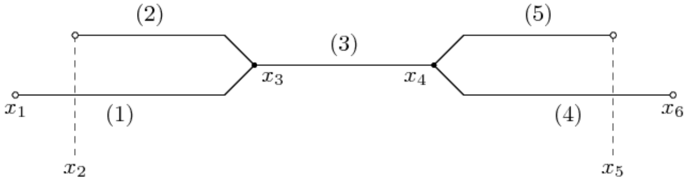
найдем условия для определения собственных значений

$$\tilde{c_1}(x_2, x_1) S_2(x_2, x_3) S_3(x_2, x_4) =$$
$$S_1(x_2, x_1) \tilde{c_2}(x_2, x_1) S_3(x_2, x_4) + S_1(x_2, x_1) S_2(x_2, x_3) \tilde{c_3}(x_2, x_4).$$

Константа c остаётся произвольной.

При переходе к произвольному графу необходимо построить решение типа (1) для всех внутренних вершин. Далее нужно сложить решения на общих внутренних рёбрах. При этом условие непрерывности решение будет сохранено в силу нулевого значения на концах рёбер. Значения констант c_i на каждой вершине найдем из условий для сохранения потоков (суммарная непрерывность D_1–производной на графе). Условие обращения в ноль определителя системы приводит к уравнению для определения собственных значений.

Например, рассмотрим граф вида



Записав условия типа (1) для вершин 3 и 4 и, сложив решение на общем ребре 3, выпишем решения для всего графа, которое имеет пять компонент.

Литература

1. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Моделирование процесса теплопроводности в материале трубы при наличии внешнего и внутреннего продольного оребрения. Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования, ВГУ, 2012.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ, СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА[1]

Головко Н.И., Бондрова О.В. (Владивосток)
ygolovko@yahoo.com

Аналитическими моделями информационных и социальных сетей в целом и их отдельных фрагментов являются, соответственно, сети и системы массового обслуживания (СМО) [2]. Функционирование узлов локальных вычислительных сетей, а также узлов глобальных вычислительных сетей описывается СМО с параметрами, изменяющимися в случайные моменты времени [3]. В некоторых технических и социальных системах появилась необходимость исследования моделей СМО со скачкообразной интенсивностью входного потока [1], бесконечным накопителем, экспоненциальным обслуживанием, одним обслуживающим прибором. Например, в таких технических системах как узлы локальных и глобальных вычислительных сетей, центры профилактических обслуживающих

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000)

устройств, в социальных системах, таких как информационные социальные сети, транспортные системы, медицинское обслуживание, страховое дело [3].

В данном докладе представлены результаты диссертационных исследований характеристик числа заявок и времени ожидания в описанной выше системе массового обслуживания.

Получены следующие результаты относительно характеристик числа заявок. Построены математические модели по числу заявок, представляющие собой системы интегро-дифференциальных уравнений типа Колмогорова-Чепмена с дополнительной интегральной операторной составляющей. Строго доказано существование и единственность решений уравнений относительно стационарных и нестационарных вероятностных характеристик числа заявок СМО; найдены стационарные и нестационарные вероятностные характеристики числа заявок СМО; предложен новый метод производящих функций с новыми типами операторов для анализа стационарного и нестационарного распределения числа заявок. Показана стабилизация нестационарного режима к стационарному.

Относительно характеристик времени ожидания построены математические модели СМО, представляющие собой уравнения типа Такача относительно стационарных и нестационарных вероятностных характеристик незавершенной работы. Доказано существование и единственность стационарных и нестационарных решений полученных уравнений, найдены эти решения. Доказана равномерная сходимость нестационарных решений уравнений к стационарным.

Проведен численный анализ с целью апробации разработанных численных методов и верификации полученных результатов путем сравнения полученных характеристик различными численными методами. Численно исследованы вероятностные характеристики.

Литература

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматгиз, 1961.

Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979.

Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979. – 600 с.

АНАЛИЗ СТАБИЛИЗАЦИИ В СМО СО СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА И РЕЗЕРВНЫМ ПРИБОРОМ

Головко Н.И., Крылова Д.С. (Владивосток)
krylovadiana@mail.ru

В настоящее время в литературе большое внимание уделяется моделированию систем массового обслуживания (СМО) с входным дважды стохастическим (ДС) пуассоновским потоком (ПП). Такие модели СМО применяются в информационных сетях, в медицинском обслуживании, в страховом деле, при эксплуатации различных транспортных систем, при профилактическом обслуживании технических устройств и в других сферах деятельности. В работе приводится анализ СМО с бесконечным накопителем, скачкообразной интенсивностью входного ДС ПП, с основным и резервным прибором, с экспоненциальным обслуживанием интенсивности μ на основном приборе и $\mu+\Delta$ на резервном приборе, который включается, если число заявок в СМО превысит или будет равным ν. Интенсивность $\lambda(t)$ меняется на $[a,b]$, интервалы постоянства T имеют экспоненциальное распределение с параметром α. Считается, что одновременно выполняется условия отсутствия перегрузок на двух приборах $b<\mu$, $b<\mu+\Delta$. Значения процесса в точках разрыва справа не зависят от значений процесса в точках разрыва слева и имеют плотность распределения $\varphi(x)$.

В работе исследовано нестационарное распределение числа заявок. С помощью функционально-аналитического метода найдена нестационарная производящая функция $F(t,x,z) = \sum_{n\geqslant 0} z^n \mathsf{P}\{\xi(t)=n,\, x<\lambda(t)<x+dx\}/dx$, $\xi(t)$ - число заявок в момент времени t. С применением методов функционального анализа доказано, что в СМО возникает стабилизация нестационарного режима для любых начальных условий: $\lim_{t\to\infty} F(t,x,z) = F(x,z)$, где $F(x,z) = \sum_{n\geqslant 0} z^n \mathsf{P}\{\xi=n,\, x<\lambda<x+dx\}/dx$, ξ - число заявок в стационарном режиме.

Литература

Королюк В.С. Стохастические модели систем. - Киев: Наукова думка, 1989. - 205 с.

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ-ХААРА[1]

Голубов Б.И. (Долгопрудный), Волосивец С.С. (Саратов)
golubov@mail.mipt.ru, volosivetsss@mail.ru

Ортонормированная на отрезке $[0,1]$ система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (см., например, [1], с. 77) была построена в 1909 г. На ее примере Хаар дал положительный ответ на вопрос Гильберта: существуют ли ортонормированные системы, ряды Фурье по которым от непрерывных функций сходятся к ним равномерно на отрезке ортогональности. Система Хаара обладает и другими замечательными свойствами. Например, Фабер в 1910 г. доказал, что система функций $\{1, \int_0^x \chi_n(t)dt\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в пространстве $C[0,1]$ непрерывных функций. П.Л. Ульянов [2] показал, что система Хаара может быть полезной при решении важных вопросов общей теории ортогональных рядов. Рядам Фурье-Хаара посвящена глава 3 книги [1].

Для функции $f \in L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, определим ее L_p – модуль непрерывности

$$\omega\left(\delta, f\right)_p = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \left(\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad (0 \leqslant \delta \leqslant 1)$$

и коэффициенты Фурье-Хаара $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\chi_n(x)dx$, $n \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Если* $f \in L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\beta/2}\omega^{\beta}\left(\frac{1}{n}, f\right)_p$ $< \infty$ *при некоторых* $\beta > 0$ *и* $\gamma \in \mathbb{R}$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}\left|\hat{f}(n)\right|^{\beta} < \infty$.

Подобная теорема при другом определении L_p-модуля непрерывности доказана в работе З. Чисельского и Й. Муселака [3]. В случае $1 \leqslant \beta = p < \infty$, $\gamma = 0$ утверждение теоремы 1 легко следует из неравенства П.Л. Ульянова [4]:

$$\left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \left|\hat{f}(n)\right|^p\right)^{1/p} \leqslant 8 \cdot 2^{n(1/p-1/2)}\omega\left(2^{-n}, f\right)_p \ (n = 0, 1, ...).$$

[1]Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00321).Работа второго автора поддержана РФФИ(проект №10-01-00270-а)

Из теоремы 1 можно извлечь следствия, имеющие окончательный характер.

Напомним, что функция f принадлежит классу Винера $V_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, если $V_p(f) = \sup\limits_{\tau}\{\sum\limits_{j=1}^{l} |f(x_j) - f(x_{j-1})|^p\}^{1/p} < \infty$, где $\tau = \{0 = x_0 < x_1 < ... < x_l = 1\}$. Очевидно, $V_1[0,1]$ – класс Жордана функций ограниченной вариации на отрезке [0,1].

Используя неравенство $\omega\,(\delta, f)_p \leqslant 3^{1/p} V_p(f) \delta^{1/p}\,(0 < \delta < 1)$ (см. [5], лемма 2), из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Если* $f \in V_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} \left|\hat{f}(n)\right|^{\beta} < \infty$ *при условии* $\gamma + 1 < \beta\,(1/p + 1/2)\,,\ \beta > 0$.

Для $p = 1$, $\gamma = 0$, $\beta > 2/3$ и $p = 1$, $\beta = 1$, $\gamma < 1/2$ утверждение этого следствия доказано П.Л. Ульяновым [4], который установил его точность в этих случаях, указав примеры функций $f \in V_1[0,1]$, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^{2/3} = \infty$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{1/2} \left|\hat{f}(n)\right| = \infty$.

Пусть $Lip\,\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$– класс функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α на отрезке [0,1]. Очевидно, $Lip\,(1/p) \subset V_p[0,1]\,(1 \leqslant p < \infty)$. Поэтому, из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Если* $f \in Lip\,\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} \left|\hat{f}(n)\right|^{\beta} < \infty$ *при условии* $\gamma + 1 < \beta(\alpha + 1/2)$, $\beta > 0$.

Утверждения следствий 1 и 2 ранее доказаны в работе автора [6], где показано, что первое из них теряет силу при $\gamma + 1 = \beta(1/p + 1/2)$, $\beta > 0$, а второе – при $\gamma + 1 = \beta(\alpha + 1/2)$, $\beta > 0$. Отметим также, что следствие 2 в случае $\gamma = 0$ является аналогом теоремы О. Саса (см. [7], с. 647), а в случае $\beta = 1$ – аналогом теоремы Харди [8], относящихся к тригонометрическим рядам Фурье.

Аналог теоремы 1 справедлив и в двумерном случае. Пусть задана функция двух переменных $f \in L^p(\Delta)$, $1 \leqslant p < \infty$, где $\Delta = [0,1] \times [0,1]$. Определим для нее два частных и смешанный модули непрерывности в метрике L^p:

$$\omega_1\,(\delta, f)_p = \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \left(\int_0^{1-h} \int_0^1 |f(x+h, y) - f(x,y)|^p \; dx\, dy \right)^{1/p},$$

$$\omega_2\,(\delta, f)_p = \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \left(\int_0^1 \int_0^{1-h} |f(x+h, y) - f(x,y)|^p \; dx\, dy \right)^{1/p},$$

$$\omega_{1,2}\left(\delta_1,\delta_2,f\right)_p=\sup_{0\leqslant u\leqslant\delta_1}\ \sup_{0\leqslant v\leqslant\delta_2}\left(\int_0^{1-u}\int_0^{1-v}\left|\Delta_{u,v}f(x,y)\right|^p\,dx\,dy\right)^{1/p},$$

где $\Delta_{u,v}f(x,y)=f(x+u,y+v)-f(x+u,y)-f(x,y+v)+f(x,y)$, $0\leqslant\delta\leqslant 1$, $0\leqslant\delta_i\leqslant 1$, $i=1,2$.

Далее положим $\hat{f}(m,n)=\iint_\Delta f(x,y)\chi_m(x)\chi_n(y)dxdy$, т.е. $\hat{f}(m,n)$– коэффициенты Фурье функции f по двукратной системе Хаара $\{\chi_m(x)\chi_n(y)\}_{m,n=1}^\infty$.

Теорема 2. *Если $f\in L^p(\Delta)$, $1\leqslant p<\infty$, причем $\sum\limits_{n=1}^\infty n^{\gamma-\beta/2}\cdot\omega_k^\beta(\frac{1}{n},f)_p<\infty$, $k=1,2$, и $\sum\limits_{m=1}^\infty\sum\limits_{n=1}^\infty(mn)^{\gamma-\beta/2}\omega_{1,2}^\beta\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n},f\right)_p<\infty$, где $\beta>0$, $\gamma\in\mathbb{R}$, то $\sum\limits_{m=1}^\infty\sum\limits_{n=1}^\infty(mn)^\gamma\left|\hat{f}(m,n)\right|^\beta<\infty$.*

Из этой теоремы можно получить двумерные аналоги следствий 1 и 2. Введем определение функции ограниченной p–вариации в смысле Харди на квадрате $\Delta=[0,1]\times[0,1]$. Пусть заданы две системы точек $\tau_1=\{0=x_0<x_1<...<x_r=1\}$ и $\tau_2=\{0=y_0<y_1<...<y_l=1\}$. Если для функции $f(x,y)$, заданной на квадрате Δ, при некотором $p\in[1,\infty)$ следующие три величины

$$V_{1,0}(f)_p=\sup_{0\leqslant y\leqslant 1}\sup_{\tau_1}\left\{\sum_{i=1}^r|f(x_i,y)-f(x_{i-1},y)|^p\right\}^{1/p},$$

$$V_{0,1}(f)_p=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\sup_{\tau_2}\left\{\sum_{j=1}^l|f(x,y_j)-f(x,y_{j-1})|^p\right\}^{1/p},$$

$$V_{1,1}(f)_p=\sup_{\tau_1,\tau_2}\{\sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^l|f(x_i,y_j)-f(x_{i-1},y_j)-$$

$$-f(x_i,y_{j-1})+f(x_{i-1},y_{j-1})|^p\}^{1/p}$$

конечны, то будем писать $f\in V_p(\Delta)$ и говорить, что функция f имеет ограниченную p –вариацию в смысле Харди на квадрате Δ. Отметим, что класс $V_1(\Delta)$ ввел Харди [9].

Следствие 3. *Если $f\in V_p(\Delta)$, $p\in[1,\infty)$, то $\sum\limits_{m=1}^\infty\sum\limits_{n=1}^\infty(mn)^\gamma\cdot\left|\hat{f}(m,n)\right|^\beta<\infty$ при условии $\gamma+1<\beta(1/p+1/2)$, $\beta>0$.*

Утверждение этого следствия ранее доказано в работе автора [6], где также показано, что оно теряет силу, если $\gamma + 1 = \beta(1/p + 1/2) > 0$.

Будем писать $f \in Lip\,\alpha\,(0 < \alpha \leqslant 1)$ на Δ, если

$$||f(\cdot + h, \cdot + \eta) - f(\cdot, \cdot)||_C = O\left((h^2 + \eta^2)^{\alpha/2}\right),\ (h, \eta) \in \Delta.$$

Легко видеть, что $Lip\,\alpha \subset V_{2/\alpha}(\Delta)$, $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Поэтому из следствия 3 вытекает

Следствие 4. *Если $f \in Lip\,\alpha\,(0 < \alpha \leqslant 1)$ на Δ, то* $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(mn)^{\gamma}\left|\hat{f}(m,n)\right|^{\beta} < \infty$ *при условии* $\gamma + 1 < \beta(\alpha+1)/2$, $\beta > 0$.

Утверждение этого следствия известно (см. [10], где также доказано, что при $\gamma + 1 = \beta(\alpha + 1)/2$, $\beta > 0$ оно теряет силу). В случае $\gamma = 0$ следствие 4 ранее установлено в работе [11], где также доказано, что в этом случае оно не справедливо при $\beta(\alpha + 1)/2 = 1$.

Литература

1. *Б.С. Кашин, А.А. Саакян.* Ортогональные ряды. М.: «Наука», 1984. – 496 с.

2. *П.Л. Ульянов.* Расходящиеся ряды Фурье // Успехи мат. наук, 16, №3 (1961), 61-142.

3. *Z. Ciesielski, J. Musielak.* On absolute convergence of Haar series // Colloq. math. 7, №1 (1959), 61-65.

4. *П.Л. Ульянов.* О рядах по системе Хаара // Мат. сборник, 63, № 3 (1964), 356-391.

5. *Б.И. Голубов.* О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара // Изв. АН СССР, 28, № 6 (1964), 1271-1296.

6. *Б.И. Голубов.* Абсолютная сходимость двойных рядов из коэффициентов Фурье-Хаара функций ограниченной p-вариации // Известия вузов. Математика, № 6 (2012), 3-13.

7. *Н.К. Бари.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

8. *G.H. Hardy.* Weierstrass nondifferentiable function // Trans. Amer. Math. Soc., 17 (1916), 301-325.

9. *G.H. Hardy.* On double Fourier series and especially those which represent the double zeta-function with real and incommensurable parameters // Quart. J. Math., 37, N 1 (1905), 57-79.

10. *Г.З. Табатадзе.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье-Хаара // Сообщ. АН Груз. ССР, 103, № 3 (1981), 541-543.

11. *В.Ш. Цагарейшвили.* О коэффициентах Фурье-Хаара // Сообщ. АН Груз. ССР, 81, № 1 (1976), 29-31.

ПРИЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ КОМПЕТЕНТНОГО ПОДХОДА НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Гончарова Н.В. (Новая Усмань)

Одной из главных целей обучения математике является подготовка учащихся к повседневной жизни, а также развитие их личности средствами математики. В связи с практической ориентированностью современного образования основным результатом деятельности образовательного учреждения должна стать не система знаний, умений и навыков сама по себе, а набор ключевых компетентностей.

Компетенция — это готовность (способность) ученика использовать усвоенные знания, учебные умения и навыки, а также способы деятельности в жизни для решения практических и теоретических задач. В частности, **математическая компетенция** — это способность структурировать данные (ситуацию), вычленять математические отношения, создавать математическую модель ситуации, анализировать и преобразовывать ее, интерпретировать полученные результаты. Иными словами, математическая компетенция учащегося способствует адекватному применению математики для решения возникающих в повседневной жизни проблем.

Рассмотрим формирование ключевых образовательных компетенций на уроках математики (классификация по А.В.Хуторскому):

1. Ценностно-смысловые компетенции. Это компетенции в сфере мировоззрения, связанные с ценностными ориентирами ученика, его способностью видеть и понимать окружающий мир.

Учащиеся овладевают данной компетенцией, например, при работе над проектом, обосновывая выбор темы, её актуальность, определяя цели и задачи, намечая план работы. Работая в группах, дети берут ответственность на себя (становятся лидером в группе), принимают решение.

2. Общекультурные компетенции. Ученик должен быть хорошо осведомлен, обладать познаниями и опытом деятельности в вопросах национальной и общечеловеческой культуры, духовно-нравственных основ жизни человека и человечества.

Формирование данной компетенции происходит на уроках математики, факультативах и во внеурочной деятельности. Средствами математики происходит воспитание отношения учеников к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

3. Учебно-познавательные компетенции. Сюда входят знания и умения организации целеполагания, планирования, анализа, рефлексии, самооценки учебно-познавательной деятельности.

Реализация данной компетенции перекликается с такими технологиями как развивающее обучение, проблемное обучение. Момент совместного целеполагания присутствует практически на каждом уроке. При изучении новой темы учащиеся под руководством учителя сами формулируют тему, ставят цели и задачи изучения темы, составляют план, определяют её практическую значимость. В процессе решения учебной задачи или проблемы выдвигают гипотезы, оценивают начальные данные и предполагаемый результат, учатся давать самооценку своей деятельности.

4. Информационные компетенции. При помощи реальных объектов и информационных технологий формируются умения самостоятельно искать, анализировать и отбирать необходимую информацию, организовывать, преобразовывать, сохранять и передавать ее.

В ходе изучения математики, у учащихся возникает потребность в получении новой информации. С этой целью привлекаются различные источники информации: Интернет-ресурсы, справочники, энциклопедии, словари. Использование компьютера на уроках вызывает интерес и оживление учащихся.

5. Коммуникативные компетенции. Включают знание необходимых языков, способов взаимодействия с окружающими и удаленными людьми и событиями, навыки работы в группе, владение различными социальными ролями в коллективе.

Учащиеся учатся развёрнуто обосновывать суждения, давать определения, приводить доказательства, объяснять изученные положения на самостоятельно подобранных примерах, владеть видами публичных выступлений (например, участвуя в защите проекта).

7. Компетенции личностного самосовершенствования. К данным компетенциям относятся правила личной гигиены, забота о собственном здоровье, половая грамотность, внутренняя экологическая культура. Сюда же входит комплекс качеств, связанных с основами безопасной жизнедеятельности личности.

Для развития этой компетенции эффективны не только уроки математики, но и предоставление учащимся возможности проявить себя во внеурочной сфере. На уроках это отстаивание своей точки зрения, своего способа решения задачи, отличного от общего. Во внеурочной деятельности – наличие способности действовать в собственных интересах (участие в олимпиадах и конкурсах, заочных конкурсах и др.).

Формирование ключевых компетенций в образовательном процессе школьников на уровне уроков математики рассматривается как особым образом организованная модель взаимодействия участников образовательного процесса на уровне «учитель–ученик», «ученик–ученик».

Компетентностный подход в преподавании математики позволяет повысить эффективность результатов обучения и предполагает освоение обучающимися различного рода умений, позволяющих им в будущем действовать эффективно в ситуациях профессиональной, личной и общественной жизни.

СВЯЗЬ МЕЖДУ МОДУЛЕМ ГЛАДКОСТИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Горбачев Д.В. (Тула), Тихонов С.Ю. (Москва)
dvgmail@mail.ru

Обсуждаются оценки преобразования Фурье функций из $L^p(\mathbb{R}^d)$ в терминах модулей гладкости этих функций [1–3], обобщающие лемму Римана–Лебега.

Пусть $V_{l,t}f(x) := \frac{-2}{\binom{2l}{l}} \sum_{j=1}^{l} (-1)^j \binom{2l}{l-j} V_{jt}f(x)$, где $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ и $V_t f(x) := \frac{1}{m_t}\int_{|y-x|=t} f(y)\,dy$ $(V_t 1 = 1)$ — оператор среднего значения функции f.

Функция $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется обобщенно-монотонной ([2, 3]), если вне окрестности нуля она имеет ограниченную вариацию, $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\int_z^\infty |d\varphi(u)| = O(\int_{z/2}^\infty \frac{|\varphi(u)|}{u}\,du)$.

Пусть $\widehat{GM}^d$, $d \geqslant 1$, — множество радиальных функций $f(x) = f_0(|x|)$, представимых обратным преобразованием Фурье–Ганкеля

$f(x) = |S^{d-1}|/(2\pi)^d \int_0^\infty F_0(s) j_{d/2-1}(|x|s) s^{d-1}\,ds$,

где $F_0 \in GM$, причем $\int_0^\infty \min(s^{d-1}, s^{(d-1)/2})|F_0(s)|\,ds < \infty$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 10-01-00564-а, 12-01-00169) и Н.Ш.-979-2012-1.

При $d \geqslant 2$ справедливо следующее утверждение (одномерный вариант см. в [3]).

Теорема. *Если* $f \in \widehat{GM}^d \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f} \geqslant 0$, $\frac{2d}{d+1} < p < \infty$, *то*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left[\min(1, t|\xi|)^{2l} |\xi|^{d(1-2/p)} |\widehat{f}(\xi)|\right]^p d\xi\right)^{1/p} \asymp \|f - V_{l,t} f\|_p.$$

Литература

1. *Ditzian Z.* Smoothness of a function and the growth of its Fourier transform // J. Approx. Theory. 2010, V. 162, № 5. P. 980–986.

2. *Gorbachev D., Tikhonov S.* Moduli of smoothness and growth properties of Fourier transforms: two-sided estimates// Journal of Approx. Theory, Vol. 164, Is. 9 (2012), 1283–1312.

3. *Tikhonov S.* Trigonometric series with general monotone coefficients // Jour. Math. Anal. Appl., Vol. 326, 1, 721–735, 2007.

УСТОЙЧИВАЯ ТЕОРЕМА КУНА–ТАККЕРА В РАВНОМЕРНО–ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Горшков А.А., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

tiger-nn@mail.ru, m.sumin@mail.ru

В докладе обсуждается так называемая устойчивая теорема Куна–Таккера в секвенциальной недифференциальной форме [1] в задаче выпуклого программирования

$$f(z) \to \min,\ Az = h,\ g_i(z) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m,\ z \in D \subset Z, \quad (1)$$

где $f : D \to R$ — непрерывный строго равномерно–выпуклый функционал, $g_i : D \to R$, $i = 1, \ldots, m$ — непрерывные выпуклые функционалы, $A : Z \to H$ — линейный непрерывный оператор, $h \in H$ — заданный элемент, D — выпуклое замкнутое ограниченное множество, Z, H — равномерно–выпуклые банаховы пространства.

В отличие от классической теорема Куна–Таккера, являющейся, как известно, центральным результатом в теории выпуклой условной оптимизации, обсуждаемая устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера, во-первых, справедлива для любой задачи вида (1) с непустым множеством $\{z \in D : Az = h,\ g_i(z) \leqslant 0,\ i =$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00199-a) и Минобрнауки РФ (шифр заявки 1.1907.2011).

$1, \ldots, m,\}$ без каких-либо условий ее регулярности и, во-вторых, является устойчивой по отношению к ошибкам исходных данных.

В случае гильбертовых пространств Z, H полностью аналогичная устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера, представляющая собой утверждение в терминах минимизирующих последовательностей о возможности аппроксимации решения задачи (1) точками минимума ее функции Лагранжа без каких-либо предположений регулярности самой оптимизационной задачи, рассматривалась в [1]. Доказательство указанной теоремы в случае равномерно–выпуклых пространств Z, H основано, так же, как и в [1], на идеологии двойственной регуляризации, которая предварительно обобщается на случай равномерно–выпуклых пространств Z, H.

Литература

1. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. №9. С. 1594-1615.

РАВНОСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ В КРАТНЫЙ РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ С "ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ"

Графов Д.А. (Москва)
grafov.den@yandex.ru

Пусть 2π-периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi)^N$, $N \geqslant 1$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье $f(x) \sim \sum c_k e^{ixk}$, и $S_n(x; f)$, $n \in \mathbb{Z}_+^N$, — прямоугольная частичная сумма этого ряда, и пусть функция $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $N \geqslant 1$, разложена в кратный интеграл Фурье $g(x) \sim \int \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$, и $J_\alpha(x; g)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^N$, — собственный интеграл Фурье.

Предположим, что $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^N$ и $g(x) = 0$ вне $\mathbb{T}^N$. Рассмотрим $R_\alpha(x; f) = R_\alpha(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)$, $n = [\alpha] = ([\alpha_1], \ldots, [\alpha_N]) \in \mathbb{Z}_+^N$ (здесь $[t]$ — целая часть $t \in \mathbb{R}_+^1$). В работе И. Л. Блошанского [1] было показано, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$ разность $R_\alpha(x; f) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ (т.е $\min\limits_{1 \leqslant s \leqslant N} \alpha_s \to \infty$) почти всюду (п.в.) на $\mathbb{T}^2$, и существует функция $f_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geqslant 3$, такая, что $\varlimsup\limits_{\alpha \to \infty} |R_\alpha(x; f_0)| = +\infty$ всюду внутри $\mathbb{T}^N$.

Хорошо известно, что в классах L_p, $p > 1$, некоторые подпоследовательности частичных сумм кратных рядов Фурье обладают лучшими свойствами сходимости п.в. по сравнению со всей последовательностью $S_n(x; f)$, например, те подпоследовательности, у которых компоненты вектора n являются элементами (однократных) лакунарных последовательностей ($\{k^{(s)}\}, k^{(s)} \in \mathbb{Z}^1_+$, – лакунарная последовательность, если $k^{(s+1)}/k^{(s)} \geqslant q > 1$, $s = 1, 2, \dots$). Возникает вопрос, как ведет себя разность $R_\alpha(x; f, g)$, если некоторые компоненты n_j вектора $n = [\alpha]$ являются лакунарными последовательностями.

Обозначим $R_{\alpha_1^{(\lambda_1)},\dots,\alpha_{N-1}^{(\lambda_{N-1})},\alpha_N}(x;f) = S_{n_1^{(\lambda_1)},\dots,n_{N-1}^{(\lambda_{N-1})},n_N}(x;f) - J_{\alpha_1^{(\lambda_1)},\dots,\alpha_{N-1}^{(\lambda_{N-1})},\alpha_N}(x;g)$, где $n_j^{(\lambda_j)} = [\alpha_j^{(\lambda_j)}]$, $j = 1, \dots, N-1$, — некоторые лакунарные последовательности, $n_N = [\alpha_N]$, $N \geqslant 3$.

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geqslant 3$,

$$\lim_{\lambda_1,\dots,\lambda_{N-1},\alpha_N\to\infty} R_{\alpha_1^{(\lambda_1)},\dots,\alpha_{N-1}^{(\lambda_{N-1})},\alpha_N}(x;f) = 0 \quad \text{п. в. на} \quad \mathbb{T}^N.$$

Заметим, что результат теоремы 1 не может быть усилен в следующем плане (см. [2]): если мы оставляем две компоненты вектора n (а значит вектора α) "свободными" (т.е., в частности, не являющимися элементами никаких лакунарных последовательностей), то даже в классе $\mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geqslant 3$, равносходимость п.в. рассматриваемых разложений Фурье будет отсутствовать.

Литература

1. *Блошанский И. Л.* Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье// Матем. заметки, 1975, **18**:2, 153-168.

2. *Блошанский И. Л., Графов Д. А.* Вопросы равносходимости разложений в тройной ряд и интеграл Фурье// VII межд. симпозиум "Ряды Фурье и их приложения”. Тезисы докладов. Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, Ростов н/Д, 2012. С. 9-10.

УСЛОВНАЯ ПРИВОДИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ[1]

Гриднева И.В. (Воронеж)

gridneva_irina@bk.ru

В [1] были получены достаточные условия, при которых непрерывная функция со значениями во множестве ограниченных неотрицательных гамильтоновых операторов являлась условно приводимой. В [2] мы обобщаем результаты из [1] для функций, значениями которых являются замкнутые плотно определенные неот-

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-00102-а.

рицательные гамильтоновы операторы заданного вида. Одним из основных результатов является следующая теорема.

Теорема *Пусть $\mathcal{H}$ - гильбертово пространство, являющееся ортогональной суммой двух экземпляров одного и того же гильбертова пространства $\mathcal{G}$. Пусть S - замкнутый плотно определенный гамильтонов оператор на $\mathcal{H}$ с $i\mathbb{R} \subset \rho(S)$ и пусть $\mathfrak{B}$ является непрерывной в равномерной операторной топологии функцией на $[0,1]$ со значениями во множестве ограниченных операторов. Рассмотрим сумму: $\mathfrak{A}(t) = S + \mathfrak{B}(t), \quad t \in [0,1]$.*

Предположим, что для каждого $t \in [0,1]$ оператор $\mathfrak{A}(t)$ является неотрицательным гамильтоновым оператором на $\mathcal{H}$ с $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathfrak{A}(t))$. Если

(i) найдется $\gamma > 0$ такое, что $\|(S-\lambda)^{-1}\| \leqslant \gamma/|\lambda|, \ \lambda \in i\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

(ii) интеграл $\frac{1}{\pi i}\int'_{i\mathbb{R}}(S-\lambda)^{-1}d\lambda$ существует в сильной операторной топологии,

тогда оператор-функция $\mathfrak{A}(t)$ условно $(\mathcal{G},\mathcal{G})$-приводима. Диагональную оператор-функцию V на $[0,1]$ можно выбрать так, чтобы она была непрерывной в равномерной операторной топологии и оператор-функция $V^{-1}\mathfrak{A}V$ была гамильтонианом.

Литература

[1] *Азизов Т.Я., Кириакиди В.К., Курина Г.А.* Индефинитный подход к задаче о приводимости неотрицательно гамильтоновой оператор функции к блочно-диагональной форме. // Функ. анализ и его прил. — 2001. - Т. 35, № 3. - С.73-75.

[2] *Azizov T.Ya., Dijksma A., Gridneva I.V.* Conditional reducibility of certain unbounded nonnegative Hamiltonian operator functions. // Integr. Equ. Oper. Theory 73 (2012), 273-303.

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРЕМЫ БОРСУКА УЛАМА

Губина С.С. (Воронеж)

rydanova_ vrn@mail.ru

В работе [2] было рассмотрено обобщение теоремы Борсука-Улама для квазиобратимых операторов. В настоящей работе будет описано приложение этой теоремы для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$x'' = f(t, x, x'),$$

где $f : R^1 \times R^n \times R^n \to R^n$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему условию $f(t,-x,-y) = -f(t,x,y)$.

Пусть T произвольное положительное число.

Пусть $L : C^1_{[0,T]} \to R^k$, $L(x(\cdot)) = (L_1(x(\cdot)),\dots,L_k(x(\cdot)))$ является вполне непрерывным оператором, $P^2[t] = \{\beta t + \gamma \quad | \quad t \in [0,T], \beta,\gamma \in R^n\}$ — множество линейных функций на отрезке $[0,T]$. Будем предполагать, что отображение L удовлетворяет следующему условию: *сужение оператора L на подпространство* $P^2[t]$ *является сюръективным оператором.* Нас будет интересовать задача существования решений данного уравнения, определенных на отрезке $[0,T]$ и удовлетворяющих следующим условиям: $L_i(x(\cdot)) = 0, i = 1,2,...,k$, $\max\limits_{t\in[0,T]} ||x(t)|| = N$, где N некоторое фиксированное положительное число. Обозначим $\sum_{N,L}([0,T])$ множество решений данной задачи и дадим операторную трактовку. Пусть оператор $M : D(M) \subset C^1_{[0,T]} \to C_{[0,T]} \times R^k$, определен соотношением $M(x(\cdot)) = (x''(\cdot), L(x(\cdot)))$. Нетрудно доказать, что оператор M является квазиобратимым. Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *При сделанных предположениях множество* $\sum_{N,L}([0,T]) \neq \emptyset$ *и* $dim(\sum_{N,L}([0,T])) \geqslant 2n-k-1$.

Справедливость теоремы вытекает из теоремы Борсука-Улама, которая содержится в [2].

Литература

1. *Гельман Б. Д.* Теорема Борсука-Улама в бесконечномерных банаховых пространствах. Матем.сборник, 2002, т.193, № 1. — С. 83-92.

2. *Рыданова С. С.* Теорема Борсука-Улама для квазиобратимых операторов. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна— 2012,2012. - С.193-195.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ СТРИХАРЦА ПО ШАРОВОМУ СЛОЮ[1]

Гуров М.Н., Ногин В.А. (ЮФУ, Ростов-на-Дону)

mgurov@inbox.ru

В работе исследуются дифференциальные свойства обобщенных

[1]Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"(заявка № 2012-1.1-12-000-1003-029).

потенциалов Стрихарца

$$M_\theta^\beta \varphi = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_{1-\delta \leqslant |y| \leqslant 1+\delta} \theta(|y|)(1-|y|^2+i0)^{\beta-1}\varphi(x-y)dy, \; 0<\beta<1,$$

с плотностями из пространств Харди $H^p, 1 < p < \infty$ (при этом $\delta \in (0;1)$, $\theta(r)$ — гладкая функция, называемая характеристикой оператора M_θ^β; $\theta(1) \neq 0$).

В работе доказаны необходимые и достаточные условия ограниченности оператора M_θ^β из пространств H^p в пространства Λ_s гельдеровских функций. При этом были получены специальные представления для символов рассматриваемых операторов в виде суммы некоторых интегралов, содержащих осциллирующие экспоненты к которым применены метод стационарной фазы и результаты A. Miyachi для "модельных" мультипликаторов (см. [1]).

Основным результатом представленных исследований является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $\frac{1}{p} < \beta < 1$. *Оператор* M_θ^β *ограничен из* H^p *в* Λ_s *тогда и только тогда, когда*

$$s \leqslant \beta - \frac{1}{p}.$$

Литература

1. *Miyachi A.* On some singular Fourier multipliers// J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., Sect. IA. 1981. Vol. 28. P. 267-315.

2. *Strichartz R.S.* Convolutions with kernels having singularities on a sphere// Trans. Amer. Math. Soc., 1970. V. 146. P. 461-471.

О НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С СИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ПРОИЗВОДНЫМИ РАДОНА–НИКОДИМА

Давыдова М.Б., Шабров С.А. (Воронеж)

mbd@vsu.ru

Доклад посвящен анализу нелинейной модели, реализуемой в виде

$$\begin{cases} -(pu_x')_\sigma' = F(x,u), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

возникающей при описании деформаций струнной системы, образующихся под воздействием силы, зависящей как от самой точки x, так и от отклонения $u(x)$ точки x струны от положения равновесия, причем нелинейность предполагается «сильной» (типа $F(x,u) = |u|^\alpha$, $\alpha > 1$). В точках ξ, принадлежащих множеству $S(\sigma)$, (1) понимается как равенство $\Delta\left(pu'_x\right)(\xi) = F(\xi, u(\xi))$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ.

Уравнение в (1) задано почти всюду (в смысле меры σ) на множестве $\overline{[0;\ell]}_S$, которое строится следующим образом. Строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция $\sigma(x)$ определяет неполное метрическое пространство $J_S = [0;\ell] \setminus S(\sigma)$, где $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$ с метрикой $\varrho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Стандартное пополнение, при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную пару $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, обозначим через $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$. Объединение $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$ и $S(\sigma)$ нам даёт $\overline{[0;\ell]}_S$.

Будем предполагать, что функция $p(x)$ σ-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$, $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}} p(x) > 0$ и $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: 1) $F(x,u)$ при почти всех x (относительно σ-меры) определена и непрерывна по u; 2) функция $F(x,u)$ измерима по x при каждом u; 3) $|F(x,u)| \leqslant m(x)$, где $m(x)$ σ-суммируемая функция на $\overline{[0;\ell]}_S$.

Решение (1) будем искать в классе E абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых σ-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$.

Условия, которые мы наложили на функции $p(x)$ и $F(x,u)$ обеспечивают разрешимость (1) в E. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия: 1) $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, 2) $F(x,0) \equiv 0$, 3) $F(x,u)$ порождает непрерывный оператор суперпозиции, действующий из $C[0;\ell]$ в некоторое $L_{p,\sigma}[0;\ell]$, 4) при некоторых $0 < r < R < \infty$ справедливо (a) модель (1) при любых $\lambda \in (0;1)$ не имеет решений, удовлетворяющих неравенствам $u_0(x) \cdot \|u\|_C \leqslant u(x) \leqslant r$ ($u_0(x) = \frac{x(\ell-x)}{\ell}$); (b) для некоторой $h(x)$, (отличной от тождественного нуля), принадлежащей $L_{1,\sigma}[0;\ell]$, и для любого $\lambda > 0$ модель $-\left(pu'_x\right)'_\sigma = \lambda f(x,u), u(0) = u(\ell) = 0$, не имеет решений, для которых $u_0(x)\|u\|_C \leqslant u(x) \leqslant R$.*

Тогда нелинейная модель (1) имеет неотрицательное нетривиальное решение.

ИННОВАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Данкова И.Н., Занина О.В., Плетнёва О.К., Гайдукова Н.И. (Воронеж)

Изменение целей образования привело не только к изменению всей методической системы, но и заставило пересмотреть взгляды на показатели результативности педагогического процесса. При оценивании эффективности реализуемого процесса обучения, в первую очередь, необходимо выделять следующие направления:

Сохранение всех показателей здоровья учащихся.

Повышение уровня и качества образования:

–достижение образовательных стандартов;

–обучение на повышенном уровне сложности;

–овладение умениями учиться, учебно-познавательной деятельностью;

–формирование способности переноса знаний, их практическая направленность;

–овладение учащимися ключевыми компетентностями.

Обновленные цели и содержание образования требуют обновления методов структурирования учебного материала. Становится все более востребованной концепция укрупнения дидактических единиц, концепция преемственности образования, а также поиск интегрированных методов, в частности способов интеграции алгебраических и геометрических методов в обучении математике. Актуальны и проблемы развития качеств личности учащегося, особенно таких, как познавательная самостоятельность, интерес к обучению.

Реформирование образования, инновационные процессы серьезно меняют роль и функции учителя в современной школе. Естественно, что новая постановка целей и задач предполагает внесение серьезных изменений в подготовку и переподготовку учителей математики как в научном плане, так и в области методики. Сегодня учитель далеко не является «предметником» в узком смысле этого слова. Внедрение личностно-ориентированных технологий серьезно изменило методику преподавания, да и всю структуру школьной деятельности. Урок уже перестал быть единственной формой организации образовательного процесса, серьезные акценты делаются на формирование первичных исследовательских навыков школьников, организацию проектной деятельности, самостоятельной внеаудиторной и внешкольной работы. Задачи социализации, воспитания, гармоничного развития школьников входят в число важнейших профессиональных задач учителя. Предстоит усилить подготовку всех педагогов к работе с различными возрастными группами детей, с теми, у кого есть проблемы в развитии и в поведении, кто испытывает трудности в жизни. Дети проводят в школе значительную часть дня, поэтому сохранение их физического и психического здоровья – это дело не только семьи, но и педагогов. А для этого, прежде всего, необходимо, чтобы сами педагоги были носителями ценностей здорового образа жизни.

Особенно важно, чтобы учитель не преподавал унифицированный курс, а выстраивал системы дифференцированного обучения математике. Следует учитывать, что сегодня в российском образовании провозглашен принцип вариативности, стандарт фиксирует право учителя предложить собственный подход к достижению поставленных целей, в том числе к отбору содержания и последовательности изучения материала (т.е. в каком классе, какие разделы, с какой продолжительностью и глубиной изучать, какие методики и учебники использовать). И это многократно повышает ответственность учителя и школы за достижение заданных стандартом общего образования результатов обучения математике (особенно с учетом обязательного единого государственного экзамена по данному предмету). К числу новых педагогических компетенций относятся умения, связанные с готовностью преподавать математику в классах различной профильной направленности (гуманитарных, социально-экономических, технологических, естественнонаучных), проводить математические курсы по выбору, кружки, готовить школьников к участию в олимпиадах, конкурсах, турнирах по математике. В этих условиях учителю необходимо ориентироваться в широком спектре современных инновационных технологий, идей, школ, направлений. Обладать способностью анализировать и отбирать содержание образования, использовать методики, стимулирующие познавательную деятельность.

Проблема оценки качества образования является сегодня одной из самых актуальных для всей образовательной системы Российской Федерации. В настоящее время очень важны индивидуальные достижения учащегося, позволяющие ему успешно реализовать себя как всесторонне развитую личность, т.е. быть компетентным – способным применять свои знания и умения, находить новые подходы в оценивании знаний учащихся, современные методы диагностики уровня обученности и обучаемости.

Очевидно, что образование должно быть ориентировано на гарантию качества подготовки школьников на основе создания механизмов эффективного освоения учащимися компетенций, необходимых в дальнейшей деятельности. Одними из главных факторов формирования качества образования являются технология образования и информационно-методическое обеспечение учебного процесса. Компьютеризация образования позволяет изменить не только информационно-методическое обеспечение учебного процесса, но и образования. Мощнейшим средством, поддерживающим компьютеризацию образования, являются информационные ресурсы Интернет. Заметим, что российские образовательные интернет-ресурсы отличаются большим разнообразием по содержанию, форме, способу подачи и представлению материалов. Чтобы все это было доступно школьнику и востребовано им, необходимо, чтобы учитель сам в достаточной мере ориентировался в имеющихся интернет ресурсах и был образован в компьютерном плане. Тем более что в связи с активным внедрением метода проектов в школу, в сети появилось очень много разнообразных конкурсов, связанных с математикой.

По сравнению с целевыми установками прежних программных документов, определяющих содержание изучения математики, формулировки целей изучения предмета в проекте примерных программ основного общего образования по математике, иначе расставляют акценты, что соответствует заявленной в стандартах деятельностной парадигме образования. Средствами реализации новых подходов в образовании являются такие технологии и методы обучения, которые позволяют достичь личностных и метапредметных результатов. Применительно к математике можно выделить:

- проблемное обучение;
- поисково-исследовательскую (задачную) технологию обучения;
- модульную технологию;
- коллективную систему обучения (КСО) и т.п.

На стыке урочной и внеурочной деятельности школьников наиболее эффективны исследовательские и проектные методы. Невозможно представить современное обучение без использования средств, предоставляемых информационно-коммуникационными технологиями. Но никакие самые передовые средства и технологии обучения не смогут в обозримом будущем решить проблему качественного обучения без грамотного, деятельного, современно мыслящего учителя. Один из базовых принципов общесистемных изменений, заявленных в новой модели образования, звучит так: «Культура усвоения замещается культурой поиска, дискуссии и обновления». Именно учитель создает атмосферу поиска, радости открытия нового в мире в самом себе. Именно учитель организует такое сотрудничество учеников, когда происходит обмен опытом познавательной деятельности, взаимообогащение в сфере интеллектуальной и коммуникативной деятельности. Современный учитель математики нуждается в осмыслении и переосмыслении изменений в современном образовательном пространстве и, соответственно, своей педагогической деятельности.

Возникают проблемы формирования глубоких знаний у учителя математики о сущности, целях и задачах дифференцированного обучения в школе, знакомства его с различными концепциями дифференцированного обучения математике, изучения и анализа положительного опыта дифференцированного обучения, накопленного в отечественной и зарубежной школах, формирования профессиональных умений учителя по организации дифференцированного обучения, вовлечения учителей в научно-исследовательскую работу в области теории практики дифференцированного обучения математике в средней школе.

Для оказания реальной помощи педагогам, для выявления действительных причин их затруднений и повсеместного повышения качества математического образования необходимо согласованное, координированное действие всех структурных подразделений методических и административных служб, обеспечивающих образовательный процесс.

Основной целью взаимодействия этих структур должно стать создание условий для творческой работы педагога, обеспечение единой воспитательно-образовательной среды развития и формирования личности, практического решения проблем межпредметных связей, выработка единых педагогических требований к изучению близких и смежных разделов, тем, используемой терминологии образовательных областей. Вся деятельность должна способствовать непрерывному повышению педагогического мастерства учителя и, как следствие, повышению результативности учащегося и его творческому развитию.

Одним из важнейших средств повышения педагогического мастерства учителей, связующим в единое целое всю систему работы школы, является методическая работа. Роль методической работы значительно возрастает в современных условиях в связи с необходимостью рационально и оперативно использовать новые методики, приемы и формы обучения и воспитания.

Основными направлениями работы районных методических объединений по математике должны стать:

1) повышение качества обучения математике через использование накопленного опыта и применение инновационных методик, в частности

• повышение педагогического мастерства учителя с учетом требований ФГОС второго поколения;

• обобщение и распространение передового педагогического опыта учителей математики;

• совершенствование существующих и внедрение новых активных форм, методов и средств обучения;

• изучение и внедрение в практику работы нормативных документов, регламентирующих условия реализации образовательной программы по математике с учётом достижения целей, устанавливаемых Федеральным государственным образовательным стандартом.

• изучение и распространение положительного опыта подготовки к ГИА и ЕГЭ по математике.

2) повышение профессионального мастерства педагогов, качества математического образования через организацию взаимодействия педагогов и обмена опытом

• обеспечение строгого выполнения нормативно-программных документов в области математики;

• совершенствование коллективной творческо-поисковой деятельности учителей математики;

• изучение и внедрение в практику работы достижений психолого-педагогической науки, ориентированных на деятельность по модернизации образования;

• создание благоприятного творческого климата, положительной мотивации для обмена опытом;

• содействие созданию благоприятных условий для непрерывного образования участников РМО, повышения их профессионального мастерства, обогащение и развитие творческого потенциала каждого педагога.

В связи с этим можно выделить основные задачи районных методических объединений учителей математики:

– Обеспечение выполнения Государственного Стандарта среднего (полного) общего образования по математике на всех ступенях обучения школьников.

– Реализация ПНП «Образование»: повышение профессионального уровня педагогов; внедрение в учебный процесс инновационных технологий; участие учителей в профессиональных конкурсах.

– Повышение качества изучения программного материала.

– Продолжение оказания методической помощи в грамотном введении изучения элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в 5 – 9 классах.

– Продолжение изучения вопросов профильного обучения. Разработка и помощь в апробации новых элективных курсов по математике с учащимися 5, 9 и 10 классов.

– Совершенствование уровня педагогического мастерства преподавателей, их эрудиции и компетентности в области математики и методики ее преподавания в условиях подготовки к ЕГЭ.

– Способствовать созданию методического портфолио учителя.

– Способствовать применению здоровьесберегающих технологий во время учебного процесса и при подготовке к экзаменам.

– Продолжить работу по подготовке учащихся выпускных классов к итоговой аттестации в форме ЕГЭ и к новой форме итоговой аттестации в 9 классе.

– Через обмен опытом, анализ проделанной работы постоянно заниматься развитием интереса учащихся к математике, организацией внеклассной работы.

– Оптимизировать систему оценивания путем использования тестовых диагностик для объективной оценки знаний учащихся.

– Направить работу учителя на активизацию познавательной деятельности, развитие креативности и формирование определенных личностных качеств учащихся в свете современных дидактических средств обучения.

– Обновлять и совершенствовать образовательный процесс через применение инновационных технологий.

Поставленные задачи должны решаться, через совершенствование педагогических, образовательных технологий, через ознакомление учителей с новинками методической литературы, через мотивацию самообразования и научно-исследовательской деятельности.

ОЦЕНКИ L_p-НОРМ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ[1]

Данченко В.И., Додонов А.Е. (Владимир)

danch@vlsu.ru, art-dodonov@mail.ru

Наипростейшей дробью n-го порядка называется рациональная функция вида $\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n}(z - z_k)^{-1}$, где $z, z_k \in \mathbb{C}$. В данной заметке приводятся оценки L_p-норм наипростейших дробей через их L_r-нормы при различных p и r. Нами используются результаты работ [1]–[3].

Пусть $z_k \in \mathbb{C}^+$. Справедливы неравенства

$$(2n)^{-1}\|\rho_n\|_2^2 \leqslant \pi\|\rho_n\|_\infty \leqslant 2\|\rho_n\|_2^2 .$$

Далее, при $1 < r < p \leqslant \infty$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $r^{-1} + s^{-1} = 1$, имеем

$$\|\rho_n\|_p^q \leqslant A(p, r)\|\rho_n\|_r^s ;$$

здесь и ниже величины A зависят лишь от указанных аргументов. При произвольном соотношении между $p, r > 1$ для любого ограниченного или неограниченного промежутка $E \subset \mathbb{R}$ имеем

$$\|\rho_n\|_{L_p(E)}^q \leqslant A(p)n^{q/p}\|\rho_n\|_{L_\infty(E)}, \quad \|\rho_n\|_p^q \leqslant A(p, r)n^{q/p}\|\rho_n\|_r^s .$$

Для вещественнозначной на $\mathbb{R}$ наипростейшей дроби ρ_n при достаточно больших $n \geqslant n_0(\|\rho_n\|_{C([-1,1])})$ имеем

$$\|\rho_n\|_{C([-1,1])} \leqslant A(p)\, n^{2/p}\,\|\rho_n\|_{L_p[-1,1]}, \quad p > 1.$$

Литература

[1] *Macintyre A.J., Fuchs W.H.J.* Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial, J. London Math. Soc, 1940, Vol. 15 (3), pp. 162–168.

[2] *Данченко В. И.* О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$, Матем. сб., 2010. Т. 201 (7), С. 53–66.

[3] *Данченко В. И.* Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей, Матем. сб., 1994. Т. 185 (8), С. 63–80.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00952-а и № 12-01-31471 мол_а)

ОЦЕНКИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СУММ[1]

Данченко В.И., Додонов А.Е. (Владимир)
danch@vlsu.ru, art-dodonov@mail.ru

В настоящей заметке приводятся оценки, дополняющие аналогичные результаты из работ [1], [2]. Рассмотрим экспоненциальную сумму и ассоциированную с ней рациональную функцию:

$$V(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda z_k}, \quad R(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где z_k — произвольные точки из открытой верхней комплексной полуплоскости. Для непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$ через $\operatorname{var} f$ и $\|f\|$ обозначим соответственно ее вариацию и sup-норму на $\mathbb{R}$.

Теорема. *При вещественных $\lambda > 0$ имеют место оценки*

$$|V(\lambda)| \leqslant \frac{2}{3\lambda} \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im} R(\overline{z_k}) + n \, \|\operatorname{Im} R\| \right);$$

$$|V(\lambda)| \leqslant \frac{4n}{3\lambda^2} \left(\frac{1}{4\pi n} \operatorname{var}(\operatorname{Im} R)^2 + \|\operatorname{Im} R'\| \right). \tag{1}$$

Из (1), в частности, получается неравенство

$$|V(\lambda)| \leqslant \frac{4n}{3\lambda^2} \left(\frac{1}{\pi} \|\operatorname{Im} R\|^2 + \|\operatorname{Im} R'\| \right).$$

В [2] приведены примеры сумм $V(\lambda)$, для которых оценки типа (1) существенно учитывают взаимное «погашение» их гармонических слагаемых.

Литература

[1] *Данченко В. И.* Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы, Матем. сб., 2006. Т. 197 (4). С. 33–52.

[2] *Данченко В. И., Додонов А. Е.* Об оценках экспоненциальных сумм // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2012): Тезисы докладов. — М.: МИ РАН, 2012. — С. 61–62.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00952-а и № 12-01-31471 мол_а)

ОБ ОЦЕНКЕ МНИМЫХ ЧАСТЕЙ ПОЛЮСОВ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ С НОРМИРОВАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ[1]

Данченко В.И., Чунаев П.В. (Владимир)

danch@vlsu.ru, chunayev@mail.ru

При натуральных n и m рассмотрим класс $R(n,m)$ *наипростейших дробей*

$$\rho(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k},\quad z_k=x_k+iy_k,\quad z_k\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R},$$

порядка n, для которых $\left|\rho^{(m)}(x)\right|\leqslant 1$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Рассмотрим задачу об оценке снизу величин

$$\gamma(n,m):=\inf_{\rho\in R(n,m)}\min_{k=1,\ldots,n}|y_k|.$$

При $m=0$ эта задача впервые рассматривалась Е.А. Гориным. В разное время ею также занимались Е.Г. Николаев, А.О. Гельфонд, В.Э. Кацнельсон и В.И. Данченко, который нашел точный порядок $\gamma(n,0)\asymp\ln^{-1}n\cdot\ln\ln n$.

Случай $m\geqslant 1$ впервые рассматривался А.О. Гельфондом [1], показавшим, в частности, что $\gamma(n,1)\geqslant C_1 2^{-n/4}$ с некоторой константой C_1. В [2] доказана слабая эквивалентность $\gamma^*(n,1)\asymp\ln n/\sqrt{n}$, но при условии, что все полюсы z_k рассматриваемых наипростейших дробей ρ лежат в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$. При отсутствии ограничений на расположение полюсов нами доказана

Теорема. *Справедлива оценка*

$$\gamma(n,1)\geqslant C\sqrt{\ln n/n},\qquad C=\mathrm{const}.$$

Литература

[1] *Гельфонд А.О.*, “Об оценке мнимых частей корней многочленов с ограниченными производными от логарифмов на действительной оси”, Матем. сб., 71(113) (1966), 289–296.

[2] *Данченко В.И.*, “Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей”, Матем. сб., 185:8 (1994), 63–80.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ДПННиТ (проект №1.1348.2011) и РФФИ (проекты №11-01-00952 и №12-01-31471)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ „СПРОС - ПРЕДЛОЖЕНИЕ„

Дементьева С.А., Божинская О.М. (Москва)

dementevasophia@gmail.com, ymnitsa2008@yandex.ru

При изучении моделей экономических процессов важным является вопрос об условиях существования положения равновесия, т.е. такого состояния экономической системы, состоящей из многих взаимосвязных участников, когда ни один из них не заинтересован в изменении состояния в том смысле, что он не может добиться улучшения своего состояния в рамках имеющихся у него возможностей.

В работе для различных видов функций полезности получены функции спроса, для некоторых видов производственных функций получены функции предложения. Функции спроса и функции предложения получены как решения различных видов экстремальных задач. Построены также соответствующие полученным функциям модели „спрос- предложение". С применением результатов работ [1] - [3] получены достаточные условия существования положения равновесия в этих моделях. Исследованы также свойства положений равновесия в указанных моделях. В частности, получены достаточные условия устойчивости положения равновесия.

Литература

[1]*Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки. Докл. РАН. 2007. Т.416. N 2.

[2]*Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points. J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. N 1.

[3] *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г.* Равновесные цены как точка совпадения двух отображений. Ж. выч. математики и мат. физики. 2013. Т.53. N 2.

ПРИВИТИЕ ИНТЕРЕСА К МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ СВЯЗИ С ДРУГИМИ НАУКАМИ

Демченко Д.А. (Россошь)

Человеческий мозг, тем более мозг ребенка не любит однообразия. Кроме того ученикам постоянно приходится доказывать, что математика не скучная наука, а наоборот, очень интересный и увлекательный предмет. Чтобы ученик полюбил математику, учителю необходимо показывать на своих уроках ее красоту и важность. Именно поэтому наиболее интересно проходят и лучше запоминаются неординарные уроки, нестандартные подходы, яркие и красочные примеры, основанные на межпредметных связях. Приведу несколько примеров из опыта работы.

О том, как сочетать математику и музыку, можно увидеть при изучении темы «Обыкновенные дроби». Ученик, который обучается в музыкальной школе, может продемонстрировать на своем музыкальном инструменте виды нот: целая, половинная, четвертная, восьмая, шестнадцатая.

Связь математики с изобразительным искусством легко увидеть в картинах голландского художника Эшера. При изучении темы «Движение» учитель показывает, как художник использует в своих работах различные виды движения: поворот, параллельные перенос, центральную и осевую симметрию. Учитель предлагает ученикам сделать свои картины по аналогии. Вызывает интерес у учащихся выполнение графических рисунков при изучении темы «Графики функций». Можно выполнять 2 вида задания: по заданным формулам построить графический рисунок или по рисунку задать графики формулами. Учащиеся творчески подходят к выполнению таких работ.

Очень хорошо сочетается математика и литература. Использование на уроках математики материала из художественных произведений, имеющего отношение к предмету, цитат известных людей о необходимости изучения математики позволяет укрепить межпредметные связи. Примером служат слова А.С.Пушкина «Вдохновение нужно в геометрии не меньше, чем в поэзии». Использование учителем на уроках стихов, сказок, пословиц и поговорок несет с собой различные функции: контроля, обучающие, мировоззренческие. Так, при изучении темы «Графики функции» учащиеся пословицу «Как аукнется, так и откликнется» должны представить в виде графика функции.

Для возбуждения интереса к математике, для развития творческого мышления можно предложить учащимся самим создавать математические сказки и стихи. Там, где находится место литературному произведению с математическим сюжетом, всегда царит хорошее настроение. Работа по созданию сказок и стихов увлекательна, но она требует работы головы и души. Так, изучение темы «Треугольники» поспособствовало созданию стихов:

Что может быть прекрасней биссектрисы?

Она ведь так стройна, красива.
И надо же какое диво:
Из одного угла получит равных два.

Из всех предметов, изучаемых в школе, культурную значимость содержанию математики и ее методам исследования придает, несомненно, история. Элемент историзма в обучении математике – это любое единичное высказывание или факт, имеющий непосредственное отношение к истории предмета. Так при изучении теоремы Пифагора можно сообщить учащимся, что известный древнегреческий ученый был еще и олимпийским чемпионом. Изложение новой темы, нового раздела лучше начинать с исторической справки, возбуждающей интерес и внимание учащихся. Это может быть 3–5-минутный увлекательный рассказ, связанный с историей математики. Это дает возможность показать учащимся, что математика, как наука, возникла и развивается в связи с практической деятельностью человека. Изучая жизнь и деятельность ученого-математика, учащиеся имеют достойный пример для подражания. Вызывают интерес у учащихся и старинные задачи из исторических математических источников, поскольку несут в себе информацию практического и исторического характера. Пример такой задачи: величайший математик древности Архимед погиб в возрасте 75 лет во время осады Сиракуз в 212 г. до н.э. Определить год рождения Архимеда.

Наиболее тесная связь существует между математикой и физикой. С помощью математических приемов в значительной степени упрощается решение физических задач. При изучении темы «Тригонометрия» можно провести лабораторные работы «Определение угла подъема солнца над горизонтом», «Определение размера удаленных объектов (диаметр Луны)». Выполнение лабораторных работ такого содержания позволяет учащимся самостоятельно планировать эксперимент, подбирать необходимое оборудование, теоретически обосновывать полученные результаты, расшифровывать данные с помощью таблиц и графиков, а также развивать творческие способности учащихся.

Использование данных межпредметных связей поможет учителю математики организовать разнообразную творческую деятельность учащихся на своем уроке, подскажет способы эмоционального преподнесения строгих математических истин, подтолкнет учеников делать самим «маленькие открытия». Чем больше наука будет проникать в скрытые процессы мышления и творчества, тем более умело и уверенно будет школа воспитывать в детях жажду знаний и любовь к активному умственному труду.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Диденко Д.Б., Рыжкова А.А., Тришина И.А. (Воронеж)
dmixtry@gmail.com, anna-ryzhkova212@rambler.ru, IrenMuren2@gmail.com

Пусть $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество неотрицательных целых чисел. Через l^∞ обозначим банахово пространство ограниченных последовательностей $x\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ с нормой $\|n\|_\infty = \sup\limits_{n \geqslant 0} \big|x(n)\big|$, через C_0 обозначим (замкнутое) подпространство последовательностей из l^∞.

В пространстве l^∞ рассмотрим операторы сдвига $S(n)\colon l^\infty \to l^\infty$, $(Sx)(k) = x(k+n)$, $k \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, $x \in l^\infty$.

Определение 1. Последовательность $x \in l^\infty$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если $S(1)x - x \in \mathrm{C}_0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \big|x(n+1) - x(n)\big| = 0$.

Определение 2. Последовательность x из l^∞ называется периодической на бесконечности периода $N \geqslant 2$, $N \in \mathbb{N}$, если $S(1)x - x \in \mathrm{C}_0$.

Примером медленно меняющейся на бесконечности последовательности является последовательность $x(n) = \sin\ln(1+n)$, $n \geqslant 0$.

Пусть $\gamma_k = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi k}{N}}$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, — корни из единицы. Имеет место следующая

Теорема. Каждая периодическая на бесконечности периода $N \geqslant 2$ последовательность $x \in l^\infty$ допускает представление вида:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(n)\mathrm{e}^{i\frac{2\pi k}{N}n},$$

где x_k, $0 \leqslant k \leqslant N-1$ — медленно меняющиеся на бесконечности последовательности.

При доказательстве теоремы используются методы линейной алгебры [1] и спектральной теории операторов [2]. Приведенный результат верен и для векторных последовательностей.

Литература

[1] Баскаков А. Г. Лекции по линейной алгебре. Воронеж, издательство ВГУ, 2004.

[2] Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж, издательство ВГУ, 1987.

О НЕРАВЕНСТВЕ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ВЕКТОРОВ ИЗ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Дикарев Е.Е. (Воронеж)
heiligenkreuz@gmail.com

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство. Через $\operatorname{End}\mathcal{X}$ обозначим банахову алгебру ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

Замкнутый линейный оператор $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ назовём *корректным* (или *самосопряжённым* [1], [2]), если оператор $\mathrm{i}A$ является генератором сильно непрерывной группы изометрических операторов $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$.

В частности, в классической теореме Бернштейна оператор A определяется следующим образом: $A = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, действует в пространстве равномерно непрерывных ограниченных комплексных функций $\mathrm{C}_{b,u}(\mathbb{R})$ и является генератором группы сдвигов. Заметим, что спектр оператора $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ (см. [2]). В статье А.Г. Баскакова [3] для ограниченного корректного оператора в банаховом пространстве доказано, что $\|A\| = r(A)$, где $r(A)$ — спектральный радиус оператора A.

Здесь неравенство Бернштейна получено для векторов банахова пространства, где действует изометрическая группа операторов с генератором $\mathrm{i}A$, который может являться неограниченным оператором. Получены приложения неравенства Бернштейна для функций экспоненциального типа на бесконечности и для оценки коммутатора операторов. В статье для такого оператора получена оценка

$$\|Ax\| \leqslant r(x) \cdot \|x\|, \qquad x \in \mathcal{X}, \tag{1}$$

где $r(x)$ — спектральный радиус вектора x.

Литература

[1] Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж, издательство ВГУ, 1987.

[2] Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов. Функциональный анализ, СМФН, №9, МАИ, М., 2004.

[3] Баскаков А. Г. Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе. Сиб. матем. журн., Т.20, №5, 1979.

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Дорохов А.Н. (Воронеж)
dor-an@mail.ru

В F-пространстве (пространстве Фреше) приводится теорема существования неподвижных точек вполне непрерывных операторов.

Определение. Число $\|x\|_\rho = \rho(x, 0), \quad (x \in X)$ назовем ρ-нормой элемента x в F-пространстве X.

Определение. Оператор A, действующий в F -пространстве X, называется усиленно непрерывным, если из $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$ следует $Ax_n \longrightarrow Ax$ по ρ-норме $\|x\|_\rho$.

Теорема. Пусть:

1) в F-пространстве X оператор A усиленно непрерывен;

2) вполне непрерывный оператор A преобразует замкнутое ограниченное по ρ-норме $\|x\|_\rho$ выпуклое множество $V \subset X$ в себя: $AV \subset V$. Тогда существует элемент $x_* \in V$, такой, что $Ax_* = x_*$.

Литература

1. Бахтин И.А. Нелинейные уравнения с монотонными операторами: учебное пособие для спецкурса / И.А. Бахтин. - Воронеж: ВГПИ, 1988. - 64 с.

2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский. - М.: Физматгиз, 1962. - 394 с.

ЦИФРОВЫЕ ЛАБОРАТОРИИ В ПРЕДМЕТАХ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ЦИКЛА

Дубовицкая Т.В., Каверин В.Ф. (Воронеж)

В естественнонаучном цикле предметов в школе всегда было единое, что объединяло эти предметы и ставило особняком в учебном процессе. Это подход к определению истинности знаний и источникам знаний через естественнонаучный эксперимент. Еще десять лет в школах России присутствовал только «натурный эксперимент», но по ряду причин как объективных (естественный износ оборудования, трудности с приобретением реактивов, дефицит качественных лабораторных и демонстрационных приборов, нехватка финансирования), так и субъективных (нежелание учителей «возиться» с экспериментом и во время подготовки урока, и в течении урока, отсутствие новых методических материалов по демонстрационному эксперименту в школе, отвечающих требованиям времени и т.п.) привели к созданию разнообразных электронных образовательных ресурсов различного качества и назначения. Подобные разработки позволяли учителю быстро и наглядно показывать учащимся необходимый виртуальный демонстрационный эксперимент. Поэтому большинство работ носило лишь описательный характер. Наличие кино- и видеоматериалов по изучаемым темам также не решало проблемы, поскольку продолжало ту же описательную линию и к тому же не давало возможности детям принимать участие в работе. Лабораторный эксперимент по физике (фронтальные лабораторные работы и опыты, физический практикум) по целому ряду причин к настоящему времени оказался более развитым, оснащенным и в большей степени позволяющим проводить количественное изучение явлений по сравнению с учебным экспериментом по биологии и химии. [1]

Мы не отрицаем важность подобных форм работы в школе, но все же хотим подчеркнуть, что в учебном естественно-научном эксперименте ведущая роль должна принадлежать самостоятельному ученическому эксперименту, носящему по возможности исследовательский, а не репродуктивный характер. Сегодня явно недостаточно только демонстрировать учащимся явления и процессы «натурно» или виртуально – необходимо формировать у учащихся совершенно определенные действия обозначенные в системно деятельностном подходе. Системно-деятельностный подход к образованию в современном понимании интегрирует в психологопедагогической науке компетентностный подход и традиционный подход(основанный на ЗУНах)

Опыт применения цифровых лабораторий в школах Москвы, Санкт-Петербурга, Казани, Калининграда, Хабаровска и ряда других городов и даже областей позволяет сделать вывод о том, что не только биологический и химический, но и учебный физический эксперимент, проводимый на традиционном оборудовании, без применения современных цифровых и компьютерных экспериментальных средств, не позволяет в полной мере решать учебные и воспитательные задачи в современной школе. Связано это с целым рядом причин:

- традиционное учебное оборудование для проведения учебного естественно-научного эксперимента не позволяет проводить количественные исследования по техническим причинам;

• время проведения естественно-научных экспериментальных исследований далеко не всегда согласуется со временем учебного занятия;

• требования техники безопасности при проведении учебного эксперимента исключают возможность проведения многих исследований, имеющих принципиальное значение с точки зрения содержания учебного материала;

• не всегда возможно производить удобную обработку результатов.

Цифровая же лаборатория полностью меняет методику и содержание экспериментальной деятельности школьника и снимает вышеперечисленные проблемы. Благодаря широкому спектру разнообразных датчиков параметры естественнонаучного эксперимента становятся доступными школьнику не на качественном, а на количественном уровне. Цифровая лаборатория позволяет вести длительный эксперимент даже в отсутствие исследователя и с частотами измерений, неподвластными человеческому восприятию. Например, исследовать биологические процессы, сложные химические реакции или быстропеременные электрические или световые явления. А учителю

• осуществлять новые подходы в обучении;

• -способствовать формированию у учеников навыка самостоятельного поиска, обработки и анализа информации, раскрытию творческого потенциала учащихся;

• получать данные, недоступные в традиционных учебных экспериментах;

• проводить исследования в «полевых условиях».

По отзывам учителей, использование цифровых лабораторий способствует значительному повышению интереса к предмету и позволяет учащимся работать самим, при этом получая не только знания в области естественных наук, но и опыт работы с интересной и современной техникой, компьютерными программами, опыт взаимодействия исследователей, опыт информационного поиска и презентации результатов исследования. Наибольшую эффективность показали следующие виды деятельности [2]:

1. Фронтальные лабораторные работы;
2. Работы физического практикума;
3. Демонстрационный эксперимент;
4. Демонстрационный эксперимент с видеосопровождением;
5. Видеоанализ;

6. Исследовательские проекты, в том числе полевые исследования.

Учащиеся получают возможность заниматься исследовательской деятельностью, не ограниченной темой конкретного урока, и самим анализировать полученные данные. Так, например, при изучении кислотности различных веществ учащиеся самостоятельно делают вывод, что многие популярные напитки вредны для пищеварительной системы, а при использовании некоторых моющих средств и тем более химических реактивов необходимо пользоваться перчатками. [1]

Литература

1. Архимед прописался в школе. Цифровые лаборатории в предметах естественнонаучного цикла Методическая разработка. / Федорова Ю.В. - Учительская газета №32, 2009.

2. Лабораторный практикум по физике. / Ю. В. Федорова, А. Я. Казанская, А. Ю. Панфилова, Н. В. Шаронова .- М: Бином. Лаборатория знаний.- 2012 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ И НЕЛИНЕЙНОЕ ОСРЕДНЕНИЕ ВВЕДЕННОЕ В.П. МАСЛОВЫМ

Дудчак В.В., Костин А.В., Скобцов Ю.П.

leshakostin@mail.ru

Академик В.П. Маслов при создании "квантовой экономики" (см. [1]) получил нелинейное среднее, которое в случае двух величин a и b, имеет вид $M_\beta(a,b) = \frac{1}{\chi\beta}\ln\frac{(e^{\chi\beta a}+e^{\chi\beta b})}{2}$, где $\chi = \pm 1$, $\beta > 0$.

Основной особенностью среднего (1) является его "наибольшая близость" к линейному, в том смысле, что оно удовлетворяет условию $M_\beta(a+\alpha, b+\alpha) = M_\beta(a,b)+\alpha$.

Это условие обеспечивает однозначный выбор функции φ в семействе колмогоровских средних $Q(a,b) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)$, где $\varphi(s)$ непрерывная, строго монотонная функция, и φ^1— обратная к ней.

Функции же вида (3), как известно, являются основными инструментами в исследованиях в микро– и макроэкономике. Так, в случае степенной функции $\varphi(a) = a^\beta$, $\varphi(b) = b^\beta$ и $\chi = -1$ семейство (3) относится к классу, так называемых, CES– функций, имеющих вид $F_\delta(a,b) = A(c_1K^{-\delta}+c_2L^{-\delta})^{-\frac{1}{\delta}}$, где $A > 0$, $c_1+c_2 = 1$, K— фонды, L— трудовые ресурсы, $\delta > 0$, c_1— фондоемкость продукции, c_2— трудоемкость продукции.

Частными случаями функции CES являются наиболее используемые типы ПФ: производственная функция В.Леонтьева, функция Кобба–Дугласа, линейная функция.

Эти свойства функции $M_\beta(K, L)$ позволяют использовать ее в качестве макроэкономической производственной функции (ПФМ), положив $F_\beta(K, L) = AM_\beta(K, L)$, где $A > 0$.

Например, приложение ПФМ к стандартной задачу оптимизации производства и, аналогичную ей, задачу потребительского выбора

$F_\beta(K, L) = AM_\beta(K, L) \to extr$, с бюджетными ограничениями $P_1K + p_2L = \delta$, дает явный вид решения $K_0 = \frac{\gamma p_2+\delta}{p_1+p_2}$, $\quad L_0 = \frac{\delta-\gamma p_1}{p_1+p_2}$.

Литература

1. Маслов В.П. Квантовая экономика, М.: Наука, 2006 г., 91 с.

О СОСТОЯНИЯХ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Дуплищева А.Ю. (Воронеж)

dupl_ ayu@mail.ru

Пусть X - банахово пространство, $EndX$ - банахова алгебра линейных операторов, $A, B_k \in EndX,\ k = 1, 2$.

Рассмотрим операторы $\mathcal{A} \in EndX$ и ассоциированный с ним $\mathbb{A} \in End(X \times X)$ соответственно вида

$$\mathcal{A} = A^2 + B_1A + B_2, \tag{1}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & A + B_1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Определение 1. *Рассмотрим следующие условия:*

1). $Ker\ \mathcal{B} = 0$ (т. е. оператор $\mathcal{B}$ инъективен);

2). $1 \leqslant n = dim\ Ker\ \mathcal{B} < \infty$;

3). $Ker\ \mathcal{B}$ - подпространство из X такое, что $dim\ Ker\ \mathcal{B} = \infty$;

4). $Ker\ \mathcal{B}$ - дополняемое подпространство в X;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000)

5). $\overline{Im\,\mathcal{B}} = Im\,\mathcal{B}$ (образ оператора $\mathcal{B}$ замкнут);
6). $\mathcal{B}$ - равномерно инъективен, т.е. $Ker\,(\mathcal{B}) = 0$ и $\gamma\,(\mathcal{B}) > 0$;
7). $Im\,\mathcal{B}$ - замкнутое подпространство из X конечной коразмерности $codim\,Im\,\mathcal{B} = m \geqslant 1$;
8). $Im\,\mathcal{B}$ - замкнутое подпространство из X и $codim\,Im\,\mathcal{B} = \infty$;
9). $Im\,\mathcal{B}$ - замкнутое дополняемое в X подпространство;
10). $Im\,\mathcal{B} = X$ ($\mathcal{B}$ - сюръективный оператор);
11). Оператор $\mathcal{B}$ обратим.

Оператор $\mathcal{B} \in End\mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ - банахово пространство) находится в состоянии обратимости S, если для него выполнены все условия $S = i_1, \ldots, i_k$, $1 = i_1 < \cdots < i_k \leqslant 11$. Множество состояний обратимости оператора $\mathcal{B}$ обозначим символом $St_{inv}(\mathcal{B})$.

Теорема 1. $St_{inv}(\mathcal{A}) = St_{inv}(\mathbb{A})$.

Литература

Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж.: изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА ДЖЕКСОНА НА ОСНОВЕ КОНСТРУКЦИИ КОРОВКИНА

Ершова Е.М.(Тверь)
elersh@list.ru

П. П. Коровкин [1] ввел операторы, ставшие в настоящее время классическими и называемые операторами Фейера-Коровкина

$$\begin{aligned} K_n(f,x) = \quad & \frac{1}{2\pi A_n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left|\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)e^{ikt}\right|^2 dt = \\ & = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,n}\cos(kt)\right] dt, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A_n = \sum_{s=0}^{n}\varphi^2(\frac{s}{n}) \neq 0, \quad \lambda_{k,n} = \frac{A_{k,n}}{A_n}, \quad A_{k,n} = \sum_{s=0}^{n-k}\varphi(\frac{s}{n})\varphi(\frac{s+k}{n})$.

Положим в (1) для удобства вычислений $2n$ вместо n и рассмотрим $\varphi(x) = x^2(1-x)^2$.

Тогда множители суммирования полученного оператора вычисляются по формуле

$$\lambda_{k,n} = \frac{1}{2n(256n^8+80n^2-21)}k(-21+20k^2+k^8-180nk+42nk^3-336n^4+$$

$$+672n^3k-336n^2k^2+360n^2+768kn^7-672k^3n^5+336n^4k^4-24n^2k^6).$$

Отсюда следует, что $1-\lambda_{1,n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Это означает, что порядок приближения дифференцируемых функций у оператора $K_{2n}(f,x)$

такой же, как и у оператора Джексона, и этот порядок является наилучшим возможным.

Для построенного оператора справедливы

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$. Тогда $K_{2n}(f,x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.*

Теорема 2. $K_{2n}(f,x) - f(x) = \frac{3(32n^4-20n^2+23)}{64n^6+16n^4+4n^2+21} D^2 f(x) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, *где $D^2 f(x)$ – обобщенная вторая производная функции $f(x)$.*

Теорема 3. *Если $f \in C_{2\pi}$, то $||K_{2n}(f) - f|| \leqslant c\omega\left(f;\frac{1}{n^2}\right)$.*

Если $f \in C^1_{2\pi}$, то $||K_{2n}(f) - f|| \leqslant c||f'||\frac{1}{n^2} + \frac{c_1}{n}\omega\left(f';\frac{1}{n}\right)$.

Литература

1. Коровкин П.П. *Асимптотические свойства положительных методов суммирования рядов Фурье.*// Успехи математических наук. т.XV, вып.1(91) 1960 г.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАННИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СОВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ МОНИТОРИНГА

Ерыгина Е.В. (Воронеж)
lena_er@bk.ru

Современные системы мониторинга являются сложными и разнородными системами, в них входят разные средства мониторинга, которые должны взаимодействовать. Задачами таких систем являются добывание, сбор и обработка информации из разнородных источников, что обеспечивает обширные возможности применения подобных систем, например, мониторинг автотранспорта и дорог, мониторинг судов, мониторинг разведкой на местности объектов и т. д.

Создание подобных сложных систем требует больших временных и стоимостных затрат, поэтому целесообразно перед проектированием, сначала провести их исследование. Явления в сложной системе сложны и многообразны и аналитическое описание является в них слишком грубым приближением к действительности, как следствие исследователь вынужден использовать имитационное моделирование. Имитационное моделирование позволяет выбрать наиболее эффективные средства мониторинга и порядок их применения.

В работе проведено имитационное моделирование процессов поиска объектов радиоэлектронными и оптико-электронными средствами мониторинга на заданном участке местности с учетом свойств местности.

Для моделирования использовался современный пакет имитационного моделирования Arena 9.0. В основе программного продукта Arena 9.0 заложен математический аппарат систем массового обслуживания (СМО) и сетей Петри.

Результатом моделирования являются вероятностно-временные характеристики (ВВХ) времени обнаружения объектов системой мониторинга. Для этого набиралась статистика по реализации времени поиска объектов с оценкой средне-квадратического отклонения.

О НЕКОТОРОМ УСЛОВИИ АДДИТИВНОСТИ ОБОБЩЕННОГО Q-ИНТЕГРАЛА[1]

Ефимова М.П. (Москва)

efimova.margarita@gmail.ru

Рассмотрим (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, E — измеримое множество конечной меры и действительнозначную измеримую на E функцию $f(x)$.

Определение 1. *Будем говорить, что $f(x)$ является Q-интегрируемой в обобщенном смысле на множестве E ($f \in Q_{об}(E)$), если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E [f(x)]_n \, dx$, где*

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant n; \\ n \operatorname{sgn} f(x), & \textit{иначе;} \end{cases}$$

этот предел будем обозначать $(Q_{об}) \int\limits_E f(x)\, dx$.

Определение 2. *Пусть Ω - топологическое пространство. Точку $x \in E$ будем называть точкой интегрируемости по Лебегу функции f, если существует U_x - окрестность точки x такая, что $f \in L(U_x \cap E)$. Если же такой окрестности нет, то будем называть x точкой неинтегрируемости, через L_f обозначим множество всех точек неинтегрируемости f.*

Теорема 1. *Пусть Ω - хаусдорфово пространство, E - предкомпактное множество, $f \in Q_{об}(E), g \in Q_{об}(E), L_f \cap L_g = \varnothing$. Тогда $f + g \in Q_{об}(E)$ и верно равенство*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321).

$$(Q_{об}) \int\limits_E (f(x)+g(x))dx = (Q_{об}) \int\limits_E f(x)dx + (Q_{об}) \int\limits_E g(x)dx.$$

Литература

1. *Titchmarsh E.C.* On conjugate functions. // Proc. London Math Soc. 1929. T. 29. C. 49–80.
2. *Ефимова М.П.* О свойствах Q-интеграла. Мат. Заметки. 2011. Т. 90(3). С. 340–350.

ОБ УРАВНЕНИЯХ С (A,ψ)-УПЛОТНЯЮЩИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Завьялова А.В. (Воронеж)

antonina.zavyalova@gmail.com

Хорошо известна теория уплотняющих отображений (как однозначных [1], так и многозначных [2]). В работе [3] были изучены уплотняющие возмущения линейных непрерывных сюръективных операторов. Рассмотрим обобщение этих результатов на случай многозначных отображений.

Пусть E, E_0 - банаховы пространства, $A : E \to E_0$ - ограниченный линейный сюръктивный оператор. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ.

Определение 1. *Полунепрерывное сверху многозначное отображение $F : X \subset E \to Kv(E)$ называется уплотняющим относительно меры некомпактности ψ (или ψ-уплотняющим), если $\psi(F(\Omega)) \geqslant \psi(\Omega)$, для любого $\Omega \subset X$, не являющегося относительно компактным.*

Пусть $x_0 \in E$ - некоторая точка, $B_R[x_0]$- замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $F : B_R[x_0] \to Kv(E_0)$ – многозначное (A,ψ)-уплотняющее отображение.

Рассмотрим включение $A(x) \in F(x)$. Пусть $N(A,F)$ - множество решений этого включения. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если существует такое число $k > \|A^{-1}\|$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство*

$$\min_{u \in F(x)} ||A(x_0) - u|| \leqslant \frac{R}{k},$$

то $N(A,F) \neq \emptyset$.

Литература

1. *Ахмеров Р.Р.* Меры некомпактности и уплотняющие отображения/ Р.Р. Ахмеров и др. – Новосибирск: Наука. – 1986.

2. *Kamenskii M.*, Obukhovskii V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces/M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. – Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2001.

3. *Гельман Б.Д., Калабухова С.Н.* Об уплотняющих вохзмущениях линейных сюрьективных операторов/ Б.Д. Гельман, С.Н. Калабухова// Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: математика, физика. – 2011. – № 1. – С.120–127.

ВПОЛНЕ НОРМАЛЬНАЯ ОБОЛОЧКА ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ[1]

Захаров В.К., Родионов Т.В. (Москва)

zakharov_valeriy@list.ru, rodionovtv@mail.ru

Пусть T — множество, $A(T)$ — некоторое семейство действительнозначных функций на T. Назовём семейство $A(T)$ *нормальным* [*вполне нормальным*], если оно содержит **1**, замкнуто относительно умножения на числа, сложения, конечных супремума и инфимума, умножения, равномерной [поточечной] сходимости последовательностей и деления на функции, не обращающиеся в нуль. Нормальными будут, например, семейства непрерывных функций на топологических пространствах. *Нормальной* [*вполне нормальной*] оболочкой $A(T)$ называется наименьшее нормальное [вполне нормальное] семейство $N(A(T))$ [$CN(A(T))$], содержащее $A(T)$.

Все нормальные семейства были охарактеризованы Хаусдорфом в [1]. А именно, $A(T)$ нормально тогда и только тогда, когда оно совпадает с семейством $M(T,\mathcal{S})$ всех функций, измеримых относительно некоторого мультипликативного σ-аддитивного семейства множеств $\mathcal{S}$, содержащего T и $\varnothing$. Там же была охарактеризована нормальная оболочка $N(A(T))$ для произвольного $A(T)$.

В работе [2] были охарактеризованы вполне нормальные семейства. А именно, $A(T)$ вполне нормально тогда и только тогда, когда $A(T) = M(T,\mathcal{S})$ для некоторой σ-алгебры $\mathcal{S}$. Там же была охарактеризована вполне нормальная оболочка $CN(A(T))$ в случае решё-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (11-01-00321) и гранта Президента РФ для ведущих научных школ (НШ-979.2012.1).

точного линейного пространства $A(T)$. Здесь мы охарактеризуем $CN(A(T))$ для произвольного $A(T)$.

Пусть $\mathcal{B}(T,\mathcal{S})$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{S}$, $\operatorname{coz} f \equiv \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$, $\operatorname{Coz} A(T) \equiv \{\operatorname{coz} f \mid f \in A(T)\}$, $A(T)_*$ — семейство функций f, для которых найдутся такие числа $x, y \in \mathbb{R}$ и функция $u \in A(T)$, что $f = ((u - x\mathbf{1}) \vee \mathbf{0}) \wedge ((y\mathbf{1} - u) \vee \mathbf{0})$.

Теорема. $CN(A(T)) = M(T, \mathcal{B}(T, \operatorname{Coz} A(T)_*))$.

Литература

[1] *Hausdorff F.* Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Vien, 1914.

[2] *Regoli G.* Some characterization of sets of measurable functions // Amer. Math. Monthly, **84**:6 (1977), 455–458.

РЕГУЛЯРНЫЕ ВЕТВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зачепа В.Р. (Воронеж)

При решении обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной, возникает ситуация неразрешенного интегрирования уравнения

$$F(x(t), \dot{x}(t)) = 0\,, \tag{1}$$

где F — аналитическое отображение из окрестности U нуля пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $F(0,0) = 0$. После замены $\dot{x} = y$ уравнение (1) сводится к аналитическому уравнению

$$F(x, y) = 0\,, \tag{2}$$

Основной интерес представляет случай, в котором точка $(0,0)$ является особым решением (точкой бифуркации) уравнения (2), то есть

$$\operatorname{rank} \frac{\partial F(0,0)}{\partial y} = 0\,.$$

В противном случае можно было бы воспользоваться теоремой о неявной функции, и задача свелась бы, таким образом, к разрешенному интегрированию. При решении задач (1), (2) первоочередной интерес представляют нахождение решений, оценка их количество, вычисление их асимптотики в нуле, а также выяснение конечной определенности, то есть устойчивости асимптотик относительно возмущений уравнения слагаемыми достаточно высокого порядка в нуле. Данная задача разрешимости ОДУ, неразрешенного относительно производной, тесно связана с ранее полученными результатами автора по теории простых малых разрешений [1]-[3]. Основу всех рассуждений представляет полученный автором [1] критерий конечной определенности аналитического уравнения.

Литература

1. Зачепа В.Р. О v-определенности ростка гладкого отображения в особой точке // Глобальный анализ и нелинейные уравнения. Воронеж, 1988. - С. 119-126.

2. Зачепа В.Р., Сапронов Ю.И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений. Воронеж, ВГУ. 2002. 185 с.

3. Зачепа В.Р. Конечно определенные особенности функций, порожденные неразрешенным интегрированием // Изв.вузов. Математика. - 2006. - №2. - С. 26-34.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕРАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Зачепа В.Р. (Воронеж)

При решении обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной, возникает ситуация неразрешенного интегрирования уравнения

$$F(x(t), \dot{x}(t)) = 0\,, \tag{1}$$

где F — аналитическое отображение из окрестности U нуля пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $F(0,0) = 0$. После замены $\dot{x} = y$ уравнение (1) сводится к аналитическому уравнению

$$F(x, y) = 0\,, \tag{2}$$

Основной интерес представляет случай, в котором точка $(0, 0)$ является особым решением (точкой бифуркации) уравнения (2). Приближенные методы нахождения решений дифференциальных уравнений, особенно в связи с развитием компьютерных технологий, в настоящее время приобрели еще большее значение. Однако, прежде чем применять эти методы, необходимо доказывать существование решения, а также его единственность. В противном случае не ясно, какое именно решение необходимо вычислить.

Особые трудности при решении этих задач возникают для неразрешенных относительно производной дифференциальных уравнений. В этом случае через одну точку, вообще говоря, может проходить уже не одна, а несколько интегральных кривых. Так как, разрешая уравнение (1), мы получаем несколько дифференциальных уравнений. Поэтому свойство единственности решения уравнении (1) обычно понимается в том смысле, что через данную точку по данному направлению проходит не более одной интегральной кривой [1].

Теорема. *Пусть уравнение (2) регулярно по переменной* y *в* $U\setminus(0,0)$*. Тогда существует единственное решение* $(x(t),\dot{x}(t))$ *уравнения (1), при* $t \in [t_0 - h, t_0 + h,$ $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, *где* $F(x_0, y_0) = 0$, h *— достаточно мало,* $(x_0, y_0) \in U \setminus (0,0)$.

Литература

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1969. - 424 с.

О ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ НА ГРАФЕ[1]

Зверева М.Б. (Воронеж)

margz@rambler.ru

Основоположником разработок вариационных задач с отклоняющимся аргументом был Л.Э. Эльсгольц. Им были выведены условия трансверсальности применительно к задаче об экстремуме функционала

$$\Phi(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t), x(t-\tau), x'(t-\tau))dt.$$

В дальнейшем в работах Л.Э. Эльсгольца, С.Б. Норкина, Г.А. Каменского, A Halanay, W.J. Palm были найдены необходимые и достаточные условия экстремума, соответствующие классическим условиям Эйлера, Вейерштрасса, Лежандра, Якоби, формулируемые в терминах первой и второй вариаций.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00392)

Вопрос о необходимых и достаточных условиях экстремума для классической задачи вариационного исчисления на геометрическом графе Г, т.е. для задачи

$$\Phi(x) = \int\limits_{\Gamma} F(t, x(t), x'(t))dt$$

был решен Н.Н. Рябцевой в кандидатской диссертации "Некоторые вопросы нелинейного моделирования в пространстве функций ветвящегося аргумента"(2008 год). В настоящем докладе обсуждаются условия экстремума для функционала

$$\Phi(x) = \int\limits_{\Gamma} F(t, x(t), x'(t), x(t-\tau), x'(t-\tau))dt,$$

рассматриваемого на геометрическом графе Г. Аналог уравнения Эйлера выписывается в виде дифференциальных уравнений нейтрального типа на каждом ребре и условий типа трансмиссии во внутренних вершинах.

ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА НА ГРАФЕ[1]

Зверева М.Б. (Воронеж)

margz@rambler.ru

Для задачи на графе-звезде из m отрезков единичной длины, соединенных в нуле

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad i = 1, \dots m \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x) \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = \psi_i(x) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial u_i}{\partial x}(+0,t) = 0 \\ u_i(0,t) = u_1(0,t), \quad i = 2, \dots m \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x}(1,t) = \alpha(u_1(1,t)) \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial x}(1,t) + \gamma_i u_i(1,t) + m_i \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(1,t) = 0, \quad i = 2, \dots m \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00392)

получен аналог формулы Даламбера, т.е. возможность представления решения в виде $u_i(x,t) = \frac{1}{2}(\Phi_i(x+t)+\Phi_i(x-t)) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Psi_i(\xi)d\xi$.

Такая задача возникает при изучении колебаний системы из m струн, соединенных в одном узле (точка $x = 0$). При этом одна из струн (соответствующая $i = 1$) в точке $x = 1$ закреплена с помощью пружины с разными витками, так что для нее не выполняется закон Гука, что влечет появление в этой точке нелинейного условия. Концы остальных струн упруго закреплены с помощью пружин жесткости γ_i $(i = 2, \dots m)$, и на этих же концах дополнительно прикреплены грузы массами m_i.

Решение задачи сводится к вопросу о разрешимости системы уравнений нейтрального типа для Φ и Ψ. Формула Даламбера позволяет решать задачу управления колебаниями для таких систем.

Для случая линейных условий закрепления концов струн (1-го, 2-го рода, некоторые варианты условий 3-го рода) аналог формулы Даламбера строился в работах В.Л. Прядиева, А.В. Боровских, А.В. Копытина, Ф.О. Найдюка.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ С ЧАСТИЧНО ЗАДАННЫМ СОСТОЯНИЕМ СИСТЕМЫ

Зубова С.П. (Воронеж)

spzubova@mail.ru

Для динамической системы, описываемой уравнением

$$\dot{x}(t) = B(t)x(t) + D(t)u(t), \tag{1}$$

где $t \in [t_0, t_k]$, $x(t) \in R^n$, $u \in R^m$; $B(t)$, $D(t)$ — матрицы соответствующих размеров, требуется найти входную вектор–функцию $u(t)$ такую, что часть компонент $x_j(t)$ решения $x(t)$ уравнения (1) с этой функцией $u(t)$ обладает свойствами

$$x_j(t_i) = x_{ji}, \quad j = 1, 2, ...l, \quad l < n, \quad t_0 < t_1 < ... < t_k, \quad \forall x_{ji} \in R^1, \tag{2}$$

и другая часть компонент $x_j(t)$ задана:

$$x_j(t) = \varphi_j(t), \quad j = l+1, l+2, ...n, \tag{3}$$

$\forall \varphi_j(t) \in C^1([t_0, t_k] \to R^1)$.

После подстановки значений (3) система (1) принимает вид

$$A\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{B}(t)\tilde{x}(t) + D(t)u(t) + f(t), \tag{4}$$

$\tilde{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_l(t))$, $A = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$, I — единичная матрица в R^l, 0 — нулевая матрица в R^{n-l}; $\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) \\ B_{21}(t) \end{pmatrix}$, (если $B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix}$), $D(t) = \begin{pmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \end{pmatrix}$, $f(t)$ — некоторая вектор–функция со значениями в R^n.

Одним из необходимых условий существования управления $u(t)$, под воздействием которого состояние $\tilde{x}(t)$ динамической системы (4) удовлетворяет многоточечным условиям (2) является условие сюръективности $D_2(t)$.

Выводятся условия, необходимые и достаточные для существования $u(t)$ и $\tilde{x}(t)$, удовлетворяющих (4) и (2).

Даётся метод построения $u(t)$ и $\tilde{x}(t)$.

Литература

1.Зубова С. П. Решение задачи управления для линейной дескрипторной системы с прямоугольно-матричными коэффициентами // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88, Вып. 6. — С. 884-895.

2. Зубова С. П. О критериях полной управляемости дескрипторной системы. Полиномиальное решение задачи управления при наличии контрольных точек // Автоматика и Телемеханика. — 2011. — № 1. — С. 27—41.

О МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОДНОЙ РАЗНОПОРЯДКОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Иванникова Т.А., Тимашова Е.В., Шабров С.А.
(Воронеж)

Работа посвящена адаптации метода конечных элементов для математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

здесь $p(x) > 0$ на $[0;\xi)$, $p(x) = 0$ для всех $x \geqslant \xi$, $r(x) \equiv 0$ на $[0;\xi]$ и $r(x) > 0$ для $x > \xi$, $Q(x)$ и $F(x)$ σ-абсолютно непрерывные на

$[0;1]$ функции и $Q(x)$ не убывает на $[0;1]$, которая описывает малые деформации системы состоящей из стержня, расположенного вдоль отрезка $[0;\xi]$, и припаянной к точке ξ растянутой вдоль отрезка $[\xi;1]$ струны; система защемлена в точке $x = 0$, и закреплена в точке $x = 1$.

В дифференциальном уравнении из (1) внешнее дифференцирование производится по мере σ, которая содержит все особенности системы; уравнение определено на специальном расширении $\overline{[0,l]}_\sigma$ отрезка $[0,l]$, которое строится следующим образом. На $[0,l]$ определим метрику $\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$, где $\sigma(x)$ — функция порождающая меру σ. Если $S(\sigma)$ непусто, то метрическое пространство $([0,l],\rho)$ не является полным. Стандартное пополнение, при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную тройку $\{\xi-0,\xi,\xi+0\}$ собственных элементов, мы и обозначим через $\overline{[0,l]}_\sigma$.

Уравнение в (1) в точках $\xi \in S(\sigma)$ принимает вид:

$$\Delta\left(pu''_{xx}\right)'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) = \Delta F(\xi),$$

где $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi+0) - \psi(\xi-0)$ — полный скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ.

Решение модели (1) мы ищем в классе абсолютно непрерывных на $[0,l]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, имеет конечное на $[0,l]$ изменение; квазипроизводная $pu''_{xx}(x)$—абсолютна непрерывна на $[0,l]$; $\left(pu''_{xx}\right)'_x(x)$ и $(ru'_x)(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $[0,l]$.

Для приближенного решения (1) разобьем отрезок на (вообще говоря неравные) части, и выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Выбирая базисные функции $\varphi_i(x)$, мы получим линейную систему

$$\sum_{i=1}^{3N-1} v_i \int_0^\xi p{\varphi_i}''_{xx}{\varphi_j}''_{xx}\,dx + \sum_{i=1}^{3N-1} v_i \int_0^1 r{\varphi_i}'_x{\varphi_j}'_x\,dx + \\ + \sum_{i=1}^{3N-1} v_i \int_0^1 \varphi_i\varphi_j\,dQ = \int_0^1 \varphi_j\,dF, \quad (2)$$

$j = 1, 2, \ldots, 3N-1$, которая имеет единственное решение. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — точное и приближенное решения математической модели* (1) *($v(x)$ — решение* (2)*). Тогда справедлива оценка*

$$\langle u-v, u-v\rangle \leqslant C\cdot h,$$

где h — максимальная длина отрезков разбиения, и

$$\langle u,v\rangle = \int\limits_0^{\xi} pu''v''\,dx + \int\limits_{\xi}^{1} ru'v'\,dx + \int\limits_0^1 uv\,dQ$$

— энергетическое скалярное произведение в пространстве E абсолютно непрерывных на $[0;1]$ функций, первая производная которых суммируема с квадратом на $[0;1]$ и абсолютно непрерывна на $[0;\xi]$, вторая производная (определенная только на $[0;\xi]$) суммируема с квадратом на $[0;\xi]$, удовлетворяющих условиям $u(0) = u'_x(0) = u(1) = 0$. (Последний интеграл понимается по Риману–Стилтьесу.)

ОПТИМАЛЬНЫЕ АРГУМЕНТЫ В НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ L_2[1]

Иванов А.В. (Тула)
d_bringer@mail.ru

Пусть $d\in\mathbb{N}$, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\in\mathbb{R}^d$, $\lambda_j\geqslant -1/2$,

$$v_\lambda(x) = \prod_{j=1}^{d} \frac{|x_j|^{2\lambda_j+1}}{2^{\lambda_j+1}\Gamma(\lambda_j+1)}$$

— степенной вес в $\mathbb{R}^d$, $d\mu_\lambda(x) = v_\lambda(x)dx$, $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ — пространство функций на $\mathbb{R}^d$ с конечной нормой $\|f\|_{2,\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^2d\mu_\lambda\right)^{1/2}$, $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя порядка $\alpha\geqslant -1/2$, q_α — ее наименьший положительный нуль, $j_\alpha(x) = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\frac{J_\alpha(x)}{x^\alpha}$ — нормированная функция Бесселя.

Гармонический анализ в пространстве $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ осуществляется с помощью прямого и обратного преобразований Данкля

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_\lambda(x,y)}d\mu_\lambda(x), \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(y)e_\lambda(x,y)d\mu_\lambda(y),$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00045)

где

$$e_\lambda(x,y)=\prod_{j=1}^{d}e_{\lambda_j}(x_jy_j),\quad e_{\lambda_j}(x_j)=j_{\lambda_j}(x_j)-ij'_{\lambda_j}(x_j)$$

— обобщенная экспонента, многие свойства которой аналогичны свойствам экспоненты $e^{i(x,y)}$.

Пусть V, U — выпуклые симметричные относительно координатных плоскостей компактные в $\mathbb{R}^d$ тела, $|x|_V$, $|x|_U$ — нормы в $\mathbb{R}^d$, определяемые их функционалами Минковского,

$$B_p^d=\left\{x\in\mathbb{R}^d:|x|_p=\left(\sum_{j=1}^{d}|x_j|^p\right)^{1/p}\leqslant 1\right\},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

$a=(a_1,\dots,a_d)$, $a_j>0$, $\Pi_a=\prod_{j=1}^{d}[-a_j,a_j]$.

Для функции $f\in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ определим величину наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа со спектром в σV, $\sigma>0$:

$$E(f,\sigma V)_{2,\lambda}=\inf\{\|f-g\|_{2,\lambda}:g\in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d),\,\operatorname{supp}\widehat{g}\subset\sigma V\},$$

и модуль непрерывности:

$$\omega(f,\tau U)_{2,\lambda}=\sup_{t\in\tau U}\left(2\int_{\mathbb{R}^d}(1-\operatorname{Re}e_\lambda(t,y))|\widehat{f}(y)|^2d\mu_\lambda(y)\right)^{1/2},\quad \tau>0.$$

Точная константа в неравенстве Джексона между величиной наилучшего приближения и модулем непрерывности определяется равенством

$$D(\sigma V,\tau U)_{2,\lambda}=\sup_{f\in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)}\frac{E(f,\sigma V)_{2,\lambda}}{\omega(f,\tau U)_{2,\lambda}}.$$

Число

$$\tau_\lambda(\sigma V,U)=\inf\left\{\tau>0:\,D(\sigma V,\tau U)_{2,\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

называют оптимальным аргументом или точкой Черных.

Пусть $U=\Pi_a$, $V=B_p^d$,

$$b_{\lambda,a}=\left(\frac{2q_{\lambda_1}}{a_1},\dots,\frac{2q_{\lambda_d}}{a_d}\right).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\lambda_j \geqslant -1/2$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_j > 0$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\sigma > 0$, *то*

$$\tau_\lambda(\sigma B_p^d, \Pi_a) = \frac{|b_{\lambda,a}|_p}{\sigma}.$$

В безвесовом случае $\lambda_1 = \dots = \lambda_d = -1/2$, $\Pi_a = B_\infty^d$ теорема установлена Е.Е. Бердышевой [1].

Литература

Бердышеыва Е.Е. Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Матем. заметки. 1999. Т.66, №3. С.336–350.

ОПТИМАЛЬНЫЕ АРГУМЕНТЫ В НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА – СТЕЧКИНА В ПРОСТРАНСТВЕ L_2[1]

Иванов В.И. (Тула)

ivaleryi@mail.ru

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство с нормой $|x| = \sqrt{(x,x)}$, $R > 0$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leqslant R\}$, $L_2(\mathbb{R}^d)$ — гильбертово пространство функций на $\mathbb{R}^d$ с конечной нормой $\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 dx\right)^{1/2}$.

Для функции $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ $\widehat{f}$ — ее преобразование Фурье,

$$E_R(f)_2 = \inf\{\|f-g\|_2 : g \in L_2(\mathbb{R}^d), \operatorname{supp} \widehat{g} \subset B_R\}$$

— величина наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального сферического типа R,

$$\omega_k(\delta, f)_2 = \sup\left\{\left\|\sum_{l=0}^{k}(-1)^l C_k^l f(x+lt)\right\|_2 : |t| \leqslant \delta\right\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

— модуль непрерывности порядка k.

Точную константу Джексона – Стечкина определим равенством

$$D_{k,d}(R,\delta)_2 = \sup_{f \in L_2(\mathbb{R}^d)} \frac{E_R(f)_2}{\omega_k(\delta, f)_2}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00045)

Для любых $R, \delta > 0$ $D_{k,d}(R,\delta)_2 \geqslant \frac{1}{\sqrt{C_{2k}^k}}$. Число

$$\delta_{k,d} = \inf\left\{\delta > 0 : \, D_{k,d}\left(R, \frac{\delta}{R}\right)_2 = \frac{1}{\sqrt{C_{2k}^k}}\right\}$$

называют оптимальным аргументом в неравенстве Джексона – Стечкина или точкой Черных.

При $k = 1$ оптимальные аргументы найдены Н.И. Черных [1] ($d = 1$) и Д.В. Горбачевым [2] ($d > 1$). В [3] доказано, что $\delta_{2,1} > \delta_{1,1}$. В [4] установлено, что $\delta_{2,3} = \delta_{1,3} = 2\pi$.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Для всех* $d \neq 3$

$$\delta_{2,d} > \delta_{1,d}.$$

Теорема 2. *Для всех* $k \in \mathbb{N}$ *и* $d = 3$

$$\delta_{k,3} = 2\pi.$$

Почему различаются случаи размерностей $d = 3$ и $d \neq 3$? Это связано с арифметическими свойствами нулей нормированной функции Бесселя $j_\alpha(x)$. При $\alpha = d/2 - 1$ она является зональной сферической функцией пространства $\mathbb{R}^d$.

Пусть $0 < q_{\alpha,1} < q_{\alpha,2} < \dots < q_{\alpha,s} < \dots$ — положительные нули $j_\alpha(x)$. При $\alpha = 1/2$ ($d = 3$) $q_{\alpha,s} = \pi s$ и для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\{q_{\alpha,s}\}_{s=1}^\infty \bigcap \{kq_{\alpha,s}\}_{s=1}^\infty = \{kq_{\alpha,s}\}_{s=1}^\infty.$$

Для $\alpha \neq 1/2$ и достаточно большого $N = N(\alpha)$

$$\{q_{\alpha,s}\}_{s=N}^\infty \bigcap \{2q_{\alpha,s}\}_{s=N} = \varnothing.$$

Мы предполагаем, что справедливы более сильные утверждения.

Гипотеза 1. При $\alpha \neq 1/2$

$$\{q_{\alpha,s}\}_{s=1}^\infty \bigcap \{2q_{\alpha,s}\}_{s=1}^\infty = \varnothing.$$

Гипотеза 2. При $\alpha \neq \pm 1/2$ для любых $s \neq l$ $\frac{q_{\alpha,s}}{q_{\alpha,l}} \notin \mathbb{Q}$.

Литература

Arestov V.V., Chernykh N.I. On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and function spaces: Proc. Intern. Conf., Gdansk, 1979. Amsterdam: North Holland, 1981. P.25–43.

Горбачев Д.В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Матем. заметки. 2000. Т.68, №2. С.179–187.

Arestov V.V., Babenko A.G. On the optimal point in Jackson's inequality in $L_2(-\infty,\infty)$ with the second modulus of continuity // East J. Approximation. 2004. V.10, №1–2. P.201–214.

Горбачев Д.В., Странковский С.А. Одна экстремальная задача для положительно определенных целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. 2006. Т.80, №5. С.712–717.

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ L_2 С ВЕСОМ И ОБОБЩЕННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ [1]

Иванов В.И., Хуэ Ха Тхи Минь (Тула)

ivaleryi@mail.ru, hahue@mail.ru

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением (x,y) и нормой $|x| = \sqrt{(x,x)}$, $\sigma>0$, $B_\sigma = \left\{x\in\mathbb{R}^d : |x|\leqslant\sigma\right\}$, $v_k\left(x\right) = \prod_{\alpha\in R_+}\left|(\alpha,x)\right|^{2k(\alpha)}$ — степенной вес, определяемым положительной подсистемой R_+ системы корней $R\subset\mathbb{R}^d$ и функцией $k\left(\alpha\right) : R\to\mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений $G\left(R\right)$, порожденной R, $c_k = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2}v_k\left(x\right)dx$ — интеграл Макдональда-Мета-Сельберга, $d\mu_k\left(x\right) = c_k^{-1}v_k\left(x\right)dx$, $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ — гильбертово пространство функций на $\mathbb{R}^d$ с конечной нормой $\|f\|_{2,k} = \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|f\left(x\right)\right|^2 d\mu_k\left(x\right)\right)^{1/2}$.

Гармонический анализ в пространстве $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ осуществляется с помощью прямого и обратного преобразований Данкля

$$\widehat{f}\left(y\right) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x\right)\overline{e_k\left(x,y\right)}d\mu_k\left(x\right), \quad f\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}\left(y\right)e_k\left(x,y\right)d\mu_k\left(y\right),$$

где $e_k\left(x,y\right)$ — обобщенная экспонента, определяемая с помощью дифференциально-разностных операторов Данкля, многие свойства которой аналогичны свойствам экспоненты $e^{i(x,y)}$ (см. [1]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00045)

Для функции $f\in L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$

$$E_\sigma\left(f\right)_{2,k}=\inf\left\{\|f-g\|_{2,k}:g\in L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right),\operatorname{supp}\widehat{g}\subset B_\sigma\right\}$$

— величина наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального сферического типа $\sigma>0$.

С помощью произвольной последовательности комплексных чисел

$$M=\{\mu_s\}_{s\in\mathbb{Z}},\quad\sum_{s\in\mathbb{Z}}\mu_s=0,\quad\sum_{s\in\mathbb{Z}}|\mu_s|<\infty$$

определим обобщенный модуль непрерывности $\omega_M\left(\delta,f\right)_{2,k}$. Если

$$\nu_s=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\mu_{l+s}\overline{\mu_l},\quad\nu_0=\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\mu_l|^2,$$

то функция

$$\varphi\left(t,y\right)=\sum_{s\in\mathbb{Z}}\nu_s e_k\left(st,y\right)\geqslant0,\quad t,y\in\mathbb{R}^d.$$

Положим

$$\omega_M\left(\delta,f\right)_{2,k}=\sup_{|t|\leqslant\delta}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi\left(t,y\right)|\widehat{f}(y)|^2d\mu_k\left(x\right)\right)^{1/2},\quad\delta>0.$$

В случае $k\left(\alpha\right)\equiv0$ получим обобщенный модуль непрерывности, порожденный бесконечно-разностным оператором

$$\Delta_t^M f\left(x\right)=\sum_{s\in\mathbb{Z}}\mu_s f\left(x+st\right).$$

Теорема. *Существует постоянная $\gamma=\gamma\left(k,M,d\right)>0$ такая, что для любой функции $f\in L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ справедливо точное неравенство Джексона*

$$E_\sigma\left(f\right)_{2,k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{\nu_0}}\omega_M\left(\frac{\gamma}{\sigma},f\right)_{2,k}.$$

В случае $k\left(\alpha\right)\equiv0$ теорема была доказана С.Н. Васильевым [2].

Литература

Rösler M. Dunkl Operators: Theory and Applications // Lecture Notes in Math 2002. V.1817. P.93–135.

Васильев С.Н. Неравенство Джексона в $L_2\left(\mathbb{R}^N\right)$ с обобщенным модулем непрерывности // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т.16, №4. С.93–99.

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ КОНВЕРГЕНТНОСТИ

Иванова Е.В. (Воронеж)
lena.ivanova.lica@yandex.ru

В гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно старшей производной и имеющее следующий вид

$$A_o x^{(n)} + A_1 x^{(n-1)} + ... + A_{n-1}\dot{x} + A_n x = f(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}, x^{(n)}). \quad (1)$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения $A_0, A_1, ..., A_{n-1}, A_n$-постоянные линейные ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, причем оператор A_0 обратим. Основное предположение относительно линейной части уравнения состоит в том, что операторный характеристический многочлен

$$L_n(\lambda) \equiv A_0\lambda^{(n)} + A_1\lambda^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}\lambda + A_n \qquad (2)$$

удовлетворяет условию нерезонансности

$$Ł_n(i\theta) \text{ обратим при } -\infty < \theta < +\infty. \qquad (3)$$

Введём в рассмотрение частотные постоянные, положив

$$\sigma_j = \sup_{-\infty<\theta<+\infty} |i\theta|^j \|L_n^{-1}(i\theta)\|, j = 0, 1, \ldots, n. \qquad (4)$$

Относительно нелинейной функции $f(t, x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \times ... \times \mathbb{H}(n \times n$ раз$) \rightarrow \mathbb{H}$ предположим, что она непрерывна по t и удовлетворяет условиям Липшица по пространственным переменным

$$\|f(t, x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n) - f(t, y_0, y_1, ..., y_{n-1}, y_n)\| \leqslant \sum_{j=0}^{n} l_j \|x_j - y_j\|, \qquad (5)$$

где $l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n$ - некоторые положительные постоянные(постоянные Липшица). Предположим ещё, что непрерывная векторная функция $f(t, 0, 0, ..., 0, 0)$ является ограниченной на $\mathbb{R}$. Пусть выполнено основное условие

$$q_{æ} \equiv \sum_{j=0}^{n} \sigma_j l_j < 1. \qquad (6)$$

Теорема. *При выполнении всех перечисленных выше предположений нелинейное уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение $\hat{x}(t)$ (вместе с производными до порядка n включительно). Это решение периодическое по t, если нелинейная функция периодическая по t; почти периодическая по t, если нелинейная функция почти периодическая по t.*

Если операторный характеристический многочлен $L_n(t)$ гурвицевый, то ограниченное решение асимптотически устойчиво в целом, то есть

$$\|x^{(j)}(t) - \hat{x}^{(j)}\| \to 0 \text{ при } t \to +\infty \text{ для } j = 0, 1, ..., n, \quad (7)$$

где $x(t)$-любое другое решение уравнения (1).

Литература

1. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости. ДАН СССР, 1977, т. 233, № 3 - 293-296 с.

2. *Баскаков А.Г.* Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений.Дифференциальные уравнения, 2003, т. 39, № 3 - 413-415 с.

3. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка (æ-теория). Воронеж, препринт № 36 НИИМ ВГУ, 2011 - 52с.

О ДВОЙСТВЕННОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Иноземцев А.И. (Липецк)

inozemcev.a.i@gmail.com

В работе изучается вопрос о существовании двойственного оператора к линейному оператору с многомерными частными интегралами $(Kx)(t) = k_1(t)x(t) + \sum\limits_{i=2}^{2^n} \int\limits_{D_i} k_i(t, S_i)x(s_i)\, dS_i$, где $k_i \colon D \times D_i \to R$ — измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега ($n \geqslant 2$), $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n$, $T_1, T_2, \dots, T_{2^n}$ — подмножества множества $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$, где $T_1 = \varnothing$, $T_2 = \{\tau_1\}, \dots, T_{2^n} = \tau$. S_i и dS_i — набор переменных τ_j и дифференциалов $d\tau_j$ соответственно из T_i. Вектор s_i получается заменой компонент вектора t

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки (проект № 1.4407.2011)

соответствующими элементами T_i. D_i — декартово произведение множеств, на которых определены $\tau_j \in T_i$.

В случае $n = 2$ существование двойственного оператора установлено в работах [1, 2].

Пусть X и Y — банаховы идеальные пространства (БИП) с носителем D, Y' — пространство, двойственное к Y, K' — двойственный оператор к оператору K, а $\mathcal{M}(D)$ — пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций на D.

Транспонированный оператор к оператору K определим равенством $(K^{\#}x)(t) = k_1^*(t)y(t) + \sum\limits_{i=2}^{2^n} \int\limits_{D_i} k_i^*(t, S_i)y(s_i)\,dS_i$, где $k_1^*(t) = k_1(t)$, $k_i^*(t, S_i) = k_i(s_i, t\backslash s_i)$, а $t\backslash s_i$ — компоненты вектора t без s_i.

Теорема. *Пусть оператор K с многомерными частными интегралами действует из X в Y. Тогда он обладает двойственным оператором и $K'y = K^{\#}y$ $(y \in Y', K^{\#}y \in \mathcal{M}(D))$.*

Литература

1. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro—Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. *Калитвин А. С.* Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

НУЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ТРЕХТЕМПОВОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Калашникова М.А., Гим М.Х. (Воронеж)

margarita.kalashnikova@mail.ru, kazolamz@yahoo.com

Рассматривается задача минимизации функционала

$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (<\nu, W(t)\nu> + <u, R(t)u>)\,dt$

на траекториях системы

$\dot{x} = A_{11}(t)x + A_{12}(t)y + A_{13}(t)z + B_1(t)u,\ x(0) = x^0,$

$\varepsilon\dot{y} = A_{21}(t)x + A_{22}(t)y + A_{23}(t)z + B_2(t)u,\ y(0) = y^0,$

$\varepsilon^2\dot{z} = A_{31}(t)x + A_{32}(t)y + A_{33}(t)z + B_3(t)u,\ z(0) = z^0.$

Здесь $\nu = (x', y', z')'$, $x = x(t, \varepsilon) \in R^{n_1}$, $y = y(t, \varepsilon) \in R^{n_2}$, $z = z(t, \varepsilon) \in R^{n_3}$, $u = u(t, \varepsilon) \in R^r$, T - фиксированный момент времени, $W(t) = W'(t) \geqslant 0$, $R(t) = R'(t) > 0$, $t \in [0, T]$. Следуя методу пограничных функций [1] и прямой схеме построения асимптотического разложения решения задач оптимального управления с малым параметром [2], решение рассмотренной задачи будем искать в виде

$$\vartheta(t,\varepsilon) = (x', y', z', u')' = \bar{\vartheta}_0(t) + \Pi_0^1\vartheta(\tau_0) + Q_0^1\vartheta(\tau_1) + \\ + \Pi_0^2\vartheta(\eta_0) + Q_0^2\vartheta(\eta_1) + O(\varepsilon), \quad (1)$$

где $\bar{\vartheta}_0(t)$ - регулярный, $\Pi_0^1\nu(\vartheta_0)$, $\Pi_0^2\vartheta(\eta_0)$- правые пограничные, $Q_0^1\vartheta(\tau_1)$, $Q_0^2\vartheta(\eta_1)$ - левые пограничные члены экспоненциального типа;
$\tau_0 = \frac{t}{\varepsilon}$, $\tau_1 = \frac{t-T}{\varepsilon}$, $\eta_0 = \frac{t}{\varepsilon^2}$, $\eta_1 = \frac{t-T}{\varepsilon^2}$. Разложение (1) подставляется в условия задачи, затем в уравнении состояния приравниваются коэффициенты отдельно зависящие от $t, \tau_0, \tau_1, \eta_0, \eta_1$, при этом минимизируемый функционал записывается в виде $J_\varepsilon(u) = \sum\limits_{j\geqslant 0} \varepsilon^j J_j$. Предполагается, что вырожденная задача при $\varepsilon = 0$ однозначно разрешима и матрицы A_{33}, $(A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32})$ являеются устойчивыми. Сформулированы задачи оптимального управления для нахождения членов разложения. Приведен иллюстративный пример.

Литература

[1]*Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

[2]*Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.* Решение классических задач оптимального управления с погранслоем//АиТ, №7,1989 г.

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Калужина Н.С. (Воронеж)
kaluzhina_ n_ s@mail.ru

Пусть H - комплексное гильбертово пространство, $L^1(\mathbb{R}_+, H)$ - коммутативная банахова алгебра суммируемых на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ со значениями в H комплексных функций со сверткой в качестве умножения. Рассмотрим задачу Коши (1)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Lu + f(t), t \geqslant 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $f \in L^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, H)$, $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$, оператор $L : D(L) \subset H \to H$ имеет дискретный спектр и является самосопряженным.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00378)

Пусть $L \leqslant 0$, и 0 - изолированная точка спектра $\sigma(L)$, которая является собственным значением конечной кратности.

Определение. *Функция $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ называется* ***медленно меняющейся на бесконечности*** *функцией (используется обозначение $u \in C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$), если для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено* $\lim\limits_{s\to\infty} \|u(t+s) - u(s)\| = 0$.

Примером является функция $sin(ln(1+|t|))$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Каждое слабое решение задачи* (1) *является медленно меняющейся на бесконечности функцией (элементом пространства $C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$).*

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ ФУНКЦИЙ ЛЕБЕГА-ЯКОБИ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-1,1)$[1]

Кальней С.Г. (Москва)
skalney@yandex.ru

Рассматривается задача об оценке интегралов

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(x;\Lambda) = \int\limits_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \hat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x) \hat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(t) \right| (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} dt$$

на $(-1,1)$, которые являются функциями Лебега линейных средних, определяемых матрицей Λ, рядов Якоби. $\hat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ - ортонормированные многочлены Якоби, $\alpha, \beta > -1$.

Теорема. *Если x принадлежит $(-1,1)$, то для любых $\lambda_k^{(n)}$*

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(x;\Lambda) \leqslant c \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} \left| \Delta^2 \lambda_k^{(n)} \right| + \sum_{k=0}^{n} \frac{\left|\lambda_k^{(n)}\right|}{n+1-k} \right).$$

Если матрица Λ удовлетворяет условиям Теплица, то из данной теоремы и теоремы о равносходимости для рядов Якоби (см.[1, глава 7]) следует условие ограниченности функций Лебега-Якоби линейных средних внутри интервала $(-1,1)$, аналогичное условию А.В. Ефимова [2] ограниченности констант Лебега линейных средних тригонометрических рядов Фурье.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00417).

А именно: если $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} \left|\Delta^2 \lambda_k^{(n)}\right| \leqslant c$, то условие $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\left|\lambda_k^{(n)}\right|}{n+1-k} \leqslant c$ необходимо и достаточно для ограниченности функций Лебега-Якоби в точках интервала $(-1,1)$.

Литература

1. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 2007. - 480 с.

2. *Ефимов А.В.* О линейных методах суммирования рядов Фурье// сер. матем., 1960, Т. 24, С. 743–756.

СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ ТЕОРЕМА КУНА-ТАККЕРА В НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Канатов А.В., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

alexkanatov@yandex.ru, m.sumin@mail.ru

Доклад посвящен применению формализма двойственной регуляризации [1] к параметрической нелинейной задаче математического программирования общего вида в гильбертовом пространстве с операторным ограничением типа равенства и конечным числом функциональных ограничений типа неравенства

$$f(z) \to \inf, \ \ g(z) = p, \ \ h(z) \leqslant r, \quad z \in D \subset Z, \tag{1}$$

где $f : D \to R^1$ – непрерывный функционал, $g : D \to H$ – вполне непрерывный оператор, $h \equiv (h_1, ..., h_m) : D \to R^m$ – непрерывный функционал, $D \subset Z$ – замкнутое ограниченное множество, $p \in H$ и $r \in R^m$ – параметры, Z и H – гильбертовы пространства. Для нелинейной задачи (1) на основе указанного формализма [1] в терминах модифицированных функций Лагранжа формулируется устойчивая к ошибкам исходных данных секвенциальная регуляризованная теорема Куна-Таккера в недифференциальной форме, представляющая собою необходимое и достаточное условие на элементы минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги. Конструкция модифицированной функции Лагранжа является прямым следствием свойств обобщенной дифференцируемости

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00199-а) и Минобрнауки РФ (шифр заявки 1.1907.2011).

функции значений задачи (1). Обсуждаемая теорема обобщает аналогичную регуляризованную теорему Куна-Таккера из [2], доказанную для задачи выпуклого программирования вида (1).

Литература

1. *Sumin M.I.* Parametric Dual Regularization in a Nonlinear Mathematical Programming // Advances in Mathematics Research, Vol. 11. New-York: Nova Science Publishers Inc., 2010, Chap. 5, pp. 103-134.

2. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна-Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594-1615.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ХИЛЛА-ШРЁДИНГЕРА С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Карпикова А.В. (Воронеж)

karpikovaav@mail.ru

Рассматривается одномерный оператор Хилла—Шредингера

$$L(\theta) = L^0 - B : D(L(\theta)) \subset L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi], \qquad \theta \in [0, 2\pi],$$

который определяется дифференциальным выражением

$$L(\theta)y = -y'' - v(t)y.$$

$$y \in D(L(\theta)) = \left\{ y \in W_2^2[0, 2\pi] : y(2\pi) = e^{i\theta}y(0), y'(2\pi) = e^{i\theta}y'(0) \right\}.$$

Теорема. Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$\sigma(L(\theta)) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{|n| \geqslant m+1} \sigma_n(\theta) \right),$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом элементов, не превосходящим $2m+1$, а $\sigma_n(\theta)$ определяются равенством

$$\sigma_n(\theta) = \{(n + \frac{\theta}{2\pi})^2 - \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0 \\ k \neq -2n}} \frac{\omega_k}{k(k+2n)} \pm \sqrt{\widetilde{\omega}_n} + \beta_n^{\pm}\}, |n| \geqslant m+1,$$

где $\beta_n^{\pm} = \frac{\alpha(n)}{n}$, $\sum\limits_{|n| \geqslant m+1} |\alpha(n)| < \infty$.

Литература

Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987. – 165с.

Баскаков А.Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом /А.Г. Баскаков , А.В. Дербушев , А.О. Щербаков // Известия РАН. сер. матем. – 2011. – Т.75. – №3. – С. 3-28.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕБИУСОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ[1]

Кергилова (Туртуева) Т.А. (Горно-Алтайск)

kergyl@gmail.com

Мёбиусово преобразование пространства $\bar{R}^n$ определяется как композиция конечного набора инверсий (отражений) относительно обобщенных $(n-1)$-мерных сфер. Известно (см. [1], теорема 3.2.7, стр. 34), что критерием мёбиусовости преобразования $f : \bar{R}^n \to \bar{R}^n$ является сохранение им абсолютного двойного отношения для всех четверок точек в $\bar{R}^n$.

В 2001 году Beardon и Minda [2] доказали, что *любое инъективное отображение $f : D \to \bar{R}^n$ области $D \subset \bar{R}^n$, которое сохраняет абсолютное двойное отношение с фиксированным значением* 1*, является мёбиусовым вложением.*

Определение. Для четверки точек $x_1, x_2, x_3, \infty \subset \bar{R}^n$ полагаем

$$q(x_1, x_2, x_3, \infty) := \frac{|x_1 - x_3|}{|x_2 - x_3|} e^{i\varphi} \ ,$$

где $\varphi \in [0, \pi]$ – неориентированный угол между векторами $\overrightarrow{x_1 x_3}$ и $\overrightarrow{x_2 x_3}$. Тогда *главным ангармоническим отношением* тетрады x_1, x_2, x_3, x_4 в $\bar{R}^n$ назовем число

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) := q(\mu(x_1), \mu(x_2), \mu(x_3), \infty) \ ,$$

где μ – произвольное мёбиусово преобразование, переводящее точку x_4 в ∞.

Нами доказана следующая

Теорема. *Пусть $\lambda = |\lambda| e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$. Топологическое вложение $f : D \to \bar{R}^n$ области $D \subset \bar{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ является мёбиусовым*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-90801 мол-рф-нр)

вложением тогда и только тогда, когда оно сохраняет главное ангармоническое отношение с фиксированным значением λ.

Литература

1. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. М.: Наука. 1986. 304 с.

2. *Beardon A.F., Minda D.* Sphere-preserving maps in inversive geometry. Proc. Amer. Math. Soc. 2001. Vol. 130. No 4. P. 987-998.

ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ

Кириченко С.В. (Самара)
svkirichenko@mail.ru

В области $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрена задача для параболического уравнения

$$u_t - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

решение которого удовлетворяет граничным условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T] \tag{2}$$

и нелокальному условию

$$\int\limits_0^T K(t)u(x,t)dt = 0, \quad x \in [0,l]. \tag{3}$$

Условие (3) является интегральным условием I рода, которое сводится к нелокальному условию II рода:

$$u(x,0) + \int\limits_0^T H(x,t)u(x,t)dt = g(x), \tag{4}$$

где

$$H(x,t) = \frac{K'(t) - c(x,t)K(t)}{K(0)}, \quad g(x) = -\frac{1}{K(0)}\int\limits_0^T K(t)f(x,t)dt.$$

Доказана следующая

Теорема. *Пусть выполняются условия:* $c(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $c_t(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $K(t) \in C^1([0;T])$, $K(T) = K'(T) = 0$, $K(0) \neq 0$. *Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1),(2),(4).*

Литература

Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода.//Известия вузов. Математика. 2012, № 4, с. 74-83.

ТЕОРЕМА ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПАРАМЕТРА

Ковалевский Р.А. (Воронеж)

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t)>0$ при $t > 0$, $\alpha(t)=\text{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d>0$. Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Свойства этого преобразования получены в [1]. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}$, что дает возможность расширить это преобразование до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$. Это равенство позволяет также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ - обратное преобразование Фурье. В [1] показано, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, ...$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Рассмотрим весовой псевдодифференциальный оператор с символом, зависящим от комплексного параметра p. Этот оператор определен формулой $K^{\sigma}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\,v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}\left[\lambda(p,t,\xi,\eta)\,F_{\alpha}F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]\right]$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $p(\lambda,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(\lambda,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^{\sigma}_{\alpha,\lambda}(\Omega)$, где $\Omega\subset\bar{R}^1_+$ открытое множество, $\lambda\in Q$, где Q- некоторый сектор в правой полуплоскости комплексной плоскости, $|\lambda|\geqslant\lambda_0>0$; σ - действительное число, если функция $p(\lambda,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t\in\Omega$ и по переменной $\eta\in R^1$. Причем, при всех $j=0,\ 1,\ 2,...,\quad l=0,\ 1,\ 2,...$ справедливы оценки

$$\left|\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m}\frac{\partial^l}{\partial\eta^l}p(\lambda,t,\xi,\eta)\right|\leqslant c_{m,l}\left(|\lambda|^2+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-m-l)}$$

с константами $c_{m,l}>0$, не зависящими от $\xi\in R^{n-1},\ \ \eta\in R^1$, $\lambda\in Q$, $t\in\Omega$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s – действительное число) состоит из всех функций $v(x,t)\in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha,\lambda}=\int\limits_{R^n}(1+|\lambda|^2+|\xi|^2+\eta^2)^s\left|F_{\alpha}F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta,$$

зависящая от параметра λ

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $p(\lambda,t,\xi,\eta)\in S^{m}_{\alpha,\lambda}(\Omega)$, m – действительное число. Тогда весовой п. д. о. $P(\lambda,t,D_x,D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m,\alpha}(R^n_+)$ в $H_{s,\alpha}(R^n_+)$.

Если символ весового псевдодифференциального оператора не зависит от параметра λ, то аналогичная теорема была доказана в работе [1].

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

ОСОБЕННОСТИ ДИСТАНЦИОНОГО ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ

Колесникова И.В. (Воронеж)
kolinna@inbox.ru

В последнее время предпринимаются серьезные шаги, направленные на внедрение в педагогику инновационных методов обучения. Дистанционное обучение (ДО) – взаимодействие учителя и учащихся между собой на расстоянии, отражающее все присущие учебному процессу компоненты (цели, содержание, методы, организационные формы, средства обучения) и реализуемое специфичными средствами Интернет технологий или другими средствами, предусматривающими интерактивность. Основу образовательного процесса при ДО составляет целенаправленная и контролируемая интенсивная самостоятельная работа обучаемого, который может учиться в удобном для себя месте, по индивидуальному расписанию, имея при себе комплект специальных средств обучения и согласованную возможность контакта с преподавателем по телефону, скайпу, электронной и обычной почте. Ведущая тенденция развития дистанционного образования – это использование ДО не только в традиционном очном обучении, но и в обучении школьников.

Разработкой теоретических основ дистанционного обучения занимались А.А. Андреев, В.М. Кухаренко, Н.В. Морзе, В.В. Олейник, Е.С. Полат, А.В. Рыбалко, Е.М. Смирнова-Трибульская, А.В. Хуторской и другие.

В большинстве случаев, ДО школьников должно рассматривается как дополнительное к традиционному классно-урочному обучению. Элементы дистанционного обучения могут стать незаменимыми для таких групп учеников:

1) учеников сельских школ для получения качественного образования;

2) одарённых детей для углубления знаний, проверки степени самореализации во время участия в олимпиадах разного уровня;

3) ученикам выпускных классов для подготовки к сдаче ЕГЭ;

4) неуспевающим ученикам для формирования интереса к обучению или его обновлению, повышения качества знаний;

5) ученикам, которые в силу ряда причин пропускали занятия (активисты, спортсмены и другие);

6) ученикам разных классов для самореализации, общего развития и систематизации знаний, исключения пробелов знаний по

каким-либо причинам (например, карантина).

А для детей с ограниченными возможностями ДО может стать единственной формой получения образования.

Как определил В.В. Сташенко, "учебный процесс при дистанционном обучении содержит в себе все формы традиционной организации образовательного процесса и объединяет их в последствии с самостоятельной работой учеников".

Первая форма - это курсы дистанционной поддержки, где размещены материалы для домашней и самостоятельной работы.

Вторая форма - "Дистанционный репетитор в рамках которого можно помочь не только школьникам, но и учителям, которые хотят попробовать новые технологии.

Третья форма - вебинары, семинары. Вебинар - это особый тип веб-конференций, общения в режиме реального времени.

Основные возможности ДО:

1. Проводить on-line уроки-занятия с несколькими участниками одновременно (до 1000 человек)

2. Организовывать творческие виртуальные группы-классы учащихся

3. Учащиеся получают возможность общаться во время занятия не только с учителем, но и друг с другом.

4. Организовывать присутствие заинтересованных лиц на уроке (родители, методисты, и другие) без дополнительного стресса обучающихся.

5. Экономить денежные средства за счет организации учебных групп.

6. Расширить инструментарий педагога при применении технологии дистанционного обучения.

7. Привлекать различных специалистов находящихся в удалении от школы и учащихся (например, обучение иностранному языку его носителем, при реализации договоров между школами и ВУЗами)

Литература

Ибрагимов И. М. Информационные технологии и средства дистанционного обучения. М.: Академия, 2007. - 336 с.

Бакалов В.П., Крук Б.И., Журавлева О.Б. Дистанционное обучение. Концепция, содержание, управление. М.: Горячая Линия - Телеком, 2008. - 108 с.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ВЕКТОРА ПО ЛИНЕЙНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ И L-АППРОКСИМАЦИЯ[1]

Конягин С.В., Малыхин Ю.В., Рютин К.С. (Москва)

konyagin23@gmail.com, jura05@narod.ru, kriutin@yahoo.com

Всюду в работе $1 \leqslant k \leqslant n < N$. Мы говорим, что вектор $x \in \mathbb{R}^N$ является k-разреженным, если он имеет не более k ненулевых координат. Пусть задана $n \times N$ матрица Φ. Рассматривается задача восстановления k-разреженного вектора $x \in \mathbb{R}^N$ по вектору $y = \Phi x \in \mathbb{R}^n$. Эта задача является важной частью теории, называемой в русскоязычной литературе теорией сжатых измерений ("Compressed Sensing" или "Compressive Sampling") (см. обзоры [1,2] и библиографию в них).

Для построения эффективных алгоритмов вычисления x Донохо, Сандерс и Чен [3] рассмотрели следующую задачу ℓ_1-минимизации:

$$\|z\|_1 \to \min, \quad z \in \mathbb{R}^N,\ \Phi z = y, \qquad (P_1),$$

где $\|z\|_1 = |z_1| + \ldots + |z_N|$.

Отметим, что задача ℓ_1-минимизации связана и с задачей восстановления вектора $x \in \mathbb{R}^N$, принадлежащему заданному подпространству размерности n, если при задании вектора x разрешается допускать ошибки не более чем в k координатах.

Из результатов Кандеса, Ромберга и Тао [5] следует существование матриц Φ с условием

($\star$) Для любого k-разреженного вектора $x \in \mathbb{R}^N$ и $y = \Phi x$ решение задачи $\|z\|_1 \to \min,\ \Phi z = y$, единственно и совпадает с x

для всех k, n, N, удовлетворяющих неравенству $k \leqslant cn/\log(2N/n)$. Мы доказывем, что при бо́льших значениях k таких матриц не существует.

Теорема 1. *Если при данных k, n, N существует $n \times N$ матрица Φ, обладающая свойством ($\star$), то $k \leqslant \max(1, Cn/\log(2N/n))$.*

Здесь и далее через $c, C, C_1, C_2, \ldots$ обозначаются абсолютные положительные постоянные.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00329, все авторы) и Программы поддержки ведущих научных школ, (проект № НШ-6003.2012.1, первый и третий авторы, и проект № НШ-6431.2012.1, второй автор)

Для ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^N$ определим $k^*(x)$ как наименьшее число k, такое что $|x_{i_1}| + \ldots + |x_{i_k}| \geqslant \frac{1}{2}\|x\|_1$ для некоторых различных координат $i_1, \ldots, i_k$. Для $M \subset \mathbb{R}^N$ положим $k^*(M) = \min\limits_{x \in M, x \neq 0} k^*(x)$. Свойство $(\star)$ нетрудно сформулировать в терминах $\mathcal{N}(\Phi) = \{x\colon \Phi x = 0\}$.

Предложение 1. *Пусть* $k^* = k^*(\mathcal{N}(\Phi))$. *Свойство* $(\star)$ *выполняется при* $k < k^*$ *и не выполняется при* $k \geqslant k^*$.

Из предложения 1 вытекает, что максимальное k, при котором существует матрица Φ со свойством $(\star)$, равно $k^*_{n,N} - 1$, где

$$k^*_{n,N} = \max_{\Phi} k^*(\mathcal{N}(\Phi)) = \max_{L\colon \dim L \geqslant N-n} k^*(L)$$

(максимум берется по линейным пространствам $L \subset \mathbb{R}^N$ коразмерности не выше n).

В случае $n = 1$ легко видеть, что $k^*_{1,N} = 1$.

Теорема 2. *При* $2 \leqslant n < N$ *имеют место соотношения*

$$\max(2, C_1 n/\log(2N/n)) \leqslant k^*_{n,N} \leqslant \max(2, C_2 n/\log(2N/n)).$$

Теорема 1 следует из оценки сверху на $k^*_{n,N}$.

Рядом авторов [4,6,7] отмечалась связь между задачей сжатого измерения и оценками поперечников конечномерных множеств. Пусть B_p^N — единичный шар ℓ_p^N. Рассмотрим множество

$$V_k = V_k^N = \{(v_1, \ldots, v_N)\colon v_j \in \{-1, 0, 1\}, \sum_{j=1}^N |v_j| = k\}.$$

Предложение 2.

$$k^*_{n,N} \leqslant k \Longleftrightarrow d_n(V_k^N, \ell_\infty^N) \geqslant \frac{1}{2},$$

где d_n *обозначает Колмогоровский поперечник.*

Таким образом, оценка сверху величины $k^*_{n,N}$ сводится к оценке снизу Колмогоровских поперечников.

Ранее в работе Беньямини, Кроо и Пинкуса [8] была введена величина α^*, близкая к $k^*(M)$. Для $M \subset L^1(X, \mu)$ определяется

$$\alpha^*(M) = \sup\left\{\alpha\colon \sup_{\substack{f \in M\\ f \neq 0}} \sup_{E\colon \mu(E) \leqslant \alpha} \frac{\int_E |f|\,d\mu}{\int_X |f|\,d\mu} \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Теорема 3. (Ю.В. Малыхин, К.С. Рютин) *Пусть*

$$\alpha = 2(1 - \Phi(\sqrt{2\ln 2})), \quad \text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Тогда для любого пространства с неатомической мерой (X, μ) *и линейного подпространства* $M \subset L^1(X, \mu)$

$$\alpha^*(M) \leqslant \alpha + o(1)$$

при $\dim M \to \infty$ *и* $\alpha^*(M) \leqslant \alpha$ *при* $\dim M = \infty$.

Отметим, что оценка в теореме 3 точная: если $M-$ подпространство линейных функций в пространстве интегрируемых функций на евклидовой сфере S^N, то $\alpha^*(M) > \alpha$ (см. [8]).

Литература

1. *Davenport M., Duarte M., Eldar Y., Kutyniok G.* Introduction to compressed sensing, Chapter in “Compressed Sensing: Theory and Applications”. Cambridge University Press, 2012.

2. *Fornasier M., Rauhut H.* Compressive sensing, Chapter in “Part 2 of the Handbook of Mathematical Methods in Imaging” (O. Scherzer Ed.). Springer, 2011.

3. *Chen S.S., Donoho D.L., Saunders M.A.* Atomic decomposition by basis pursuit, SIAM Rev., **43**:1 (2001), 129–159.

4. *Donoho D.L* Compressed sensing, IEEE Trans. Inform. Theory, **52**:4 (2006), 1289–1306.

5. *Candes E.J., Romberg J.K., Tao T.* Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements, Comm. Pure Appl. Math., **59**:8 (2006), 1207–1223.

6. *Cohen A., Dahmen W., DeVore R.* Compressed sensing and k-term approximation, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 211-231.

7. *Кашин Б.С., Темляков В.Н.* Замечание о задаче сжатого измерения, Мат. заметки, **82**:6 (2007), 829–837.

8. *Benyamini Y., Kroó A., Pinkus A.*, L^1-Approximation and Finding Solutions with Small Support, Constr. Approx., to appear.

ПОРЯДОК ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ УТОЧНЕННОГО ПОРЯДКА

Косарев П.А. (Орел)

kossarev_petr@mail.ru

Рассмотрим пространство $[\rho(r), \theta], \theta < \infty$ — пространство всех целых функций, для которых

$$\|F\|_{\xi} = \sup_{r \geqslant 0} \left\{ \max_{|z| \leqslant r} |F(z)| e^{-(\theta+\varepsilon) r^{\rho(r)}} \right\} < +\infty, \forall F \in [\rho(r), \theta],$$

где $\rho(r)$ — уточненный порядок, то есть выполняется:

$$1) \lim_{p \to \infty} \rho(p) = \rho,$$

$$2) \lim_{p \to \infty} (\rho'(p) \cdot p \cdot \ln p) = 0.$$

Вычислим характеристики (порядок и тип) [1] оператора дифференцирования в пространстве $[\rho(r), \theta]$

$$\beta_{\varepsilon}\left(\frac{d}{dz}\right) = \beta\left(\frac{d}{dz}\right) = \frac{p-1}{p}$$

$$\alpha_{\varepsilon}\left(\frac{d}{dz}\right) = \alpha\left(\frac{d}{dz}\right) = e^{-1}\left(\sigma e \rho\right)^{\frac{1}{\rho}}, \rho \leqslant 1$$

$$\alpha_{\varepsilon}\left(\frac{d}{dz}\right) = e^{-1}\left(\sigma e \rho \Omega_{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \alpha\left(\frac{d}{dz}\right) = e^{-1}\left(\sigma e \rho \Omega\right)^{\frac{1}{\rho}}, \rho > 1$$

Таким образом, характеристики оператора дифференцирования в пространстве $[\rho(r), \theta]$ совпадают с характеристиками этого оператора в пространстве $[\rho, \sigma]$, найденными С.Н.Мишиным в [1]

Литература

Громов В.П., Мишин С.Н., Панюшкин С.В. Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения. Монография. - Орел: ГОУ ВПО ОГУ, 2009. - 430 с.

ГИПЕРВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА СТЕПАНОВА И КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Костин А.В., С. Бадран Д. (Воронеж)
leshakostin@mail.ru

Пусть

$$_{\pm}\mathfrak{D}_t^{\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^{\infty} e^{-\alpha}\varphi(t \mp s)ds, \tag{1}$$

правая и левая дробные производные Римана-Лиувилля порядка $0 < \alpha \leqslant 1$, $t \in (-\infty, \infty)$, функции $\varphi(t)$.

Через $S_{\rho_{\pm}}$ будем обозначать ρ– весовые пространства функций Степанова, определяемые нормами

$$\|f\|_{\rho_{\pm}} = \sup_{t \in R}\int_0^{\infty} e^{-s}\rho(t \mp s)|f(t \mp s)|ds,$$

где $\rho(s)$ такой вес, что: 1)$\rho(s) > 0$, 2)$\rho'(s) > 0$, 3) при некотором $m > 0$ выполняется оценка $\rho(t) \leqslant m\rho'(t)$.

При $x \geqslant 0$ решаются задачи об отыскании функции $u_{\pm}(t,x)$ удовлетворяющие уравнениям

$$_{\pm}\mathfrak{D}_t^{\alpha}u_{\pm}(t,x) = \frac{\partial^2 u_{\pm}(t,x)}{\partial x^2}, \tag{2}$$

(знаки $\pm$ определяют нужное соответствие)

$$\lim_{x \to \infty}|u_{\pm}(t,x)| = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \pm \mu u_{\pm}(t,x)|_{x=0} = f_{\pm}(t), \tag{4}$$

где $\mu \in \mathbb{R}$, $f(t)$ – локально интегрируемая функция. При этом $f_{+}(t)$ может расти при $t \to \infty$ быстрее экспоненты, а $f_{-}(t)$ – может убывать сколь угодно быстро.

Ставится вопрос о нахождении класса функциональных пространств, в которых задача (2)–(4) однозначно разрешима и имеет место устойчивость по исходным данным $f(t)$.

Отметим, что с такой точки зрения эти задачи ранее не рассматривались.

Теорема. *Если $\mu + \omega^{\frac{\alpha}{2}} > 0$, то задачи (2)–(4) равномерно корректны в пространствах $S_{\rho_\pm}$ соответственно для их решений справедливы представления*

$$u_\pm(t,x) = \int_x^\infty e^{\mu(x-\tau)} U(\tau, -\mathfrak{D}_\pm^{\frac{\alpha}{2}}) f(t) d\tau,$$

где $U(\tau, -\mathfrak{D}_\pm^{\frac{\alpha}{2}})$ – полугруппа с генератором $-\mathfrak{D}_\pm^{\frac{\alpha}{2}}$.

При этом справедлива оценка

$$\|u_+(t,x)\|_{\rho_\pm} \leqslant \frac{M}{\mu + \omega^{\frac{\alpha}{2}}} e^{\omega^{-\frac{\alpha}{2}} x} \, \|f\|_{\rho_\pm}.$$

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ МОРФИЗМОВ

Крейн М.Н. (Липецк)
travkin@lipetsk.ru

В [1] было показано, что аналитическое или заданное многочленом отображение $f : B(E) \to B(E)$, действующее в алгебре линейных ограниченных операторов банахова пространства E и имеющее компактный свободный член, индуцирует преобразование морфизмов GL_c-расслоений (такие расслоения называют также фредгольмовыми). Если ещё при этом множество $F(E)$ фредгольмовых операторов инвариантно относительно действия f , то фредгольмовы морфизмы преобразуются во фредгольмовы. Этим условиям удовлетворяет, в частности, такое простое отображение, как $f(A) = A^2$. В случае действительного пространства E, когда определены понятия ориентируемости или неориентируемости, а также классы Штифеля-Уитни фредгольмовых расслоений и фредгольмовых морфизмов, оказывается верной

Теорема. *Индуцированное отображением $f(A) = A^2$ преобразование фредгольмовых морфизмов переводит любой фредгольмов морфизм в ориентируемый.*

Доказательство основано на том, что f_* удваивает классы Штифеля-Уитни. а поскольку они определены по mod 2, то, удваиваясь, становятся нулевыми, что равносильно ориентируемости полученного морфизма.

Литература

1. *Крейн М.Н.* Отображения в некоммутативных алгебрах и преобразования GL_c-расслоений. // Современные методы теории

функций и смежные проблемы. Материалы Воронежской зимней математической школы. - Воронеж: ВГУ, 2011. - С. 188-189.

О ПОСТРОЕНИИ СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ ВСПЛЕСКОВ[1]

Кривошеин А.В. (Санкт-Петербург)
krivosheinav@gmail.com

Свойство симметрии для систем всплесков является одним из наиболее востребованных в прикладных и инженерных исследованиях. Однако для многомерного случая общих методов построения симметричных систем всплесков в настоящее время нет. Задача осложняется еще и тем, что в многомерном случае возможны различные виды симметрии.

В статье [S. Karakaz'yan, M. Skopina, M. Tchobanou, 2009] представлен способ построения центрально-симметричных двойственных фреймов всплесков с интерполяционной масштабирующей маской для ряда матричных коэффициентов растяжения. В настоящей работе этот метод распространен на произвольные матричные коэффициенты растяжения. Кроме того, предложен метод построения жестких и двойственных фреймов всплесков с интерполяционной масштабирующей маской, обладающих свойством центральной симметрии, осевой симметрии и симметрией специального типа, для произвольных матриц растяжения (которые являются подходящими для соответствующих типов симметрии в некотором естественном смысле).

МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ТОЧЕК ЭКСТРЕМУМОВ В МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЯХ[2]

Крыжевич Л.С. (Курск)
Leonid@programist.ru

Постановка задачи:

Пусть $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и зададим ограниченную кусочно-непрерывную функцию $s : \Theta \to \Omega$, $x \mapsto s(x)$. Необходимо найти точки экстремума функции $s(x)$.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00216-а) и СПбГУ, НИР "Вещественные и p-адические системы всплесков"

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000)

Методика описанная в [1], позволяет с помощью wavelet - преобразований быстро находить точки перегиба функции. Адаптация этого подхода для задачи нахождения экстремумов и обобщение его на многомерный случай позволит выполнять быстрый поиск локальных максимумов и минимумов исходной функции.

Зададим масштабирующую функцию $\varphi(y)$ такую, что:

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(y)dy = 1$$

и $\varphi(y) \to 0$ при $y_1, y_2, ..., y_n \to \infty$.

Для функции плотности палитры $f(y)$ определим сглаженную функцию $\hat{f}(y)$ при помощи n-мертной свертки $f(y)$ с $\varphi(y)$

$$\hat{f}(y) = f(y) \otimes \varphi_\sigma(y)(1)$$

где

$$\varphi_\sigma(y) = \frac{1}{\sigma^n}\varphi\Big(\frac{y_1}{\sigma}, \frac{y_2}{\sigma}, ..., \frac{y_n}{\sigma}\Big)(2)$$

Первую производную масштабирующей функции (2) определим следующим образом:

$$\overrightarrow{\psi}_\sigma(y) = \left[\begin{array}{l} \psi_\sigma^{y_1}(y) \\ \cdots \\ \psi_\sigma^{y_n}(y) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sigma^n}\psi^{y_1}(\frac{y_1}{\sigma}, \frac{y_1}{\sigma}, ..., \frac{y_n}{\sigma}) \\ \cdots \\ \frac{1}{\sigma^n}\psi^{y_n}(\frac{y_1}{\sigma}, \frac{y_1}{\sigma}, ..., \frac{y_n}{\sigma}) \end{array}\right], (3)$$

где

$$\psi_\sigma^{y_i}(y) = \sigma\frac{\partial}{\partial y_i}\varphi_\sigma(y), i = \overline{1..n}.(4)$$

Многомерное wavelet-преобразование может быть получено в форме

$$\begin{aligned} W\{f, \overrightarrow{\psi}_\sigma\}(y) &= (f * \overrightarrow{\psi_\sigma})(y) = (f * \mathrm{grad}\varphi_\sigma)(y) = \\ &= \sigma\mathrm{grad}((f * \varphi_\sigma)(y)) = \sigma\mathrm{grad}(\widetilde{f}(y))(5) \end{aligned}$$

Равенство (5) указывает на то, что n-мерное wavelet-преобразование функции $f(y)$ посредством wavelet-ов (3) и (4) пропорционально первым производным от сглаженной функции $\widetilde{f}(y)$ из (1).

Точки пересечения $W\{f, \overrightarrow{\psi}_\sigma\}(y)$ с плоскостью $y = 0$ соответствуют точкам с наименьшими изменениями величин $f(y) * \varphi_\sigma(y)$.

Более того, становится возможным автоматический поиск направления наименьшего изменения функции $W\{f, \overrightarrow{\psi}_\sigma\}(y)$, который противоположен вектору $\mathrm{grad}(\widetilde{f}(y))$.

В [2] демонстрируется, как вышеописанный метод позволяет описать функцию, имея данные только экстремальных точек, что делает его особенно эффективным, когда функция задана дискретно.

Литература

1.*Юдин М.Н., Фарков Ю.А., Филатов Д.М.* Введение в вейвлет-анализ // Учеб.-практ. пособие. Моск. геологоразв. акад. М.,2001. -72 с.

2. *Сизов А.С., Крыжевич Л.С., Яночкина О.О.* Минимизация числа отсчетов при дискретизации финитного сигнала. Известия Юго-Зап. Гос. ун-та. Серия "Управление, вычислительная техника,информатика. Медицинское приборостроение". 2012. №2. Часть 3.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОВЕДЕНИЕМ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПЕРЕМЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МЕХАНИКЕ ТЕЛЕСКОПИЧЕСКИХ РОБОТОВ

Кубышкин Е.П., Тряхов М.С.

kubysh@uniyar.ac.ru

Рассматривается начально-краевая задача

$$J(l)\ddot{\theta} - \int\limits_0^l (b + l - x_1)u_{tt}(x_1,t)dx_1 = M(t) \tag{1}$$

$$u_{tt} + u_{xxxx} = (b + l - x)\ddot{\theta} \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, u(l,t) = u_x(l,t) = 0 \tag{3}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = \dot{u}_0(x). \ (0 \leqslant x \leqslant l_0) \tag{4}$$

относительно функций в $\theta = \theta(t), u = u(x,t)$ области $Q_{l,T} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, где $l = l(t) \in W_2^2(0,T), l(t) > 0, l_0 = l(0), M(t) \in$

$L_2(0,T), J(l) = J_0 + 1/3 + (b+l)[(b+$
$+l) - 1] > 0$, J_0 и b положительные постоянные.

Начально-краевая задача (1) – (4) приведена в безразмерных переменных и описывает динамику телескопического манипуляционного робота, рука которого обладает упругими свойствами и движется по заданному закону.

Рассмотрены следующие задачи оптимального управления.

Задача 1. *Определить функцию $M(t) \in L_2(0,T)$, переводящую решение краевой задачи (1)-(3) из начального состояния (4) в конечное*

$$\begin{aligned} &\theta(T) = \theta_{0T},\ \dot{\theta}(T) = \theta_{1T},\ u(x,T) = u_{0T}(x), \\ &u_t(x,T) = u_{1T}(x),\ (0 \leqslant x \leqslant l_T = l(T)) \end{aligned} \tag{5}$$

в заданный момент времени T и минимизирующую функционал

$$\Phi(M) = \|M(t)\|_{L_2(0,T)} \tag{6}$$

Задача 2. *(Задача быстродействия). Определить функцию, $M(t) \in L_2(0,T)$,*
$\Phi(M) \leqslant L < \infty$, переводящую решение краевой задачи (1)-(3) из (4) в (5) за минимальное время T .

Получено решение задач 1,2 в виде ряда по априори построенным функциям. Минимальное время T находится как корень некоторого нелинейного уравнения. Сформулирован принцип максимума для задач 1,2.

КРИТЕРИИ ВЛОЖИМОСТИ В КЛАССЕ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА В СЕБЯ С ИНВАРИАНТНЫМ ДИАМЕТРОМ[1]

Кудрявцева О.С. (Волжский)
kudryavceva@vgi.volsu.ru

Пусть $\mathfrak{D}$ – совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ функций f, принимающих значения из $\mathbb{D}$, оставляющих инвариантным вещественный диаметр, монотонно возрастающих на вещественном диаметре и имеющих на нём ограниченное искажение. Более точно, $\mathfrak{D}$ – совокупность голоморфных отображений $f \colon \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$, удовлетворяющих условиям:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00434-а)

(1) $\operatorname{Im} f(x) = 0$ при $x \in (-1,1)$, $\lim\limits_{x\to\pm 1} f(x) = \pm 1$;

(2) $f'(x) > 0$ при $x \in (-1,1)$ и $\sup\limits_{x\in(-1,1)} f'(x) < \infty$.

Заметим, что $\mathfrak{D}$ образует топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости, роль единицы в которой играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$. Важную роль в исследовании структуры полугруппы голоморфных отображений играют однопараметрические полугруппы (см. [1]).

Определение 1. *Под однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{D}$ понимается непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из аддитивной полугруппы $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \colon t \geqslant 0\}$ в полугруппу $\mathfrak{D}$.*

Определение 2. *Функция $f \in \mathfrak{D}$ вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$, если существует такая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{D}$, что $f^1 = f$.*

В работе установлены критерии вложимости в классе $\mathfrak{D}$ в терминах решений функциональных уравнений. Выделяется несколько случаев в зависимости от наличия или отсутствия внутренней неподвижной точки функции $f \in \mathfrak{D}$. Отметим, что если $f \in \mathfrak{D}$ имеет внутреннюю неподвижную точку, то эта точка может лежать только на вещественном диаметре.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathfrak{D}$ и $f(q) = q$ при некотором $q \in (-1,1)$. Тогда, если f вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$, то существует голоморфная в $\mathbb{D}$ функция F, являющаяся решением функционального уравнения*

$$F(f(z)) = f'(q)F(z)$$

и допускающая представление в виде

$$\begin{aligned} F(z) = (z-q)\,\frac{1-qz}{1-q^2}\left(\frac{1+q}{1+z}\right)^{2\gamma_1}\left(\frac{1-q}{1-z}\right)^{2\gamma_2} \times \\ \times\ \exp\left\{\gamma_3 \int\limits_{[-1,1]} \ln\frac{1-2xq+q^2}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x)\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

с некоторыми $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 \geqslant 0$, $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 1$ и вероятностной мерой μ на $[-1,1]$. При этом, под степенными функциями и *логарифмом понимаются ветви, принимающие значения* 1 *и* 0*, соответственно, при* $z = q$.

Обратно, всякая функция F *вида (1) однолистна в* $\mathbb{D}$ *и отображает* $\mathbb{D}$ *на звёздную относительно начала координат область. При этом, функции* $f(z) = F^{-1}(\beta F(z))$, $0 < \beta < 1$*, принадлежат* $\mathfrak{D}$*,* $f(q) = q$ *и вложимы в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{D}$*.*

Литература

1. *Горяйнов В. В., Кудрявцева О. С.* Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса // Матем. сб. – 2011. – Т. 202. – № 7. – С. 43–74.

РОЛЬ ПОНИМАНИЯ В КУРСЕ СТОХАСТИКИ

Кузнецова Е.В. (Липецк)
eva312@rambler.ru

В настоящее время в науке особую значимость приобретают методы построения вероятностных моделей, основанные на понятии математической вероятности. Базовые понятия теории вероятностей составляют понятия случайного события, вероятности, случайной величины и вероятностного распределения. Причем представления о вероятностных распределениях являются центральными в теории вероятностей, поскольку именно вероятностные распределения являются структурными характеристиками статистических систем, на базе которых характеризуются как отдельные элементы систем, так и их целостные свойства [1]. Один из авторов Новой философской энциклопедии, Ю.В. Сачков, определяет вероятностный стиль мышления как мышление на языке вероятностных распределений: “Именно язык распределений выражает основу нового видения мира, нового образа мышления. Овладеть вероятностным стилем мышления - значит научиться мыслить на языке распределений” [1; 139]. Анализ философской и психолого-педагогической литературы позволяет заключить, что данное определение вероятностного стиля мышления является наиболее полным, поскольку предполагает не просто способность делать суждения о возможности наступления тех или иных событий, а, прежде всего, понимание сути статистических систем, их иерархии, дифференциации и интеграции, расчлененности и общности. Кроме того, большинство исследователей подчеркивают, что для формирования и усвоения базовых понятий теории вероятностей необходимы опыт решения задач, построения и анализа вероятностных моделей в различных приложениях. Только "совместный анализ абстрактных форм теории вероятностей и их реальных "наполнений" позволяет сделать более осязаемыми основания вероятностного видения мира" [2; 59].

1. *Сачков Ю.В.* Вероятность — на путях познания сложности // Философия науки. Вып. 4. М.: ИФ РАН, 1998.

2. *Сачков Ю.В.* К синтезу парадигм (концепций) жесткой детерминации и вероятностной детерминации // Философия науки. Вып. 7. М.: ИФ РАН, 2001.

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВАХ L_p НА ТОРЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВЕСОМ ЯКОБИ

Кук Во Тхи (Тула)
donghocat159@yahoo.com

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ — одномерный тор, $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$, $\upsilon_{\alpha,\beta}(x) = \left|\sin\frac{x}{2}\right|^{2\alpha+1} \left|\cos\frac{x}{2}\right|^{2\beta+1}$— вес Якоби, $d\nu_{\alpha,\beta}(x) = \upsilon_{\alpha,\beta}(x)dx,\ 1 \leqslant p < \infty$, $L_{p,\alpha,\beta}(\mathbb{T})$ — пространство 2π-периодических функций с конечной нормой $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p \, d\nu_{\alpha,\beta}\right)^{1/p}$, $E_n\left(f\right)_{p,\alpha,\beta}$ — величина наилучшего приближения функции f в пространстве $L_{p,\alpha,\beta}(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами порядка n.

При $\alpha = \beta$ Д. В. Чертова в пространствах $L_{p,\alpha,\alpha}(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, определила оператор обобщенного сдвига, модуль непрерывности и доказала неравенство Джексона между величиной наилучшего приближения функции и ее модулем непрерывности. Точность этого неравенства была установлена позже В. И. Ивановым и Лю Юнпином. В настоящей работе исследуется случай $\alpha > \beta \geqslant -1/2$.

При $\alpha > \beta \geqslant -1/2$ построен положительный оператор обобщенного сдвига $T^t f(x)$. Его норма, как оператора из $L_{p,\alpha,\beta}(\mathbb{T})$ в $L_{p,\alpha,\beta}(\mathbb{T})$, равна 1.

Для функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}(\mathbb{T})$ модуль непрерывности определяем равенством

$$\omega\left(\delta, f\right)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t| \leqslant \delta} \left(\int_{\mathbb{T}} \left(T_y^t \left|f\left(y\right) - f\left(x\right)\right|^p\right)|_{y=x} \, d\nu_{\alpha,\beta}(x)\right)^{1/p}.$$

Пусть $t_n^{(\alpha,\beta)}$ - наибольший нуль многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$, $\tau_n^{(\alpha,\beta)} = \arccos\ t_n^{(\alpha,\beta)}$.

Теорема 1. *Если $\alpha > \beta \geqslant -1/2$, $n \in \mathbb{N}$, то для любой $f \in L_{2,\alpha,\beta}(\mathbb{T})$ справедливо точное неравенство Джексона*

$$E_{n-1}\left(f\right)_{2,\alpha,\beta} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(2\tau_n^{(\alpha,\beta)}, f\right)_{2,\alpha,\beta}.$$

Теорема 2. *Если $\alpha > \beta \geqslant -1/2$, $1 \leqslant p < 2$, $n \in \mathbb{N}$, то для любой $f \in L_{p,\alpha,\beta}(\mathbb{T})$ справедливо точное неравенство Джексона*

$$E_{2n-2}\left(f\right)_{p,\alpha,\beta} \leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}\omega\left(2\tau_n^{(\alpha,\beta)}, f\right)_{p,\alpha,\beta}.$$

ОБ ОПЕРАТОРНОМ ПУЧКЕ С НЕОБРАТИМЫМ СТАРШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Курбатова И.В.(Воронеж)
la_soleil@bk.ru

Пусть X и Y — комплексные банаховы пространства, а $F, G : X \to Y$ — два линейных ограниченных оператора. *Операторным пучком* называют функцию $\lambda \mapsto \lambda F - G$, $\lambda \in \mathbb{C}$. *Резольвентным множеством* пучка называют множество $\rho(F,G)$, состоящее из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых оператор $\lambda F - G$ обратим. Дополнение $\sigma(F,G)$ к резольвентному множеству называют *спектром* пучка. Будем предполагать, что рассматриваемый пучок является *регулярным*, т.е. его резольвентное множество не пусто. Кроме того, будем считать, что оператор F не обратим. В этом случае положим $\bar\sigma(F,G) = \sigma(F,G) \cup \{\infty\}$.

Для каждой функции f, аналитической в окрестности $\bar\sigma(F,G)$, и такой, что $f(\infty) = 0$, положим

$$\varphi(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda F - G)^{-1}\,d\lambda,$$

где контур Γ является ориентированной огибающей $\bar\sigma(F,G)$ относительно дополнения к области определения функции f.

Зафиксируем $\lambda_0 \in \rho(F,G)$. Положим $H = \lambda_0 F - G$. На множестве $\mathbf{B}(Y,X)$ всех линейных ограниченных операторов $A : Y \to X$ введем операцию *H-умножения*

$$A \odot_H B = AHB.$$

Теорема. *Пусть* $\infty \in \bar\sigma(F,G)$, *т. е. оператор* F *не обратим. Тогда для любых двух функций* f *и* g, *аналитических в окрестности* $\sigma(F,G)$, *и таких, что* $f(\infty) = g(\infty) = 0$, *справедливо тождество*

$$\varphi(fsg) = \varphi(f) \odot_H \varphi(g),$$

где $s(\lambda) = \lambda_0 - \lambda$.

Литература

Курбатова И.В. Псевдорезольвенты, функциональное исчисление и операторные пучки // Воронеж: Научно-исследовательский институт математики ВГУ. Препринт № 34. 2010. 55 с.

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ[1]

Ларина Я.Ю. (Ижевск)
vzmsh@mail.ru

Работа является продолжением статьи [1], в которой исследуется расширение понятия инвариантности управляемых систем вида

$$\dot x = f(t,x,u), \;\; (t,x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Это расширение состоит в изучении статистически инвариантных множеств и статистических характеристик системы (1). В статье [1] получены оценки таких статистических характетристик, как

$$\operatorname{freq}(X) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta},$$

где $D(t,x)$ — множество достижимости системы (1) в момент времени t из начального множества X, $M = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M(t)\}$. Предел $\operatorname{freq}(X)$ оценивается через характеристику

$$\varkappa \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

где $z^*(t)$ — верхнее решение скалярной задачи Коши

$$\dot z = a(t)z + b(t), \; z(0) = z_0 \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000)

с почти периодическими коэффициентами $a(t), b(t)$. Пусть $\tilde{z}(t)$ — почти периодическое решение (2), $\widetilde{\varkappa} \doteq \lim\limits_{\vartheta\to\infty} \dfrac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{z}(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}$.

Теорема. *Пусть* $a(t) = \alpha(t) + C$, *где* $C < 0$, $\int\limits_0^t \alpha(s)ds$ — *ограниченная функция и* $\lim\limits_{\vartheta\to\infty} \dfrac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : a(t)z + b(t) = 0\}}{\vartheta} = 0$ *для каждого* $z \in \mathbb{R}$. *Тогда имеет место равенство* $\varkappa = \tilde{\varkappa}$.

Литература

[1]. *Родина Л.И.* Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемых систем. Известия вузов. Математика, 2013. В печати.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ДЕМПФИРОВАННОГО ВИБРАТОРА

Ларионов А.С., Волкович Е.Ю. (Братск)

larios84@yandex.ru, kazterka@rambler.ru

Рассмотрим задачу Коши

$$\ddot{y}(t) + 2\varepsilon r\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \varepsilon[\lambda y^3(t-1) - y^5(t-1)],\ t\epsilon[0,b] \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$y(0) = \alpha, \dot{y}(0) = \beta. \qquad (2)$$

Уравнение (1) встречается [1] при описании динамики демпфированного вибратора, на который действует нелинейная пружина с запаздывающей реакцией. В этом уравнении $\xi > 0, r > 0, \lambda > 0, \omega$ - некоторые постоянные.

Утверждение. *Пусть функция Коши* $C(t,s)$ *линейного уравнения, соответствующего уравнению (1), положительна при* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b$ *и выполняются неравенства* $\omega^2 \geqslant \xi(\lambda - 1), \lambda > \frac{5}{3}$. *Тогда существует решение задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам* $0 \leqslant y(t) \leqslant 1$.

Доказательство этого утверждения основано на редукции исходной задачи к уравнению с монотонным оператором [2], [3]. Для задачи (1), (2) разработана программа численного решения.

Литература

1.Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: Издательство иностранной литературы,1961. — 248 с.

2.Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир,1983. — 431 с.

3.Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука,1991. — 280 с.

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Ларионов А.С., Кузнецова И.А. (Братск)
larios84@yandex.ru, kuznetsovaia87@gmail.com

Рассматривается уравнение

$$(\Lambda x)(t) \equiv \dot{x}(t) + p(t)x_h(t) = f\big(t, x_h(t)\big), t \in [a,b], \tag{1}$$

где

$$x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & \text{если } h(t) \in [a,b], \\ \quad 0 \quad , & \text{если } h(t) \notin [a,b] \end{cases}$$

в предположениях: p - суммируемая на отрезке $[a,b]$ функция; h - измеримая функция, причем $h(t) \leqslant t$ при п.в. $t \in [a,b]$; функция f удовлетворяет условиям Каратеодори и не является, вообще говоря, монотонной по функциональному аргументу.

С помощью метода монотонных операторов получен ряд утверждений о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$x(a) = \alpha, \;\; \alpha \in R. \tag{2}$$

В основе этого метода лежит редукция исходной задачи к уравнению с монотонным оператором, определенным на некотором частично упорядоченном множестве.

Приведем одно из утверждений о разрешимости задачи Коши (1), (2) в случае, когда функция f не убывает по функциональному аргументу.

Теорема 1. *Пусть функция Коши уравнения*

$$(\Lambda x)(t) = \eta(t) \tag{3}$$

неотрицательна при $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$ *и* $f(t,u)$ *не убывает по* u. *Пусть существуют абсолютно непрерывные функции* v, z *такие, что* $v(t) \leqslant z(t)$ *и выполняются неравенства*

$$(\Lambda v)(t) \leqslant f\big(t, v_h(t)\big), (\Lambda z)(t) \geqslant f\big(t, z_h(t)\big),$$

$$v(a) < \alpha < z(a).$$

Тогда задача Коши (1), (2) имеет решение, удовлетворяющее неравенствам

$$v \leqslant x \leqslant z.$$

Отметим, что эффективные признаки положительности функции Коши уравнения (3) получены в работе [1].

Полученные утверждения о разрешимости задачи (1), (2) применяются для исследования математической модели [2] динамики процесса обучения

$$\dot{x}(t) = K[x(t-\tau)]x(t-\tau) + b(t), t \in [a,b], \tag{4}$$

где $x(t)$ - количественная характеристика усвоенной в процессе обучения информации; $b(t)$ - количественная характеристика входной информации; τ - индивидуальное время запаздывания в восприятии информации; $K[x(t-\tau)]$ - функция, характеризующая индивидуальное восприятия информации.

В работе [3] приведен анализ этой функции в случае детерминированной модели системы обучения. С учетом нелинейного характера изменения функции $K[x(t-\tau)]$, ее можно аппроксимировать следующим образом

$$K[x(t-\tau)] = \frac{1}{\tau} ln[a + x^2(t-\tau)c],$$

где $a, c - const$.

В этом случае для исследования уравнения (4) используется сформулированная выше теорема 1.

Литература

1.Березанский Л.М., Ларионов А.С. Положительность матрицы Коши линейного функционального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, №1. – С. 1843 – 1854.

2.Солодова Е.А. Перспективы развития высшего образования России на основе математического моделирования // Стандарты и мониторинг в образовании, 2000 - Вып. №5.

3.Голицын Г.А. Информация и творчество: на пути к интегральной культуре. М.: Информационно-издательское агентство „Русский мир“, 1997.

НЕЗАВИСИМОСТЬ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НЕКОТОРЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ОТ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Латыпова Н.В. (Ижевск)

nlatypova@udm.ru

Оценки погрешности аппроксимации функции двух переменных $f(x,y)$ и ее i-х производных кусочно–полиномиальными функциями степени n по совокупности переменных в максимально общей ситуации имеют вид $CH^{n+1-i}(\sin\alpha)^{-i}$, где H — диаметр триангуляции, α — наименьший угол триангуляции, а константа C не зависит от триангуляции (оценки Сьярле–Равьяра). Подобные оценки автоматически переносятся на оценки погрешности метода конечных элементов, с которым тесно связаны. В некоторых случаях наименьший угол можно заменить на средний (или наибольший, что с точностью до констант равносильно).

В случае лагранжевой интерполяции оценки погрешности зависят от диаметра разбиения и синуса наибольшего угла триангуляции, показана их неулучшаемость (Ю. Н. Субботин). При этом оценки ухудшаются, когда два угла стремятся к нулю. В случае эрмитовой и биркгофовой интерполяции некоторые результаты получены Ю. Н. Субботиным, Н. В. Байдаковой, Н. В. Латыповой, Ю. В. Матвеевой.

Рассматриваются несколько способов биркгофовой интерполяции функции двух переменных многочленами степени n по совокупности переменных ($n = 2, 3, 4, 5, 6$) на треугольнике. Оценки погрешности для предложенных элементов зависят только от диаметра разбиения и не зависят от углов триангуляции, т. е. имеют вид CH^{n+1-i}. Показана неулучшаемость полученных оценок. Неулучшаемость понимается в том смысле, что существует функция из заданного класса и существуют абсолютные положительные константы, не зависящие от триангуляции, такие, что для любого невырожденного треугольника справедливы оценки снизу. Отметим, что построенные кусочно–полиномиальные функции глобально не являются непрерывными. Подобные конечные элементы успешно использовались при решении задач о движении несжимаемой жидкости (уравнения Навье–Стокса).

СОВРЕМЕННЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, ОСНОВАННЫЕ НА ИКТ

Листрова Л.В., Листров Е.А. (Воронеж)
ListrovaLV@yandex.ru

Все более активное использование информационно-коммуникационных технологий в учебном процессе позволяет говорить о новых задачах, стоящих перед ИКТ по удовлетворению широкомасштабных образовательных потребностей обучающихся на современном этапе информатизации системы образования. Не случайно информационно-коммуникационные технологии определены в новых ФГОС как один из важнейших инструментариев формирования универсальных учебных действий, необходимых для жизни и работы в современном высокотехнологичном обществе. Оснащение образовательных учреждений специализированным учебным компьютерным оборудованием создает условия для наиболее полной реализации инновационных образовательных технологий, основанных на принципах системно-деятельностного подхода.

В условиях интенсификации процессов информатизации общества меняется также информационно-образовательная среда, называемая некоторыми авторами *киберпространством* (Воинова О.И., Плешаков В.А.). Под *киберпедагогикой* ее авторы понимают "инновационную отрасль психолого-педагогической мысли, научно обосновывающую специально организованную целенаправленную и систематическую деятельность по кибервоспитанию, киберобучению и киберобразованию современного человека в процессе его киберсоциализации средствами современных информационно-коммуникационных, электронных, цифровых, компьютерных и образовательных технологий" [1]. Введенный термин позволяет обогатить содержание современных образовательных технологий в рамках предлагаемых авторами киберпедагогики следующих ее моделей:

1. *Технологии получения информации.* В такой модели компьютерная техника выступает в качестве источника информации, знаний, информационных умений, навыков, компетенций, развлечений и др.

2. *Технологии отдачи информации.* Источником информации в этой модели выступает человек, а техника является получа-

телем, накопителем и/или обработчиком информации, в частности, может являться контролирующей системой.

3. *Технологии взаимодействия с техникой.* Человек и компьютерная техника рассматриваются как “равноправные” участники образовательного процесса, обучение может происходить как в сторону человека, так и в сторону техники (интеллектуальные системы). Реализация этой модели в большинстве случаев является самодостаточной образовательной деятельностью.

4. *Технологии киберкоммуникации.* В этом случае техника выступает в качестве посредника для коммуникации между людьми (между педагогом и обучающимся, среди обучающихся и др.), причем, такая коммуникация может быть реализована как в режиме онлайн, так и в режиме оффлайн.

5. *Технологии обучения по инструкции.* Техника в данной модели занимает позицию целевого объекта изучения. Устная или письменная инструкция педагога направлена на формирование тех или иных киберкомпетенций и реализуется обучающимися во взаимодействии с техникой.

6. *Технологии межличностного контроля.* Эта модель предполагает предварительное взаимодействие техники и человека по выполнению некоторой учебной деятельности, а также использование техники как средства представления и контроля сформированности компетенций. Здесь техника играет роль исполнителя при доминирующей роли человека.

Литература

1. Плешаков В.А. Киберсоциализация человека: от Homo Sapiens’a до “Homo Cyberus’a”? / В.А. Плешаков // Вопросы воспитания, 2010. – № 1 (2). – С. 92-97.

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НАГРУЖЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ НИТИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. (Самара)

Рассмотрим продольные колебания и прохождение через параметрический резонанс вязкоупругой нити, один конец которой наматывается на барабан, а на втором закреплён груз. Резонанс создается за счет неравномерности подъема, при этом удлинение нити сопоставимо с длиной.

Для учета внутреннего трения пусть реология материала нити подчиняется нелинейной модели Фойхта, т.е. $\sigma = E \cdot \varepsilon^a + \lambda \cdot \dot{\varepsilon}$, где $E, a, \lambda-$реологические параметры, $\varepsilon-$относительное удлинение, $\sigma-$напряжение.

Уравнение колебаний имеет вид:

$$M\ddot{u}(t) + S(E(\frac{u(t)}{\ell(t)} - 1)^a + \lambda\frac{\dot{u}(t)\ell(t) - u(t)\ell'(t)}{\ell^2(t)}) = Mg, \qquad (1)$$

где M- масса груза; $u(t)$- расстояние от точки подвеса до груза в момент времени t; $\ell(t)-$длина нерастянутой нити в момент времени t; S- площадь сечения нити.

В данном случае относительное удлинение равно:

$$\varepsilon(t) = \frac{u(t) - \ell(t)}{\ell(t)}.$$

Закон изменения длины нити $\ell(t)$взаимосвязан с $u(t)$ уравнением:

$$\ell'(t) = \frac{\nu(t)\ell(t)}{u(t)}, \qquad (2)$$

так как нить на барабан наматывается в растянутом виде.

С учетом неравномерности подъема, будем считать, что скорость вращения барабана имеет вид: $\nu(t) = \nu_0 + A\nu_0 \sin\omega_0 t$, т.е. интенсивность возбуждения зависит от скорости подъема.

Задачу необходимо решить при начальных условиях:

$$u(0) = u_0; \dot{u}(0) = 0; \ell(0) = \ell_0.$$

Если подъем начинается из положения равновесия, то:

$$u_0 = \ell_0(1 + \left(\frac{g}{\ell_0\omega_0}\right)^{\frac{1}{a}}).$$

Введем безразмерные переменные:

$$u(t) = \ell_0 U(\tau); \ell(t) = \ell_0 L(\tau); \nu(t) = \nu_0 V(\tau);$$

$$\tau = \omega t; V(\tau) = 1 + A\sin\frac{\omega_0\tau}{\omega}; \omega^2 = \frac{ES}{M\ell_0}.$$

В результате получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \ddot{U}(\tau) + \alpha\frac{\dot{U}(\tau)}{L(\tau)} - \beta\frac{V(\tau)}{L(\tau)} + \left(\frac{U(\tau)}{L(\tau)} - 1\right)^a = \gamma; \\ L'(\tau) = \theta\frac{V(\tau)L(\tau)}{U(\tau)}; \\ V(\tau) = 1 + A\sin W\tau, \end{cases}$$

где

$$U(0) = U_0;\ \dot{U}(0) = 0;\ L(0) = 1;\ \alpha = \lambda\sqrt{\frac{S}{M\ell_0 E}};$$

$$\theta = \nu_0\sqrt{\frac{M}{ES\ell_0}};\ \gamma = \frac{gM}{ES};\ \beta = \frac{\lambda\nu_0}{E\ell_0} = \theta\alpha;\ U_0 = 1 + \gamma^{\frac{1}{a}}.$$

При частоте возмущения W, близкой к единице, наблюдается прохождение через резонанс, т.е. увеличение амплитуды колебаний в течение некоторого периода времени.

Исследование прохождения через резонанс было произведено численно, так как задача не допускает точного решения. При

$$\alpha = 1;\ E = 4\cdot 10^6(\text{н/м}^2);$$

$$S = 10^{-3}(\text{м}^2);\ M = 100\,(\text{кг});\ \ell_0 = 10\,(\text{м});\ A = 0,1$$

была получена зависимость максимального относительного увеличения амплитуды, т.е. $\Delta\ell = \max\limits_t \frac{(u(t)-\ell(t))\ell_0}{(u_0-\ell_0)\ell(t)}$ в зависимости от скорости подъема ν_0, и параметра вязкости λ.

Частота возмущения ω_0 подбиралась таким образом, чтобы увеличение амплитуды за время подъема было максимальным.

Результаты численного решения представлены в таблице:

ν_0 λ	0,1	0,3	0,5	0,7	1
2*10^4	1,074	1,153	1,270	1,364	1,521
4*10^4	1,058	1,127	1,226	1,314	1,462
6*10^4	1,047	1,11	1,196	1,272	1,402

Увеличение амплитуды колебаний с возрастанием скорости связано с тем, что амплитуда возмущений прямопропорциональна скорости.

Библиографический список

1. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2009. – 131 с.: ил.

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ХАТЧИНСОНА

Лищук Е.В., Толстиков А.С. (Братск)
lena.lishuk@yandex.ru

Рассматривается уравнение

$$\dot{x}(t) - \lambda x(t) = -\lambda x(t)x(t-\tau), t \in [t_0, T]$$

с начальным условием

$$x(t_0) = \alpha, \alpha \in R,$$

где $\lambda = const > 0, \tau > 0$.

Приведенное уравнение является уравнением Хатчинсона и описывает динамику численности популяции. Качественные свойства решений данного уравнения изучались в монографии [1].

В докладе приводятся достаточные условия существования решения начальной задачи. Эти условия получены с помощью метода монотонных операторов [2], [3], в основе которого лежит классическая теорема С.А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. При таком подходе исходная задача редуцируется к операторному уравнению $x = Ax$ с вполне непрерывным оператором A, обладающим свойством монотонности. Авторами предлагается программа, реализующая численное решение полученного интегрального уравнения при определенных параметрах.

Литература

1. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. Пер. с англ. М.: Мир, 1985. — 280 с.

2. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально - дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. — 380 с.

3. *Хатсон В., Пим Дж. С.* Приложения функционального анализа и теории операторов. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. — 432 с.

О ПОЛНОМ ОПИСАНИИ АФФИННО-ОДНОРОДНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ТРУБЧАТОГО ТИПА ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{C}^3$[1]

Лобода А.В. (Воронеж)

После работ [1] - [2] в задаче описания аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ вида

$$v = (x_1^2 + x_2^2) + \sum_{s \geqslant 3} F_s(z, \bar{z}, u) \tag{1}$$

остался неизученным один из 4-х подслучаев уравнений (1), связанный с "общим положением" многочлена F_3. Не были проинтегрированы также 7 семейств алгебр Ли $g_1^{(4)} - g_7^{(4)}$, отвечающих однородным многообразиям и нулевому значению параметра n_4, важного в данной задаче (см. [2]).

ТЕОРЕМА 1. Если M - аффинно-однородная вещественная гиперповерхность вида (1) в $\mathbb{C}^3$ (из 4-го подслучая), то параметр n_4 соответствующей алгебры Ли равен нулю.

ТЕОРЕМА 2. *С точностью до (локальной) аффинной эквивалентности любая аффинно-однородная вещественная гиперповерхность вида (1) в пространстве $\mathbb{C}^3$ совпадает либо с трубчатым многообразием, либо с одной из следующих поверхностей ($\alpha, \beta, B \in \mathbb{R}$):*

$$Re\left((z_1 z_2 + w)\bar{z}_2^2\right) = |z_2|^2(1 + 4|w|^2). \tag{2}$$

$$v^2 - |z_1|^2 = 2v|z_2|^2 - Im(z_2^2 \bar{z}_1), \tag{3}$$

$$(v - x_2^2)y_2 = x_1^2, \tag{4}$$

$$g_1^{(4)} \ : \ v(tx_1 - y_1) = 4y_1^2(tx_1 - y_1) + x_2^2 + 2(tx_1 - y_1)^3 \ (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \tag{5}$$

$$g_2^{(4)} \ : \ x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = |w|^2, \ \alpha + \beta = 2, \tag{6}$$

$$g_3^{(4)} \ : \ (Re(z_1 \bar{z}_2))^{\alpha} \cdot (Re(w \bar{z}_2))^{\beta} = |z_2|, \ \alpha + \beta = 1, \tag{7}$$

$$g_4^{(4)} \ : \ v = x_2^2 + |z_1| e^{B \arg z_1}, \tag{8}$$

$$g_5^{(4)} \ : \ x_2^2 - u^2 = |z_1|^2 e^{B \arg z_1}, \tag{9}$$

$$g_6^{(4)} \ : \ (Re(\bar{z}_1 w))^2 - (Re(\bar{z}_1 z_2))^2 = |z_1|^2 e^{B \arg z_1}, \tag{10}$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ-11-01-00495-а

$$g_7^{(4)} \ : \ |z_1|^2 Re(\bar{z}_1 w) + (Re(\bar{z}_1 z_2))^2 = |z_1|^3 e^{B \arg z_1}. \qquad (11)$$

Замечание. Алгебры $g_1^{(4)}, g_2^{(4)}, g_4^{(4)}$ проинтегрированы в [3].

Литература

1. Лобода А.В., Нгуен, Т.Т.З. Об аффинной однородности поверхностей трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ // Труды МИАН, Т. 279, 2012.С. 102 - 119.

2. Нгуен, Т.Т.З. Использование символьных вычислений в задаче описания аффинно-однородных поверхностей // Сб. трудов междунар. конф. "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" , Воронеж-2012. С. 269 - 273.

3. Нгуен, Т.Т.З. Интегрирование матричных алгебр Ли, отвечающих аффинно-однородным поверхностям трубчатого типа // Тезисы докл. в этом же сборнике.

К ВОПРОСУ О ПОНИЖЕНИИ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ломакин Д.Е. (Орел)

denislomakin@rambler.ru

Обозначения: $H(\mathbb{C}^n)$ — пространство целых в $\mathbb{C}^n$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах, , S^{2n-1} — единичная сфера в $\mathbb{C}^n$, $d\sigma$ - элемент площади S^{2n-1}. Через $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ будем обозначать пространство функций $f(s, w)$, $(s, w) \in \mathbb{C} \times S^{2n-1}$, непрерывных по совокупности переменных и целых по s в $\mathbb{C}$. Топологию в $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ зададим с помощью счетного набора норм $\|f\|_k = \max\limits_{|s| \leqslant k, w \in S^{2n-1}} |f(s, w)|; \ k = 1, 2, ...$

Через $H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ будем обозначать пространство функций вида $f(s, w) = F(s\bar{w})$, где $F(z) \in H(\mathbb{C}^n)$. Топологию в $H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ зададим системой норм $\|f\|_k = \max\limits_{|s| \leqslant k, w \in S^{2n-1}} |f(s, w)|; \ k = 1, 2, ...$

Введем в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$ дифференциальный оператор $L[f] = \sum_{|k|=1}^m a_k \frac{\partial^{|k|} f}{\partial^{k_1} z_1 \partial^{k_2} z_2 ... \partial^{k_n} z_n} = \sum_{|k|=1}^m a_k D^{|k|} f$, где $|k| < \infty$, $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$ — мультииндекс, $|k|$ — длина мультииндекса, $a_k \in \mathbb{C}$. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L[f] = g, \qquad (1)$$

где функция $g \in H(\mathbb{C}^n)$.

Пусть $F = \sum_{|k|=1}^{m} a_k D^{|k|}\delta(y), |k| < \infty, a_k \in \mathbb{C}$, где $\delta(z)$ — δ–функция Дирака, сосредоточенная в точке $z = 0$. Оператор $F \in H'(\mathbb{C}^n)$ определяет оператор свертки [2, Гл.4,§17,стр.132] вида

$$\langle \mu, f(z+t)\rangle = \sum_{|k|=1}^{m} a_k \langle D^{|k|}\delta(y), f(z+t)\rangle =$$

$$= \sum_{|k|=1}^{m} a_k D^{|k|} f(t), f(t) \in H(\mathbb{C}^n). \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\langle \mu, f(z+t)\rangle = g(t), \tag{3}$$

где μ — аналитический функционал, определяемый формулой (2).

В [1] доказано, что уравнение 3 разрешимо в классе функций $f(z) \in H(\mathbb{C}^n)$ тогда и только тогда, когда в классе функций $\varphi(s,w) \in H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ разрешимо уравнение

$$\mathcal{P}[(\mathcal{R}_\mu)_s[\varphi(s+\lambda, w)]] = h(\lambda, w), \tag{4}$$

где $\mathcal{R}_\mu$ - преобразование Радона аналитического функционала μ (определение преобразования Радона аналитического функционала введено А.Б. Секериным в [3], $h(s,w) = [\mathcal{A}g](s\bar{w})$, $\varphi(s,w) = [\mathcal{A}f](s\bar{w})$, оператор $\mathcal{A}$ определяется на пространстве $H(\mathbb{C}^n)$ формулой $[\mathcal{A}F](z) = \frac{1}{2\pi^n}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + jI\right)F(z)$, $I : H(\mathbb{C}^n) \to H(\mathbb{C}^n)$ — тождественный оператор, а оператор $\mathcal{P}$ на пространстве $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ имеет вид $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{A}} \circ \mathcal{R}^*$, где $\tilde{\mathcal{A}} : H(\mathbb{C}^n) \to H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ на пространстве $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ задается по правилу: для $F(z) \in H(\mathbb{C}^n)$ полагаем $[\tilde{\mathcal{A}}F](s,w) = [\mathcal{A}F](s\bar{w})$, $\mathcal{R}^*$ - оператор дуального преобразования Радона (см.[1]).

Из вышесказанного следует, что решения f и φ уравнений (3) и (4) существуют одновременно и связаны равенством

$$f(z) = \int_{S^{2n-1}} \varphi(\langle z, w\rangle, w)d\sigma(w). \tag{5}$$

Функция $\varphi(\langle z, w\rangle, w)$ представляет собой комплексную плоскую волну в направлении w, то есть, она постоянна на каждой гиперплоскости, перпендикулярной w. Плоская волна в направлении w является функцией одного комплексного переменного (см.[1]).

Таким образом, любое решение уравнения (3), а следовательно, равносильного ему уравнения (1), представляется в виде интеграла по сфере S^{2n-1} от плоской волны (5), где $\varphi(s, w)$ решение уравнения (4) (одномерного уравнения с параметром), непрерывно зависящее от $w \in S^{2n-1}$.

Литература

1. *Ломакин Д.Е.* Преобразование Радона аналитических функций. Автореферат дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Орел, 2006.

2. *Напалков В.В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. — М.: Наука, 1982. — 240 С.

3. *Секерин А.Б.* Применения преобразования Радона в теории аппроксимации / БНЦ УрО АН СССР. Уфа, 1991. — 192 С.

ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК МАСС МЕТЕОРНЫХ ТЕЛ ПО ДАННЫМ ЕВРОПЕЙСКОЙ БОЛИДНОЙ СЕТИ

Лукашенко В.Т. (Москва)

celendis@nightmail.ru

Вплоть до нашего времени расчёты масс метеорных тел производятся главным образом на основе наблюдаемого свечения при помощи фотометрической формулы. Однако в последние годы была показана некорректность такого подхода во многих случаях [1].

Возникла необходимость простого и одновременно качественно правильного моделирования газодинамических процессов для нахождения массы метеороидов. Одним из методов такого рода является динамический метод Q_4, основанный на приближении наблюдаемой траектории точным решением уравнений метеорной физики при определённом упрощении задачи [2].

По данным наблюдений Европейской болидной сети методом Q_4 получены оценки масс m в предположении сферичности тел.

Характерные примеры оценочных масс

Наименование болида	ρ_m, г/см^3	m, кг	m_{ph}, кг
EN010677	2.0	17.95	5200
EN140977A	2.0	1.57	1500
EN300874	3.7	6.75	311
EN311077	2.0	1.23	280
EN071277	2.0	11.73	236
EN180177	2.0	0.19	55

Сравнение с фотометрическими оценками масс m_{ph} показывает существенное отличие последних от реально возможных значений масс метеорных тел и необходимость использования для обработки наблюдений новых методов.

Автор выражает благодарность профессору Стулову В.П. за оказанную поддержку и внимание к работе.

Литература

1. *Грицевич М.И.* О применимости фотометрической формулы при оценке массы болидообразующих тел // ДАН. 2008. Т. 418, № 5. С. 624–630.

2. *Грицевич М.И.* Приближение наблюдаемого движения болидов аналитическим решением уравнений метеорной физики // Астрономический вестник. 2007. Т. 41, № 6. С. 548–554.

О СКОРОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ СРЕДНИМИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ[1]

Магомед-Касумов М.Г. (Владикавказ)
rasuldev@gmail.com

Показано, что средние Валле-Пуссена

$$V_n(f,x) = \frac{S_n(x) + S_{n+1}(x) + \ldots + S_{2n-1}(x)}{n}.$$

тригонометрических сумм Фурье $S_n(x)$ кусочно-гладкой функции $f(x)$ сходятся к ней на порядок быстрее сумм Фурье $S_m(f,x)(m \leqslant 2n-1)$ на интервалах, свободных от ее точек разрыва.

А именно, пусть дано конечное разбиение отрезка $[0, 2\pi]$: $\mathbb{A} = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_s = 2\pi\}$. Через $W^{2,\mathbb{A}}_{\infty}$ обозначим класс 2π-периодических функций $f(x)$, которые на каждом интервале (a_i, a_{i+1}) имеют абсолютно непрерывную первую производную, а вторая производная существенно ограничена на периоде.

Теорема. *Для $f(x) \in W^{2,\mathbb{A}}_{\infty}$ справедлива следующая оценка:*

$$|f(x) - V_n(f,x)| \leqslant \left[\frac{4}{\pi \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} + C_0\right] \cdot \frac{C(f)}{n^2},$$

где

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00191-а)

$$x \in \bigcup_{i=0}^{s-1} [a_i + \varepsilon, a_{i+1} - \varepsilon],$$

$$C(f) = \max\{\|f\|_{C(\mathfrak{D})}, \|f'\|_{C(\mathfrak{D})}, \operatorname*{ess\,sup}_{[0,2\pi]} |f''(x)|\},$$

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{i=0}^{s-1} (a_i, a_{i+1}) = [0, 2\pi] \setminus \{a_i\}_{i=0}^{s}.$$

Литература

Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена на классах типа Соболева с переменным показателем // Вестник Дагестанского научного центра. 2012. № 45. С. 5–16.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Манько С.Н. (Орёл)

mankosvetlana88@mail.ru

Рассмотрим в пространстве H_R дифференциальный оператор

$$D_n(y) = y^{(n)} + Q_0(z)y^{(n-1)} + \ldots + Q_{n-1}(z)y$$

где $Q_k(z) \in H_R$. Функция $y(z,a)$ — решение уравнения $D_n(y) = a^n y$ с начальными условиями $y^{(k)}(0,a) = a^k, k = 0,1,\ldots,n-1$. Её можно представить в виде ряда $y(z,a) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(z)a^k$, где $A_k(z)$ представляют собой базис в H_R. Тогда решением операторного уравнения $D_n(y) = A^n y$ является функция

$$y(z,A)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z)A^k(x),$$

которая является целой при условии

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \alpha(x)^k k^{\beta(x)-1} = 0,$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – порядок и тип вектора x.

Порядок и тип данной функции равны

$$\rho_q = \frac{1}{1-\beta(x)};\ \sigma = (1-\beta(x))(\alpha(x)p)^{1-\beta(x)}.$$

Литература

Елисеев И.С. Перестановочность с линейным дифференциальным оператором. Мат. зам., т.26, №5, 1979. - 719-738 с.

Громов В.П., Мишин С.Н., Панюшкин С.В. Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения. Орел ОГУ, 2009, с. - 430.

О ПОДКЛАССАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ Ф.Д. ГАХОВА, СВЯЗАННЫХ С ПОДЧИНЕНИЕМ ФУНКЦИИ КЁБЕ

Микка В.П., Микка К.В. (Йошкар-Ола)

mikkav@marsu.ru

Рассматривается следующая задача: пусть регулярная в $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ функция $f(\zeta)$ такая, что

$$\ln f'(\zeta) \equiv \ln(1 + a_{n+1}(n+1)\zeta^n + \ldots) \prec \frac{(\alpha+\beta)\zeta}{(1-\alpha\zeta)^2} \equiv f_{0;\alpha,\beta}(\zeta). \quad (1)$$

Здесь $f_{0;1,0}(\zeta)$ – лучевая функция Кёбе [1]. Требуется найти ограничения на параметры $\alpha + i\beta \in \Pi = \{(\alpha, \beta) : \alpha + \beta > 0, \alpha \in [-1, 1]\}$ так, чтобы уравнение Ф.Д. Гахова [2]

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2} \quad (2)$$

имело единственное решение $\zeta = 0$. Отметим, что единственность решения (2) обеспечивает существование не более одного решения внешней обратной краевой задачи в постановке Ф.Д. Гахова [2].

Теорема. *Уравнение (2) имеет единственное решение $\zeta = 0$, если при $n = 2$ в условии (1) параметры $\alpha + i\beta$ принадлежат области ∇_2 с границей, состоящей из прямолинейных отрезков $(1-i, -1+i)$, $\Big(-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i, \frac{1}{4}+\frac{3}{4}i\Big)$ и из кривых $L_2^{\pm} = \{(\alpha, \beta) : \alpha + \beta = \frac{|\alpha|(3-|\alpha|-\sqrt{\alpha^2+3})^3}{(2-\sqrt{\alpha^2+3})(\sqrt{\alpha^2+3}-1+|\alpha|)}, \alpha \in [-1, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, 1]\}$.*

Множество ∇_2 является нерасширяемым из-за экстремальных функций

$$f(\zeta) = \int\limits_0^{\zeta} \exp\left\{\frac{(\alpha+\beta)\tau^2}{(1-\alpha\tau^2)^2}\right\} d\tau.$$

Можно выписать явные выражения для дополнительных решений уравнения (2) в случае экстремальных функций и $\alpha + i\beta \in \Pi \setminus \nabla_2$.

Литература

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2-е изд. - М.: Наука, 1966. - 628 с.

2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.

ОБ ОБРАТНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА[1]

Мисюк В.Р. (Гродно, Беларусь)
misiuk@grsu.by

Пусть $\mathcal{P}_n$ – множество алгебраических многочленов степени не выше n. Для функции f из пространства Харди H_p $(0 < p \leqslant \infty)$ в круге $D = \{z : |z| < 1\}$ введём $E_n(f)_p = \inf\limits_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|f - P_n\|_{H_p}$, $n = 0, 1, 2, ...$ — наилучшее приближение посредством множества $\mathcal{P}_n$. В теории полиномиальных приближений хорошо известна следующая импликация, называемая соответственно теоремой типа Бернштейна: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^s E_n(f)_p\right)^{\min\{q,\,1\}} < \infty \implies f^{(s)} \in H_p$, где $c > 0$ и зависит лишь от p и s, а $f^{(s)}$ – s-ая производная $(s \in \mathbb{N})$ функции f. Данная заметка посвящена аналогу этой импликации для пространст-ва Бергмана. Введём необходимые обозначения. Пусть m_2 — плоская мера Лебега в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Через $A_{p,\alpha}$, $p > 0$, $\alpha > 0$ обозначим пространство Бегмана аналитических функций f в D, наделённых конечной квазинормой (нормой при $1 \leqslant p \leqslant \infty$) $\|f\|_{A_{p,\alpha}} = \left(\int\limits_D \left(1 - |\xi|^2\right)^{p\alpha - 1} |f(\xi)|^p \, dm_2(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}$. Для функции $A_{p,\alpha}$ определим её производную. Именно, положим $f^{[1]}(z) := izf'(z)$

[1]Работа выполнена при финансовой ГПНИ «Конвергенция»

и $f^{[s]}(z) := \left(f^{[s-1]}(z)\right)^{[1]}$ при $s = 2, 3, \ldots$. Выбор такой производной в нашем случае не случаен и продиктован в первую очередь видом следующей теоремы, которая даёт аналог неравенства Бернштейна–Зигмунда–Арестова для пространств Бергмана.

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < \infty$*,* $s \in \mathbb{N}$*,* $P_n \in \mathcal{P}_n$*. Тогда*

$$\left\|P_n^{[s]}\right\|_{A_{p,\alpha}} \leqslant n^s \, \|P_n\|_{A_{p,\alpha}} .$$

Отметим, что это соотношение является точным. Отсюда получаем соответствующую обратную теорему теории приближений функций.

Теорема 2. *Если* $f \in A_{p,\alpha}$*,* $p > 0$*,* $\alpha > 0$ *и при некотором* $s \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(n^s E_n(f)_{A_{p,\alpha}}\Big)^{\min\{p,\,1\}} < \infty \text{ , то } f^{[s]} \in A_{p,\alpha}.$$

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ГЛАДКОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ С СУММИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Митрохин С.И.
(НИВЦ МГУ им. Ломоносова)
mitrokhin-sergey@yandex.ru

В качестве модельного примера данной тематики рассмотрим дифференциальный оператор четвертого порядка, задаваемый дифференциальным уравнением

$$y^{(4)}(x)+q(x)\cdot y(x) = \lambda a^4\rho^4(x)\cdot y(x),\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ a > 0,\ \rho(x) > 0, \quad (1)$$

и периодическими граничными условиями

$$y(0) = y(\pi), \quad y^{(m)}(0) = y^{(m)}(\pi), \quad m = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Потенциал $q(x)$ предполагается суммируемой функцией на отрезке $[0;\pi]$: $q(x) \in L_1\ [0;\pi] \Leftrightarrow (\int_0^x q(t)dt)'_x = q(x)$ почти для всех $x \in [0;\pi]$.

Весовая функция $\rho(x)$ предполагается гладкой: $\rho(x) \in C^5[0;\pi]$.

В гл. 4 монографии [1] автором предложена методика получения асимптотики решений дифференциального уравнения (1) в случае

$q(x) \equiv 0$. В гл. 1 и 2 монографии [1] изложена методика получения асимптотики решений дифференциального уравнения (1) в случае $q(x) \in L_1\ [0;\pi]$. С помощью полученных асимптотик можно изучить граничные условия (2), которые ранее никем не изучались (в случае дифференциального оператора второго порядка периодические граничные условия изучены в [2]).

Автором получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций дифференциального оператора (1)–(2) в случае $q(x) \in L_1\ [0;\pi]$, $\rho(x) \in C^5\ [0;\pi]$.

Литература

Митрохин С. И. Асимптотические методы решений дифференциальных уравнений с суммируемыми коэффициентами. — М.: «ИНТУИТ», 2011. — 592 с.

Марченко В. А., Островский И. В. Характеристика спектра оператора Хилла // Математический сборник. — 1975. — Т. 97, № 4. — С. 540–586.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР В КЛАССИЧЕСКОМ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА[1]

Муминов Х.Х., Мухамедова Ш.Ф. (Душанбе, Таджикистан)

muminov@phti.tj, shoira-74@mail.ru

Одним из актуальных вопросов в исследованиях процессов самоорганизации в нелинейных динамических системах является изучение формирования когерентных структур при наличии диссипации и внешней подкачки. Как было показано в [1], при определенных значениях управляющего параметра система может перейти в хаотический режим. В данной работе мы исследуем поведение диссипативных солитонов классического антиферромагнетика Гейзенберга

$$\left[\vec{l}\times\left(\Delta\vec{l}-\frac{\partial^2\vec{l}}{\partial t^2}\right)\right]-2\frac{\partial\vec{l}}{\partial t}\left(\vec{l}\vec{H}\right)+\left(1-H^2-H^4\right)\left[\vec{l}\vec{e_z}\right]\left(\vec{l}\vec{e_z}\right)=0,$$

здесь $\vec{l}$ - вектор антиферромагнетизма, $\vec{H}$ - магнитное поле, $\vec{e_z}$ - единичный вектор Oz.

[1]Работа выполнена при поддержке проекта ГР № 0104ТД076 Фонда фундаментальных исследований Республики Таджикистан

Для проведения численного моделирования уравнения классического антиферромагнетика Гейзенберга использовалась стереографическая проекция, позволяющая избегнуть сингулярностей на полюсах сферы, на которой принимает свои значения вектор $\vec{l}$. Моделирование проводилось по явной схеме на пятиточечном шаблоне.

Была проведена серия вычислительных экспериментов с целью формирования диссипативного солитона, при которых варьровались параметры затухания и подкачки. Был найден режим, при котором солитон остается пространственно локализованным и проявляет пульсирующие поведение.

Литература

Nozaki K., Bekki N. Chaos in perturbed nonlinear Shrodinger equation. - Phys. Rev. Lett. v. 50, n. 17, p.p. 1226-1229

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ СПАРЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА И БУССИНЕСКА[1]

Муминов Х.Х., Такавитакяр С. (Душанбе, Таджикистан)
muminov@phti.tj

Математическое моделирование распространения магнитоупругих волн в магентиках имеет важное значение с точки зрения приложений. Ранее одним из авторов методом обобщенных когерентных состояний группы $SU(2)$ была получена система спаренного уравнения Ландау-Лифшица и Буссинеска для описания нелинейных магнитоупругих волн в ферромагнетиках, исходя из квантового гамильтониана [1]:

$$i\hbar S_t + s^2 J^0 \frac{a_0^2}{2}\left[S, S_{xx}\right] + s^2 J^0 \frac{(\Delta + \chi u)}{2}\left[S, \widehat{\sigma}^z\right]\left\{S, \widehat{\sigma}_z\right\} = 0, \qquad (1.a)$$

$$u_{tt} - v_s^2 u_{xx} - \Lambda\left(u^2\right)_{xx} - a_0^2 B u_{xxxx} + \chi \frac{s^2 J^0}{m}\left[\left(S^z\right)^2\right]_{xx} = 0, \qquad (1.b)$$

где матрица $S = \overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{\sigma}$ определяется через компоненты вектора намагниченности,$\widehat{\vec{\sigma}}$-матрицы Паули, u - звуковая волна, v_s - скорость звука, а постоянные определяются параметрами квантового спинового гамильтониана. Аналитические решения данной системы

[1]Работа выполнена при поддержке проекта ГР № 0104ТД076 Фонда фундаментальных исследований Республики Таджикистан

удалось получить только в приближении линейных звуковых волн. В данной работе мы численно решаем задачу Коши для системы (1) используя в качестве начальных условий аналитическое решение данной системы в линейном приближении по звуку. Для численного моделирования уравнения Ландау-Лифшица использовалась стереографическая проекция, позволяющая избегнуть сингулярностей на полюсах сферы, на которой принимает свои значения вектор $\vec{S}$. Моделирование проводилось по неявной схеме Крэнка-Николсона методом прогонки. Получены численные решения системы в виде магнитного полярона, и проведено исследование полученного решения вблизи скорости звука.

Литература

Muminov Kh.Kh., Fedyanin V.K. Magnetoelastic interaction in the Heisenberg magnet model. - Physica Scripta v. 62, p.p. 23-30, 2000

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА – ЗИГМУНДА[1]

Мустахаева В.М., Акишев Г. (Караганда)

vmustaxaeva@mail.ru

Пусть $q, \theta \in [1, +\infty), \alpha \in R$. Пространством Лоренца-Зигмунда $L_{q,\theta}(\log L)^{\alpha}$ называется множество всех измеримых функций f на $[0, 1]$ для которых

$$\|f\|_{q,\theta,\alpha} = \left\{ \int_0^1 (f^*(t))^{\theta} (1 + |\ln t|)^{\alpha\theta} \cdot t^{\frac{\theta}{q}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty,$$

где f^* - невозрастающая перестановка функции $|f|$.

Рассматривается ортонормированная система функций $\{\varphi_n\}$ удовлетворяющая условию $\|\varphi_n\|_s \equiv \|\varphi_n\|_{L_s} \leqslant M_n, \quad n \in N$ при некотором $s \in (2, +\infty]$. Положим

$$\mu_n = \sup\Big\{ \| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \|_s : \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = 1 \Big\}, \;\; \rho_n = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

В докладе будут представлены некоторые обобщения результатов В.И. Коляды , С.А. Кириллова [1] в пространство Лоренца-Зигмунда. В частности

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК научных проектов

Теорема 1. *Пусть* $\frac{s}{s-1} < q < 2,\ \theta > 1, \alpha \in R,\ \delta = \frac{\theta s(q-2)}{q(s-2)}$. *Если* $\{a_n\}$ *последовательность коэффициентов Фурье функции* $f \in L_{q,\theta}(\log L)^{\alpha}$, *то*

$$\Omega_{q,\theta,\alpha}(a) = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_n^{\theta} - \rho_{n+1}^{\theta}) \cdot \mu_n^{\delta}(1 + \ln \mu_n)^{\alpha\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C\|f\|_{q,\theta,\alpha}.$$

Литература

Kirillov S.A. Norm estimates of functions in Lorentz spaces. - Acta Sci. Math. , 1999 - Vol. 65, №1-2 - P. 189 – 201.

ЯВЛЕНИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ В ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Назаров А.Ю. (Ярославль)
its_ my_ trash@mail.ru

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение вида

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) + f(x(t-1)) = 0, \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon_1,\ |\varepsilon_2| << 1$, а $f(x) \equiv -f(-x)$ гладкая нелинейная функция $f(x) = (1+\varepsilon_2)x + f_3x^3 + o(|x|^3)(|x| < x_0, f_3 < 0)$.

Изучается возможность возникновения явления мультистабильности – одновременного существования нескольких устойчивых аттракторов. В качестве метода исследования используется метод равномерной нормализации [1], который позволяет свести исследование поведения решений уравнения (1) из некоторой фиксированной окрестности нулевого состояния равновесия к исследованию поведения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\rho}_n = \gamma_n(\varepsilon)\rho_n + R_n(\rho,\theta;\varepsilon), \dot{\theta}_n = \delta_n(\varepsilon) + \theta_n(\rho,\theta;\varepsilon)(n = 1, 3, 5...),$$
$$\dot{\tau}_1 = \pi + \sigma_1(\varepsilon) + T(\rho,\theta;\varepsilon),$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2), \rho_n \geqslant 0(\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\rho_n < \infty), 0 \leqslant \theta_n < 2\pi, \gamma_n(\varepsilon), \delta_n(\varepsilon), \sigma_1(\varepsilon)$ - гладкие функции, $R_n(\rho,\theta;\varepsilon), \theta_n(\rho,\theta;\varepsilon), T(\rho,\theta;\varepsilon)$ - гладкие функционалы своих переменных, 2π-периодические по θ_n.

Как показано в [1], каждому экспоненциально устойчивому (неустойчивому) состоянию равновесия $\rho^*(\varepsilon) = (\rho_1(\varepsilon), \rho_3(\varepsilon), ..)$ и

$\theta^*(\varepsilon) = (\theta_1(\varepsilon), \theta_3(\varepsilon), ..)$ ($\rho^*(\varepsilon) \to 0$, $\theta^*(\varepsilon) \to \theta^*(0) \in [0, 2\pi)$) системы уравнений в уравнении (1) соответствует периодическое решение периода $T(\varepsilon) \to 2/p$ при $\varepsilon \to 0$ (p - целое число). Это даёт механизм построения периодических решений уравнения (1).

Уравнение (1) анализировалась численно. Построена картина D-разбиений в плоскости параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Исследованы механизмы возникновения однотипных периодических решений, их взаимные бифуркации и механизм накопления периодических решений.

Литература

Кубышкин Е.П. Метод равномерной нормализации в исследовании периодических решений дифференциально-разностных уравнений с малым параметром при производной.// Моделирование и анализ информационных систем. Т.19. №3. С. 143.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛАХ КРИСТОФФЕЛЯ-ШВАРЦА[1]

Накипов Н.Н., Насыров С.Р. (Казань)

snasyrov@kpfu.ru

Предлагается новый приближенный метод нахождения акцессорных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля-Шварца, отображающих конформно верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}^+$ на многолистную полигональную область P (риманову поверхность над комплексной плоскостью $\mathbb{C}$) с точками ветвления. Эти интегралы имеют вид

$$z(\zeta) = C_0 \int_{t_0}^{\zeta} \prod_{k=1}^{N} (\omega - \tau_k)^{\alpha_k - 1} \prod_{j=1}^{M} (\omega - w_j)^{\gamma_j} (\omega - \overline{w_j})^{\gamma_j} \, d\omega + C_1. \quad (*)$$

Здесь w_j — прообразы точек ветвления, γ_j — их кратности, $\alpha_k \pi$ — величины углов многоугольника, τ_k — прообразы вершин граничной ломаной.

Вложим наш многоугольник P в некоторую компактную риманову поверхность R, которая униформизируется рациональной функцией или полиномом (по поводу построения такого вложения см., напр., [1]). Без ограничения общности будем считать, что одна

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-97015-р_поволжье и 11-01-00762)

из вершин многоугольника расположена в начале координат и одна из прилегающих к ней сторон расположена вдоль положительной вещественной полуоси $\mathbb{R}_+$ (мы всегда можем добиться этого параллельным переносом и поворотом). Также будем считать, что нам известно конформное отображение верхней полуплоскости на R с разрезом по $\mathbb{R}_+$ в виде обобщенного интеграла Кристоффеля-Шварца (такое отображение можно построить на основании результатов из [2]). Рассмотрим однопараметрическое семейство обобщенных интегралов Кристоффеля-Шварца, отображающих верхнюю полуплоскость на поверхность R с удлинняющимся разрезом, конец которого движется вдоль ломаной L — границы заданного многоугольника P, в начальный момент времени разрез совпадает с полуосью $\mathbb{R}_+$.

Процесс нахождения акцессорных параметров состоит из нескольких этапов, каждый из которых связан с движением конца разреза вдоль одного из звеньев ломаной L. Отметим, что при переходе к новому звену количество акцессорных параметров увеличивается на два. В момент начала движения конца разреза по новому звену ломаной эти два новых параметра совпадают с прообразом подвижного конца разреза. Параметры, полученные на предыдущем этапе определяют начальные данные для последующего этапа. На финальном этапе мы движемся по последней из оставшихся сторон многоугольника. Когда конец разреза приближается к первоначальному разрезу по $\mathbb{R}_+$, акцессорные параметры, соответствующие «внутренним» вершинам разреза и точкам ветвления, стремятся к искомым акцессорным параметрам в интеграле $(*)$.

С использованием краевой задачи Гильберта для аналитических функций нами найдена система дифференциальных уравнений для определения акцессорных параметров, соответствующая динамике движения конца разреза на каждом из этапов. Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений $\mathbb{C}^+$ на риманову поверхность R с разрезом по $\mathbb{R}_+$ с присоединённой n-звенной ломаной, параметризованное по приведённой длине разреза $T \in (0,1]$. Запишем представителей этого семейства в виде интеграла Кристоффеля-Шварца

$$z(\zeta) = C \int_0^\zeta \omega \prod_{k=-n}^{n} (\omega - t_k)^{\beta_k} \prod_{j=1}^{m} (\omega - \zeta_j)^{\gamma_j} (\omega - \overline{\zeta_j})^{\gamma_j} \, d\omega, \qquad (**)$$

где $\beta_{-k} = \beta_k$, а t_k, ζ_j зависят от T, $C > 0$ — константа, $z(t_k) = z_k =$

const — вершины ломаной, $z(\zeta_j) = z_j^0 = \text{const}$, — проекции точек ветвления R, $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $z_0 = z_0(T)$ — подвижный конец разреза.

Теорема. *Неизвестные (акцессорные) параметры в обобщенном интеграле Кристоффеля-Шварца (**) удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:*

$$\frac{1}{A}\frac{dt_l}{dT} = \frac{1}{t_l} + \sum_{|k|=1}^{n} \frac{\beta_k}{t_k} + 2\sum_{j=1}^{m} \frac{\gamma_j \xi_j}{\xi_j^2 + \eta_j^2}, \quad 1 \leqslant |l| \leqslant n,$$

$$\frac{1}{A}\frac{d\xi_r}{dT} = \frac{\xi_r}{\xi_r^2 + \eta_r^2} + \sum_{|k|=1}^{n} \frac{\beta_k}{t_k} + 2\sum_{j=1}^{m} \frac{\gamma_j \xi_j}{\xi_j^2 + \eta_j^2}, \quad 1 \leqslant r \leqslant m,$$

$$\frac{1}{A}\frac{d\eta_r}{dT} = \frac{\eta_r}{\xi_r^2 + \eta_r^2}, \quad 1 \leqslant r \leqslant m,$$

$$A = \left|\frac{dz_0}{dT}\right| \left(C \prod_{k=1}^{n} |t_k|^{\beta_k} \prod_{j=1}^{m} |\xi_j^2 + \eta_j^2|^{\gamma_j} \right)^{-1}.$$

Отметим, что для обычных интегралов Кристоффеля-Шварца подобный метод был предложен ранее Л.Ю.Низамиевой [3].

Литература

1. *Насыров С.Р.* Геометрические проблемы теории разветвлённых накрытий римановых поверхностей. – Казань: Магариф, 2008. – 276 с.

2. *Насыров С.Р.* Нахождение полинома, униформизирующего данную компактную риманову поверхность // Математические заметки. – 2012. – Т. 91. – Вып. 4. – С. 597–607.

3. *Низамиева Л.Ю.* Использование краевых задач при нахождении акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца. Казань, 2010. – Деп. в ВИНИТИ 06.07.10, № 421–B2010.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР ЛИ, ОТВЕЧАЮЩИХ АФФИННО-ОДНОРОДНЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ ТРУБЧАТОГО ТИПА

Нгуен Т.Т.З. (Воронеж)

thuyduongpy@yahoo.com

В [1] описана схема изучения аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей комплексного пространства $\mathbb{C}^3$, а в [2] получены семейства $g_1^{(4)} - g_7^{(4)}$ алгебр Ли, отвечающих однородным поверхностям трубчатого типа. Описания этих семейств достаточно сложны. Например, любая алгебра из $g_1^{(4)}$ имеет в матричной форме базис ($t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8i & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 4t_4 & 0 & 4it_4 & i \\ 0 & 6t_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8t_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4it_4 + 4 & 0 & -4t_4 - 4i & 1 \\ 0 & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} -4t_4 & 0 & -4it_4 & 0 \\ 0 & -6t_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8t_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Аффинно-однородные поверхности, отвечающие трем семействам из [2], аффинно-эквивалентны следующим поверхностям:*

$$g_1^{(4)} \ : \ v(tx_1 - y_1) = 4y_1^2(tx_1 - y_1) + x_2^2 + 2(tx_1 - y_1)^3, \ (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \tag{2}$$

$$g_2^{(4)} \ : \ x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = |w|^2, \ \alpha + \beta = 2, \tag{3}$$

$$g_4^{(4)} \ : \ v = x_2^2 + |z_1| e^{B \arg z_1} \ (B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}). \tag{4}$$

Уравнения (2) - (4) получаются за счет пошагового интегрирования отдельных уравнений в частных производных, отвечающих базисным векторным полям $E_1 - E_5$ каждой из алгебр.

Литература

1. *Лобода А.В., Нгуен Т.Т.З.* Об аффинной однородности поверхностей трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$. Труды МИАН, Т. 279, 2012.С. 102 - 119.

2. *Нгуен Т.Т.З.* Использование символьных вычислений в задаче описания аффинно-однородных поверхностей. Сб. трудов междунар. конф. "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" , Воронеж-2012. С. 269 - 273.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ЭЛАСТИЧНОМ ТВЁРДОМ СКЕЛЕТЕ[1]

Некрасова И.В. (Белгород)

Nekrasova_I@bsu.edu.ru

В настоящей работе предлагается математическая модель, определяющая распределение поля давления в пласте вблизи скважины в процессе гидравлического удара. Её вывод основан на строгом усреднении точных уравнений, описывающих на микроскопическом уровне совместное движение твердого скелета грунта и вязкой жидкости, заполняющей поры в грунте.

В безразмерных переменных дифференциальные уравнения точной модели для безразмерного вектора перемещений $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ в области $\Omega \in \mathbf{R}^3$, моделирующей нефтяной пласт, состоят из уравнений Стокса для вязкой жидкости в порах и уравнений Ламэ для упругого скелета грунта. В области Ω_0, моделирующей скважину, скорость $\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon / \partial t$ и давление p^ε подчиняются системе уравнений Стокса.

Модель содержит два безразмерных параметра α_μ и α_λ, зависящих от малого параметра ε, которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру области L. Нашей основной целью является вывод предельного режима при стремлении малого параметра ε к нулю. При этом будем считать, что безразмерные параметры удовлетворяют следующим ограничениям:

$$0 < \lambda_0 < \infty, \ 0 < \mu_0 < \infty \,,$$

где

$$\mu_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon), \quad \lambda_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon).$$

В результате усреднения получена односкоростная модель, представляющая собой начально-краевую задачу для нестационарной модели Стокса с непостоянным тензором вязкости.

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357)

О НОВОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОКРЕСТНОСТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ КАК МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ КОЛЛЕКТИВОВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ АГЕНТОВ[1]

Николаев Д.А. (Липецк)
NikolayevDmitry@yandex.ru

Технология мультиагентных систем, хотя и насчитывает уже более чем десятилетнюю историю своего активного развития, находится еще в стадии своего становления [1]. При попытках математического описания координированного движения подобных систем в большинстве случаев оказывается затруднительным или вовсе невозможным построение моделей на основе традиционного аппарата алгебраических, дифференциальных или разностных уравнений: зависимости оказываются настолько сложными, что не допускают обычного аналитического представления.

Главными задачами данной статьи являются обоснование, разработка и исследование нового класса математических моделей координированного движения коллективов агентов в дискретной неограниченно неопределенной динамической полностью наблюдаемой внешней среде на основе методов идемпотентной алгебры [2,3]. Для достижения поставленной цели вводится новый класс свободнопорожденных идемпотентных полукольца и на их основе развивается аппарат нелинейных динамических систем с одномерным и двумерным параметром, моделирующих движения одноагентных и мультиагентных систем.

Литература

1. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход. М.: Издательский дом «Вильямс», 2006.

2. Кривулин Н.К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. – СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009.

3. Маслов В.П., Колокольцев В.Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М. : Наука, 1994.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-07-00580-а).

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К ПРОБЛЕМЕ КАДИСОНА-ЗИНГЕРА

Новиков С.Я. (Самара)

nvks@samsu.ru

Состояние для алгебры фон Неймана $\mathcal{R}$ — линейный функционал f на $\mathcal{R}$, для которого $f(I) = 1$ и $f(T) \geqslant 0$, если $T \geqslant 0$ (T — положительный оператор). Множество состояний образует выпуклое подмножество в пространстве, дуальном к $\mathcal{R}$, компактное в ω^* -топологии. По теореме Крейна-Мильмана, выпуклое множество является замкнутой выпуклой оболочкой крайних точек. Крайние точки множества состояний называются *чистыми состояниями.*

Проблема Кадисона-Зингера (КЗ)[1] Пусть $\mathbb{D}$ — абелева алгебра фон Неймана ограниченных диагональных операторов на ℓ_2. Допускает ли каждое чистое состояние на $\mathbb{D}$ продолжение до чистого состояния на $B(\ell_2)$?

Anderson J. в [2] доказал, что проблема КЗ эквивалентна гипотезе упаковки. Для множества $J \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ определяется диагональная проекция Q_J как матрица, состоящая из нулей, кроме элементов с индексами (i, i) для $i \in J$.

Определение. *Оператор $T \in B(\ell_2^N)$ допускает (r, ε)-упаковку, если существует разбиение $\{A_j\}_{j=1}^r$ множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ такое, что $\|Q_{A_j} T Q_{A_j}\| \leqslant \varepsilon \|T\|$ для всех $j = 1, 2, \ldots, r$.*

Гипотеза упаковки (PC). *Для каждого $0 < \varepsilon < 1$, существует натуральное число r такое, что для каждого натурального числа N и каждого линейного оператора T на ℓ_2^N, матрица которого имеет нулевую диагональ, T допускает (r, ε)-упаковку.*

В гипотезе упаковки важно, что r не зависит от N. Произвольный оператор T удовлетворяет PC, если $T - D(T)$ удовлетворяет PC, где $D(T)$ — диагональ T.

В [3] появилась (неожиданно простая) конкретная конструкция таких проекторов, которые не могут быть $(2, \delta)$-упакованы ни для какого $\delta > 0$. Ниже описана схема такой конструкции.

Определение 2. *Семейство векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ в N-мерном ГП $\mathcal{H}^N$ называют (r, δ)-дизъюнктно риссовым, если существует разбиение $\{A_j\}_{j=1}^r$ множества $\{1, 2, \ldots, M\}$ такое, что для всех $j = 1, 2, \ldots r$ и для произвольных скаляров $\{a_i\}_{i \in A_j}$ имеем*

$$\left\| \sum_{i \in A_j} a_i \varphi_i \right\|^2 \geqslant \delta \sum_{i \in A_j} |a_i|^2$$

Проектор P на $\mathcal{H}^N$ называется (r,δ)-*дизъюнктно риссовым*, если $\{Pe_i\}_{i=1}^N$ является (r,δ)-дизъюнктно риссовым.

Предложение 1. *Пусть P — ортогональная проекция в $\mathcal{H}^N$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) Проектор P (r,δ)-дизъюнктно риссовый.

(2) Существует разбиение $\{A_j\}_{j=1}^r$ множества $\{1,2,\ldots,N\}$ такое, что для всех $j=1,2,\ldots,r$ и произвольных скаляров $\{a_i\}_{i\in A_j}$

$$\left\|\sum_{i\in A_j} a_i(I-P)e_i\right\|^2 \leqslant (1-\delta)\sum_{i\in A_j}|a_i|^2.$$

(3) Матрица $I-P$ допускает (r,δ)-упаковку.

Для данного $N\in\mathbf{N}$, пусть $\omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$. Рассмотрим матрицу дискретного преобразования Фурье (ДПФ) в $\mathbf{C}^N$

$$D_N=\sqrt{\frac{1}{N}}\left(\omega^{jk}\right)_{j,k=0}^{N-1}.$$

Для построения примера используется $2N\times 2N$ матрица ДПФ, в которой первые $N-1$ строк умножаются на $\sqrt{2}$ и оставшиеся строки на $\sqrt{\frac{2}{N+1}}$, получая таким образом новую матрицу B_1. Затем берется вторая $2N\times 2N$ матрица ДПФ, в которой первые $N-1$ строк умножаются на 0 и оставшиеся строки на $\sqrt{\frac{2N}{N+1}}$, получая таким образом матрицу B_2. Располагаем теперь матрицы $B1, B2$ рядом, чтобы получить $2N\times 4N$ матрицу B. Столбцы полученной матрицы образуют фрейм Парсеваля-Стеклова (с точностью до константы) пространства ℓ_2^{2N} и, следовательно [4], являются образами ортов при ортогональном проектировании (в пространстве ℓ_2^{4N}.) С другой стороны, они не являются (r,δ)-дизъюнктно риссовыми ни для какого δ, не зависящего от N.

Неизвестно, как построить аналогичный пример для $r=3$.

Литература

1. *Kadison R., Singer I.* Extensions of pure states, American Journal Math. 1959. V. 81. PP.383-400.

2. *Anderson J.* Restrictions and representations of states on C^*-algebras, Transactions of AMS. 1979. V. 249. PP.303-329.

3. *Casazza P., Fickus M., Dustin G., and Tremain J.* The Bourgain-Tzafriri conjecture and concrete constructions of non-pavable projections, Operators and Matrices. 2011. V. 5, No. 2. PP. 351-363.

4. *Кашин Б.С., Куликова Т.Ю.* Замечание об описании фреймов общего вида. Матем. заметки. 2002. Т. 72. Вып. 6. С. 941-945.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ[1]

Новикова А.О. (Москва)

novikova.a.o@gmail.com

Оптимальное управление охватывает широкий круг задач, в которых, при определённых ограничениях на ресурсы, требуется минимизировать (максимизировать) заданный критерий качества. Задачи оптимального управления встречаются в различных областях науки, техники, медицины, экономики, экологии. Актуальными являются задачи ядерной энергетики (управление охлаждением реактора), робототехники (движение роботов, управление всевозможными станками и автоматами), механики полёта (самонаводящиеся ракеты, автопилоты, автоматическая стыковка на орбите, управление самолетом), экономики (задачи долговременного планирования), экологии (расчёт допустимого воздействия на экосистему), биофизики и медицины (модели распространения эпидемии) и т. д.

В задачах оптимального управления важную роль играет множество достижимости [1]. Оно описывает все возможные положения управляемой системы в заданный момент времени.

В данной работе рассмотрены два метода построения множеств достижимости для управляемых систем: первый метод — метод, основанный на принципе максимума Понтрягина, второй — пиксельный метод [3].

Предлагаемые алгоритмы позволяют эффективно разделить процедуру вычислений на множество независимых параллельных процессов.

Разработана программа, реализующая данные методы, исследованы контрольные задачи, в частности, пример Ли-Маркуса. Результаты вычислений сопоставлены с известными аналитическими решениями [1], [2]. Описаны преимущества применяемых методов. Проведённые исследования показывают эффективность предлагаемых алгоритмов. Подготовленная программа позволила провести

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000)

численные исследования множеств достижимости ряда линейных и нелинейных двумерных управляемых систем с различными областями управления и множествами начальных состояний управляемого объекта.

Разработанная программа может быть полезной при анализе управляемых моделей, представляющих прикладной интерес. Например, данный подход может быть эффективным при решении задачи оптимального программного управления ракетой-носителем типа Союз-2 [5] с целью выведения максимальной массы РН на заданные околоземные эллиптические орбиты.

Литература

Киселёв Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения: Учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2007.

Киселёв Ю. Н. Построение точных решений для нелинейной задачи быстродействия специального вида: Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3. Выпуск 3, с. 847–868.

Гусейнов Х. Г., Моисеев А. Н., Ушаков В. Н. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем. — Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Выпуск 2, с. 179–187.

Боресков А. В., Харламов А. А. Основы работы с технологией CUDA: Учебное пособие. М.: ДМК-Пресс, 2010.

Костоусова Е. К., Починский В. И. О задачах выведения ракеты-носителя на заданные эллиптические орбиты. Труды института математики и механики УрО РАН, 2011. Т. 17. Выпуск 3, с. 201–216.

Новикова А. О. Построение множеств достижимости. Сборник тезисов XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов — 2012 ”, секция “Вычислительная математика и кибернетика”, с. 63.

ВИБРАЦИЯ РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ВАЛА С ЛИНЕЙНЫМ И СТЕПЕННЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

Огарков В.Б., Аксенов А.А., Бухтоярова К.Е. (Воронеж)

Рассмотрена задача динамики обобщенной плоской деформации упруго-пластического цилиндра с линейным и степенным упрочнением [1,2]:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + \frac{\gamma\omega^2}{g}r^2 = r\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \qquad \frac{d}{dr}(r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}) - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \tag{2}$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_0 = \psi(\sigma_r - \sigma_0); \qquad \varepsilon_\theta - \varepsilon_0 = \psi(\sigma_\theta - \sigma_0); \qquad \varepsilon_z - \varepsilon_0 = \psi(\sigma_z - \sigma_0); \tag{3}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3k}; \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z); \qquad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z); \tag{4}$$

$$\sigma_i = \lambda\sigma_T + E_T\varepsilon_i; \qquad \sigma_i = A(\varepsilon_i)^m; \tag{5}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{[(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2]}; \tag{6}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{[(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2]}. \tag{7}$$

Пусть выполняется условие пластичности Мизеса [1]:

$$\sigma_T = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{[(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2]}. \tag{8}$$

Для несжимаемого материала:

$$\mu = \frac{1}{2}; \qquad k = \infty; \tag{9}$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_z + \psi(\sigma_r - \sigma_z); \qquad \varepsilon_\theta = \varepsilon_z + \psi(\sigma_\theta - \sigma_z); \tag{10}$$

$$\psi = \frac{-3\varepsilon_z}{(\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_z)}. \tag{11}$$

Для линейного и степенного уточнения получим:

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{2\varepsilon_z E_T}{(1-\lambda)}; \qquad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{2\varepsilon_z\sigma_T}{(\frac{\sigma_T}{A})^{1/m}}; \tag{12}$$

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{[\sigma_T^2 - \frac{\varepsilon_z^2\sigma_T^2}{(1-\lambda)^2}]}\lg r - \frac{\gamma\omega^2 r^2}{2g} + C_1 + \rho\int\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dr; \tag{13}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{[\sigma_T^2 - \frac{\varepsilon_z^2\sigma_T^2}{(1-\lambda)^2}]}; \tag{14}$$

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}}\sqrt{[1 - \frac{\varepsilon_z^2}{(\frac{\sigma_T}{A})^{2/m}}]} - \frac{\gamma\omega^2 r^2}{2g} + C_1 + \rho\int\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dr; \tag{15}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}}\sqrt{[1 - \frac{\varepsilon_z^2}{(\frac{\sigma_T}{A})^{2/m}}]}; \tag{16}$$

$$\varepsilon_r = \ varepsilon_z + \frac{3(1-\lambda)}{8E_T}(\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{3}{2}\varepsilon_z; \tag{17}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_z + \frac{3(1-\lambda)}{8E_T}(\sigma_\theta - \sigma_r) - \frac{3}{2}\varepsilon_z; \tag{18}$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{[\sigma_T^2 - \frac{\varepsilon_z^2 E_T^2}{(1-\lambda)^2}]}; \tag{19}$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}}\sqrt{[1 - \frac{\varepsilon_z^2}{(\frac{\sigma_T}{A})^{2/m}}]}. \tag{20}$$

Для однородного материала из формул (17)-(18) следует, что деформации ε_r и ε_z является постоянными функциями и удовлетворяют уравнению совместимости деформаций (2). Радиальное перемещение $u(r)$ может быть найдено в соответствии с соотношением Коши (2).

В частном случае уравнение совместимости деформаций (2) может быть записано в следующем виде:

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0. \tag{21}$$

В этом случае однозначное перемещение $u(r)$ следует найти по формуле [2]:

$$u(r) = \frac{1}{2}[r\varepsilon_\theta + \int \varepsilon_r dr]. \tag{22}$$

Литература

1 Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н.Н.Малинин. - М.:"Машиностроение 1975.-400 с.

2 Огарков В.Б. Точные аналитические решения задач полярносимметричного деформирования упруго-пластического цилиндра и шара [Текст] // Актуальные проблемы прикладной математики,информатики и механики: сб.трудов конференции. - Воронеж: ВГУ,2011.-С.290-291.

КОЛЕБАНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ[1]

Огарков В.Б., Шашкин А.И., Скомарохова Е.А.
(Воронеж)
vzmsh@mail.ru

Рассмотрена задача свободных колебаний материальной точки в среде с сопротивлением [1]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0; \tag{1}$$

$$2\beta = \frac{b}{m}; \omega^2 = \frac{c}{m}. \tag{2}$$

Представим дифференциальное уравнение (1) в следующей форме [2]:

$$\left(c + \frac{d}{dt}\right)\left(c + \frac{d}{dt}\right)x + dx = 0; \tag{3}$$

$$c = \frac{d}{2} = \beta; d = b - \frac{a^2}{2} = \omega^2 - \beta^2. \tag{4}$$

Введём в рассмотрение следующие функции:

$$F_1 = \frac{dx}{dt} + cx; F_2 = \sqrt{d}x. \tag{5}$$

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\left(c + \frac{d}{dt}\right)[F_1] - \sqrt{d}F_2 = 0 \tag{6}$$

$$\left(c + \frac{d}{dt}\right)[F_2] - \sqrt{d}F_1 = 0 \tag{7}$$

При условии выполнения соотношений (5), уравнение (7) выполняется автоматически, а соотношение (6) превращается в уравнение (3).

Введём в рассмотрение комплексную функцию L:

$$L = F_1 + iF_2; F_1 = ReL; F_2 = ImL; \tag{8}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000)

$$L = ReL + iImL; \overline{L} = ReL - iImL; \tag{9}$$

$$ReL = \frac{(L + \overline{L})}{2}; ImL = \frac{1}{2i}(L + \overline{L}). \tag{10}$$

Для нахождения функции L можно получить следующее уравнение [2]:

$$\frac{dL}{dt} + (i\sqrt{d} - c)L = 0; \tag{11}$$

$$L = F_1 + iF_2 = \frac{dx}{dt} + (i\sqrt{d} + c)x. \tag{12}$$

Решение уравнения (11) имеет вид:

$$L(t) = e^{-(i\sqrt{d}-c)t} \cdot A. \tag{13}$$

Уравнение (12) примет такой вид:

$$\frac{dx}{dt} + (i\sqrt{d} + c)x = L(t) = Ae^{-(i\sqrt{d}-c)t}. \tag{14}$$

Имеют место начальные условия:

$$x(t = 0) = x_0; \frac{dx}{dt}(t = 0) = v_0. \tag{15}$$

В соответствии с уравнением (14) получим:

$$A = v_0 + (i\sqrt{d} + c)x_0; \tag{16}$$

$$x(t) = \frac{A}{2c}e^{(c-i\sqrt{d})t} + C_2 e^{-(c+i\sqrt{d})t}; \tag{17}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{2c}(c - i\sqrt{d})e^{(c-i\sqrt{d})t} - C_2(c + i\sqrt{d})e^{-(c+i\sqrt{d})t}; \tag{18}$$

$$x_0 = \frac{A}{2c} + C_2; C_2 = x_0 - \frac{A}{2c}; \tag{19}$$

$$v_0 = \frac{A}{2c}(c - i\sqrt{d}) - (c + i\sqrt{d})\left(x_0 - \frac{A}{2c}\right); \tag{20}$$

$$v_0 + (i\sqrt{d} + c) = A. \tag{21}$$

Таким образом, константы A и C_2 удовлетворяют соотношениям (16) и (19).

Предположенный авторами способ решения дифференциального уравнения (1) позволяет избежать процедуры решения системы двух алгебраический уравнений при нахождении констант A и C_2, а определять их раздельно из уравнений (11) и (12).

Литература

[1] *Старжинский В. М.* Теоретическая механика. М.:Наука, 1980. — 464 с.

[2] *Огарков В. Б.* Вынужденные колебания материальной точки в среде с сопротивлением / Огарков В.Б., Шашкин А.И., Скомарохова Е.А.// Понтрягинские чтения - XXIV: материалы Воронежской математической школы. Воронеж: ВГУ, 2012. — с. 142-145

ОСОБЫЕ РЕЖИМЫ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ВЕРСИИ МОДЕЛИ «РОСТ»

Орлов С.М. (Москва)

sergy.orlov@rambler.ru

Рассматривается одномерная нелинейная задача оптимального управления

$$
\begin{cases}
\quad \dot{z} = (1+z)u - z(1+z^{\gamma}), & z(0) = z_0 > 0, \\
L[u] = \int\limits_0^T \Big[\omega_1\big(1+z^{\gamma}-u\big) + \omega_2 \dfrac{u}{z}\Big]\ dt \to \max\limits_{u(\cdot)}, & 0 \leqslant u \leqslant 1.
\end{cases}
\tag{1}
$$

Здесь z — одномерная фазовая переменная, u — скалярное управление, подчинённое геометрическому ограничению $u \in [0,1]$, $T > 0$ — заданная конечная, «достаточно большая», длительность процесса управления, параметры ω_1, ω_2 — заданные неотрицательные числа, такие что $\omega_1 + \omega_2 = 1$, параметр $\gamma \in (0,1)$. Задача (1) является модификацией известной двумерной модели «РОСТ» с изменённым критерием качества, позволяющим понизить размерность задачи. Оптимальное решение задачи (1) было найдено с помощью принципа максимума Понтрягина с привлечением специального интегрального представления функционала. Оптимальный процесс содержит особый режим. Типичное поведение оптимальной траектории: движение к особому режиму, особый режим, сход с особого режима на финальном участке. Особый режим характеризуется параметрами (z_{sng}, u_{sng}), где параметр z_{sng} зависит от γ и определяется неявным образом. Исследована зависимость $z_{sng}(\gamma)$, применены численные методы для вычисления z_{sng}.

Литература

Optimization of Technological Growth. Editors: Kryazhimskiy A., Watanabe Ch. // Gendaitosho, 2004. 392 pp.

Аввакумов С. Н., Киселёв Ю. Н. Численный метод поиска оптимального решения: Модель “Рост”. Математические модели в экономике и биологии. МАКС Пресс, 2003, с.5–15.

Киселёв Ю. Н., Орлов С. М., Орлов М. В. Исследование одной нелинейной задачи оптимального управления с особыми режимами. Проблемы динамического управления. Выпуск 5. Москва. МАКС Пресс, 2010, с. 113–127.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Орлов В.П., Паршин М.И. (Воронеж)

orlov_vp@mail.ru, parshin_maksim@mail.ru

В ограниченной области $\Omega \subset R^n, n = 2, 3$ с границей $\Gamma \subset C^2$ рассматривается начально-граничная задача Z:

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + v_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} - \mu_1 \mathrm{Div} \int_0^t \exp(\lambda(s-t))\, \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))\, ds - \tag{1}$$

$$\mathrm{Div}\,(\mu_0(\Theta)\Delta v(t,x)) + \nabla p(t,x) =$$
$$= f(t,x),\ \mathrm{div}\ v(t,x) = 0,\ (t,x) \in Q_T = [0,T] \times \Omega;$$

$$v(0,x) = v^0(x),\ x \in \Omega; \quad v(t,x) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \partial\Omega; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Theta(t,x)}{\partial t} + v_i(t,x)\frac{\partial \Theta(t,x)}{\partial x_i} - \chi\Delta\Theta(t,x) =$$

$$= g(t,x) + \varepsilon_{ij}(v)(t,x)\varepsilon_{ij}(v)(t,x) + \tag{3}$$

$$\mu_0(\Theta)\varepsilon_{ij}(v)(t,x)\mu_1 \int\limits_0^t \exp(\lambda(s-t))\, \varepsilon_{ij}(v)(s, z(s;t,x))\, ds(v), (t,x) \in Q_T;$$

$$\Theta(0,x) = \Theta^0(x),\ x \in \Omega; \quad \Theta(t,x) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \partial\Omega. \tag{4}$$

Здесь $v(t,x)$, $p(t,x)$, $\Theta(t,x)$ - скорость, давление, температура среды $\mu_1, \chi > 0$, $\lambda \geqslant$, $\mu_0(s)$ - гладкая положительная при $s > 0$ функция, $\mathcal{E}(v) = \{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}),\ i,j = 1,\ldots,n\}$- тензор скоростей деформаций, Div - дивергенция тензора. Справедлива

Теорема 1. *Для гладкого решения задачи Z при $1 < p < \frac{3}{2}$ для $n = 2$ и $1 < p < \frac{5}{4}$ для $n = 3$ справедливы оценки*

$$\|\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)\|_{L_1(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} + \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(t,x)\|_{W_2^1(\Omega)}$$

$$\leqslant M\left(\|f\|_{L_2(0,T;V')} + \|\sigma_0\|_{L_2(\Omega)} + \|v^0\|_{L_2(\Omega)}\right) \equiv M_0;$$

$$\|\frac{\partial}{\partial t}\Theta(t,x)\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))} + \|\Theta(t,x)\|_{L_p(0,T;L_p(\Omega))} \leqslant$$

$$\leqslant M_1\left(\|g(t,x)\|_{L_p(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}, \|\Theta_0\|_{L_p(\Omega)}, M_0\right).$$

Литература

Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. М.: Мир, 1981. — 409 с.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ[1]

Павлова Н.Г. (Москва)
natasharussia@mail.ru

Исследуется вопрос существования вектора равновесных цен в нелинейной модели рынка. Получены достаточные условия существования вектора равновесных цен, а также устойчивости вектора равновесных цен к малым возмущениям модели. Эти результаты получены как следствия теорем теории α-накрывающих отображений о существовании и устойчивости точек совпадения.

Будем рассматривать метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y). $B_X(r,x) = \{\xi \in X : \rho_X(x,\xi) \leqslant r\}$, $B_Y(r,y) = \{\xi \in Y : \rho_Y(y,\xi) \leqslant r\}$.

Определение (см. [1]).*Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $S : X \to Y$ называется α-накрывающим, если*
$S(B_X(r,x)) \supseteq B_Y(\alpha r, S(x))$ $\forall r \geqslant 0$, $\forall x \in X$.

Теорема о точках совпадения (см.[1]). *Пусть пространство X полно, а S, $D : X \to Y$ – произвольные отображения, первое из которых непрерывно и является α-накрывающим, а второе удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$. Тогда для произвольного $x_0 \in X$ существует такое $\xi = \xi(x_0) \in X$, что*

$$S(\xi) = D(\xi), \quad \rho_X(\xi, x_0) \leqslant \frac{\rho_Y(S(x_0), D(x_0))}{\alpha - \beta}. \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31140)

Решение ξ уравнения (1) может быть не единственным. Это решение ξ называется точкой совпадения отображений S и D.

Вектор равновесных цен в модели "спрос – предложение" является точкой совпадения отображений спроса и предложения. Используя локальный вариант теоремы о точках совпадения, исследован вопрос о существовании равновесия для конкретной модели "спрос – предложение".

Литература

[1] *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т.416. N 2. С. 151–155.

О КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА НА ГРАНИЦЕ

Паймеров С.К. (Марийский государственный университет)

paymerov@mail.ru

Исследуется нелинейная обратная задача определения скорости звука в неоднородности, локализованной в пределах плоской ограниченной области, по данным о рассеянном этой неоднородностью скалярном акустическом поле. Акустические колебания в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ описываются волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t) - f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega \tag{2}$$

и условием Неймана на границе $\Sigma = \partial\Omega$:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x,t) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

Здесь $u(x,t)$ – акустическое давление в точке $x \in \Omega$ в момент времени t, величина $c(x) > 0$ определяет скорость звука в этой точке;

$\partial/\partial\mathbf{n}$ – производная по внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе Σ, вычисленная со стороны области Ω. Исследуемая обратная задача заключается в определении коэффициента $c(x)$ по результатам наблюдения рассеянного на неоднородности поля $u(x,t)$. Предполагается, что среда, заполняющая область Ω, однородна вне некоторой априори заданной подобласти R, $\overline{R}\subset\Omega$, так что $c(x)=c_0$ при $x\in\overline{\Omega}\setminus R$, где константа c_0 известна, а функция $c=c(x)$ при $x\in R$ подлежит определению; $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Sigma$. Наблюдение рассеянного поля проводится в точках гладкого замкнутого контура $Y\subset\Omega$, $Y\cap\overline{R}=\varnothing$. Зондируемая неоднородность облучается полями, источники которых описываются функциями $f(x,t)=f(x,t;q)=\varphi(x;q)g(t)$, $q\in Q$. Здесь q – параметр, определяющий вид и положение источника колебаний, множество Q описывает семейство источников рассеиваемых волн. Обозначим через $u(x,t;q)=u(x,t)$ решение задачи (1)–(3), понимаемое в классическом смысле; $S(q)=\operatorname{supp}\varphi(\cdot;q)$. Для наблюдения доступны значения $u(x,t;q)$ при $t\geqslant 0$, $x\in Y$, $q\in Q$. По этим данным требуется определить $c(x)$, $x\in R$, или, что то же, функцию $\xi(x)=c^{-2}(x)-c_0^{-2}$, $x\in R$. Обозначим через $\widetilde{F}(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}F(t)\,dt$ преобразование Лапласа функции $F(t)$, $t\geqslant 0$; S – площадь области Ω; $v(x,p;q)=p^2\widetilde{u}(x,p;q)$, $A_0(p;q)=\int\limits_R v(x,x';p)\xi(x')\,dx'$.

Предполагаются выполненными следующие условия.

Условие 1. *Выполняются соотношения*

$$\int\limits_0^\infty g(t)\,dt\neq 0;\quad |g(t)|\leqslant Ce^{-\beta t}\quad \forall t\geqslant 0\quad (C>0,\ \beta>0).$$

Условие 2. *Положим* $Q=\{q_{mn}\}$, $q_{mn}=(z_m,d_n)$, $z_m\in\Omega$, $d_n>0$, $d_n\to 0$, *где множество* $\widetilde{X}=\{z_m\}$ *всюду плотно на контуре* $X\in C^2$, $X\subset\Omega$, $X\cap\overline{R}=\varnothing$; $\Sigma_R\equiv\partial R\in C^2$; $S(q_{mn})=O_{d_n}(z_m)$, $\int\limits_{O_{d_n}(z_m)}\varphi(x;q_{mn})\,dx=1$.

Теорема. *Пусть выполняются условия 1, 2. Тогда функция* $\xi=$

$\xi(x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\lim_{p\to 0}\int\limits_R H(x,x';p)H(x',q;p)\xi(x')\,dx' =$$

$$= \lim_{p\to 0}\Big(\frac{c_0^2(\widetilde{g}(p)+A_0(p;q))}{S\widetilde{g}(p)}\Big(\int\limits_R H(x,x';p)\xi(x')\,dx'\Big)^2 +$$

$$+\frac{c_0^2(\widetilde{g}(p)+A_0(p;q))}{Sp^2\widetilde{g}(p)}\int\limits_R H(x,x';p)\xi(x')\,dx' - \frac{H(x,q;p)}{p^2}+$$

$$+\frac{v(x,p;q)}{p^4\widetilde{g}(p)}+\frac{c_0^2(\widetilde{g}(p)+A_0(p;q))}{Sp^4\widetilde{g}(p)}\Big),$$

где $\lim\limits_{p\to 0} A_0(p;q) = -\lim\limits_{p\to 0}\Big(\widetilde{g}(p)+\dfrac{S}{c_0^2}v(x,p;q)\Big)$,

$$\lim_{p\to 0}\int\limits_R H(x,x';p)\xi(x')\,dx' =$$

$$= \lim_{p\to 0}\Big(\frac{S\widetilde{g}(p)H(x,q;p)}{c_0^2(\widetilde{g}(p)+A_0(p;q))} - \frac{Sv(x,p;q)}{c_0^2(\widetilde{g}(p)+A_0(p;q))p^2} - \frac{1}{p^2}\Big).$$

АЛГОРИТМ SURF В ЗАДАЧАХ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Панков В.В., Каплиева Н.А. (Воронеж)

При цифровой обработке изображений (сравнении снимков, поиске на них объектов, калибровке камер, 3D-реконструкции) часто возникает необходимость в поиске точек изображения, обладающих характеристиками, выделяющими их среди соседей.

Алгоритм SURF решает две задачи – поиск особых точек снимка и создание их дескрипторов, инвариантных относительно масштаба и вращения.

SURF ищет особые точки с помощью матрицы Гессе. Определитель матрицы H (называемый гессианом) достигает экстремума в точках максимального изменения градиента яркости. Он хорошо находит пятна, углы и края линий, а также инвариантен относительно вращения. Для нахождения гессиана применяется интегральное представление изображения – матрица с элементами, вычисляемыми по формуле

$$I_{\Sigma}(x,y)=\sum_{i=0}^{x}\sum_{j=0}^{y}I(i,j).$$

Гессиан вычисляется приближенно с помощью свертки по фильтрам Fast-Hessian 3-х типов, соответствующих приближению частных производных функции Гаусса 2-го порядка

$$\det(H)\approx D_{xx}D_{yy}-(0,9D_{xy})^2.$$

Для получения инвариантных дескрипторов требуется разбить множество масштабов на октавы, которые покрывают определенный интервал масштабов и состоят из нескольких изображений, к которым была применена свертка по фильтрам разного масштаба.

Далее производится поиск локальных максимумов гессиана с помощью метода Non-MaximumSuppression $3\times3\times3$, а для отсева ложных максимумов применяется интерполяция по координатам точки и ее масштабу.

Для каждой найденной таким образом особой точки строится дескриптор. Сначала определяется преобладающая ориентация перепадов яркости в особой точке с помощью вычисления точечных градиентов с применением фильтров Хаара и выбора за приоритетное направление максимального по длине суммарного вектора, попавшего в круговой сектор размером $\frac{\pi}{3}$. Затем вокруг особой точки строится квадратная область, ориентируемая по найденному преобладающему направлению, которая разбивается еще на 16 квадратов. В каждом из таких квадратов строится сетка 5×5, и для каждой точки сетки вычисляется градиент с помощью фильтров Хаара.

В итоге дескриптором особой точки будет вектор, состоящий из 16 четверок чисел

$$\sum dX,\ \sum|dX|,\ \sum dY,\ \sum|dY|,$$

взвешенных на значение функции Гаусса для повышения устойчивости к шуму.

Литература

1. Bay H. Speeded-Up Robust Features (SURF) / H. Bay, A. Ess, T. Tuytelaars // Computer Vision and Image Understanding (CVIU) – 2008. – V. 110, № 3. – С. 346–359.

2. Neubeck A. Efficient Non-Maximum Suppression / A. Neubeck, L.V. Gool // ICPR – 2006. – 6 с.

3. Viola P. Rapid Object Detection using a Boosted Cascade of Simple Features / P. Viola, M. Jones // Accepted Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2001. – 9 с.

ОБ ОБЩЕМ ВИДЕ ЛИНЕЙНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Панюшкин С.В. (Орел)

fa_ ogu@rambler.ru

Пространством $[\rho,\sigma]_{\mathbf{H}}$ будем называть пространство целых векторнозначных функций со значениями в отделимом локально выпуклом пространстве $\mathbf{H}$ порядка, не превосходящего ρ, а при порядке, в точности равном ρ — типа, не превосходящего σ.

Топология $[\rho,\sigma]_{\mathbf{H}}$ определяется семейством полунорм:

$$\|f\|_{p,\varepsilon} = \sup_{r>0}\{\max_{|z|\leqslant r}\|f(z)\|_p\, e^{-(\sigma+\varepsilon)r^{\rho}}\},\ \varepsilon>0.$$

Теорема 1.

Пусть $\mathbf{H}$ *– пространство Фреше, тогда каждый* $m\in[\rho,\sigma]^*_{\mathbf{H}}$ *представляется рядом*

$$m(f)=\sum_{n=0}^{\infty} l_n(x_n),$$

при этом последовательность функционалов $\{l_n\}\subset H^*$ *имеет порядок* $\beta\leqslant\frac{1}{\rho}$, *а при порядке* $\beta=\frac{1}{\rho}$ *– тип* $\alpha<(\rho e\sigma)^{-\frac{1}{\rho}}$.

И обратно, любая последовательность функционалов $\{l_n\}$ *с указанными характеристиками определяет функционал* $m\in[\rho,\sigma]^*_{\mathbf{H}}$.

Литература

Громов В.П., Мишин С.Н., Панюшкин С.В. Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения. Орел ОГУ, 2009, с. - 430.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ СЛАБОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Пелешенко Б.И., Семиренко Т.Н. (Днепропетровск)
peleshdsau@mail.ru, semirenkot@mail.ru

Пусть Φ - объединение функции $\varphi(t) = sign\ t$ и множества положительных, возрастающих выпуклых или вогнутых на отрезке $[0;1]$ функций $\varphi(t)$, для которых выполняются условия $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t) = \varphi(0) = 0$ и $\varphi(2t) = O\left(\varphi(t)\right)$, когда $t \to +0$.

Для функции $\varphi(t) \in \Phi$ обозначим $M_\varphi(t) = \sup\limits_{0<s\leqslant\min(1/t,1)} \dfrac{\varphi(st)}{\varphi(s)}$ $(0 < t < \infty)$ и α_φ, β_φ - соответственно ее верхний и нижний показатели растяжения.

Через $S(0;2\pi)$ обозначается пространство измеримых по Лебегу на $(0;2\pi)$ функций и через $f^*(t)$ - невозрастающая перестановка модуля функции $f(x) \in S(0;2\pi)$ относительно нормированной меры Лебега $m(e) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_e dx$.

Пусть LM - множество медленно меняющихся в нуле функций $h(t)$, то есть таких положительных измеримых по мере Лебега на $(0;1)$ функций, что для любого $\lambda > 0$ $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{h(\lambda t)}{h(t)} = 1$.

Пространство Лоренца $\Lambda_{\varphi,a}(0,2\pi)$ для заданных $\varphi(t) \in \Phi$ и $a \in (0;\infty]$ состоит из измеримых по мере Лебега на $\mathbb{R}^n$ функций, для которых конечна квазинорма $\|f\|_{\Lambda_{\varphi,\alpha}} = \left\{\int\limits_0^1 \left(f^*(t)\right)^\alpha d\varphi(t)\right\}^{1/a}$, если $\varphi(t) \neq signt$, $0 < a < \infty$, и квазинорма $\sup\limits_{0<t<1}\left(f^*(t)\varphi(t)\right)$ для $a = \infty$.

Функция $\varphi(t) \in \Phi$ является фундаментальной функцией пространства $\Lambda_{\varphi,a}(0;2\pi)$. В случае $\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}}$, $0 < p < \infty$ - $\Lambda_{\varphi,1}(0;2\pi) = L^{p1}(0;2\pi)$, и если $\varphi(t) = signt$, то $\Lambda_{\varphi,\infty}(0;2\pi) = L_\infty(0;2\pi)$.

Теорема 1. *Пусть $a > 0$, функция $\varphi(t) \in \Phi$, функции $b_1(t)$, $b_2(t) \in LM$ и возрастают или убывают, $b_1(1) > 0$, $b_2(1) > 0$, $d\tilde{\varphi}(t) = b_1^a(t)d\varphi^a(t)$, $d\tilde{\psi}(t) = b_2^b(t)d\varphi^b(t)$. Тогда для вложения $\Lambda_{\tilde{\varphi},a}(0;2\pi) \subseteq \Lambda_{\tilde{\psi},a}(0;2\pi)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $t \in (0;1]$ при $a \leqslant b \leqslant \infty$ выполнялось неравенство $b_2(t) \leqslant \gamma b_1(t)$, $\gamma > 0$, а при $0 < b < a \leqslant \infty$ сходился инте-*

грал

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{b_1(t)}{b_2(t)}\right)^{\nu} \frac{dt}{t}, \qquad \text{где } \nu = \frac{ab}{a-b}.$$

Квазилинейный оператор T ограниченно действует из пространства Лоренца $\Lambda_{\varphi,1}(0;2\pi)$ в пространство $\Lambda_{\psi,\infty}(0;2\pi)$ ([1], с.177), если существует такое число $M>0$, что для любого $t\in(0;1]$ и любой функции $f(x)\in\Lambda_{\varphi,1}(0;2\pi)$ выполняется неравенство

$$(Tf)^*(t)\psi(t) \leqslant M\int\limits_0^1 f^*(u)d\varphi(u).$$

Используя сформулированную теорему и результаты статьи [2], в работе доказано необходимое и достаточное условие интерполяции в пространствах Лоренца квазилинейных операторов, ограниченно действующих из пары пространств $(\Lambda_{\varphi_0,1}(0;2\pi),\Lambda_{\varphi_1,1}(0;2\pi))$ в пару пространств $(\Lambda_{\psi_0,\infty}(0;2\pi),\Lambda_{\psi_1,\infty}(0;2\pi))$.

Теорема 2. *Пусть $a\geqslant 1$ и функции $\varphi_0(t),\psi_0(t),\varphi_1(t),\psi_1(t)\in\Phi$ такие, что $\dfrac{\varphi_0(t)}{\varphi_1(t)}$ и $\dfrac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}$ возрастают, их показатели растяжения удовлетворяют неравенству $0\leqslant\alpha_1\leqslant\beta_1<\alpha_0<\beta_0\leqslant 1$, области определения функций $\dfrac{\varphi_0(t)}{\varphi_1(t)}$ и $\dfrac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}$ совпадают, $m(t)$ - измеримое положительное решение уравнения $\dfrac{\varphi_0(m(t))}{\varphi_1(m(t))}=\dfrac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}$. Пусть функция $\varphi(t)\in\Phi$ и такая, что $\beta_{\varphi_1}<\alpha_\varphi\leqslant\beta_\varphi<\alpha_{\varphi_0}$, функции $b_1(t),b_2(t)\in LM$, возрастают или убывают, $b_1(1)>0$, $b_2(1)>0$, $\tilde{\varphi}^a(t)=\int\limits_0^t b_1^a(t)d\varphi^a(t)$, $\psi^b(t)=\int\limits_0^t \psi_0^b\left(m^{-1}(t)\right)\varphi_0^{-b}(t)d\varphi^b(t)$.*

Если T - квазилинейный оператор, ограниченно действующий из пары пространств Лоренца $(\Lambda_{\varphi_0,1}(0;2\pi),\Lambda_{\varphi_1,1}(0;2\pi))$ в пару пространств $(\Lambda_{\psi_0,\infty}(0;2\pi),\Lambda_{\psi_1,\infty}(0;2\pi))$, то для того, чтобы выполнялось для любой функции $f\in\Lambda_{\tilde{\varphi},a}(0;2\pi)$ неравенство

$$\left\{\int\limits_0^1 \left((Tf)^*\left(m^{-1}(t)\right)\right)^b b_2^b(t)d\psi^b(t)\right\}^{\frac{1}{b}} \leqslant C\left\{\int\limits_0^1 (f^*(t))^a b_1^a(t)d\varphi^a(t)\right\}^{\frac{1}{a}} \tag{1}$$

с некоторой постоянной $C > 0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $t \in (0;1]$ при $a \leqslant b \leqslant \infty$ было $b_2(t) \leqslant \gamma b_1(t)$, $\gamma > 0$, а при $b < a \leqslant \infty$ сходился интеграл

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{b_1(t)}{b_2(t)}\right)^\nu \frac{dt}{t}, \qquad \text{где } \nu = \frac{ab}{a-b}.$$

В случае, когда $\varphi_0(t) = t^{\frac{1}{p}}$, $\psi_0(t) = t^{\frac{1}{q}}$, $\varphi_1(t) = t^{\frac{1}{r}}$, $\psi_1(t) = t^{\frac{1}{s}}$, $1 \leqslant p < r \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < s \leqslant \infty$, теорема 2 доказана в работе Р.Шарпли [3].

Замечание. Пусть $\varphi(t) \in \Phi$ и $0 < t < 1$, определим на конусе неотрицательных невозрастающих на $(0;1]$ функций $g(t)$ операторы:

$$A_\varphi g(t) = [\varphi(t)]^{-1} \int\limits_0^t g(u)d\varphi(u), \quad \varphi(t) \neq signt;$$

$$B_\varphi g(t) = \begin{cases} [\varphi(t)]^{-1} \int\limits_t^1 g(u)d\varphi(u), & \varphi(t) \neq signt, \\ \int\limits_t^1 g(u)u^{-1}du, & \varphi(t) = signt; \end{cases}$$

$$C_\varphi g(t) = [\varphi(t)]^{-1} \sup_{0<u\leqslant t} (\varphi(u)g(u));$$

$$D_\varphi g(t) = [\varphi(t)]^{-1} \sup_{t\leqslant u<1} (\varphi(u)g(u)).$$

Теорема 2 остается верной, если в левой части неравенства (1) $(Tf)^*(t)$ заменить на $[C_{\psi_0} + D_{\psi_1}] f^*(t)$, а в правой части неравенства вместо $f^*(t)$ взять $[A_{\varphi_0} + B_{\varphi_1}] f^*(t)$.

Литература

1. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов /М.: Наука, 1978. — 400с.

2. *Пелешенко Б.И.* Интерполяция операторов слабого типа (φ_0, $\psi_0, \varphi_1, \psi_1$) в пространствах Лоренца / Укр.мат.журн. 2005, 57, №11. С.1490-1507.

3. *Sharply R.* Counterexamples of classical operators on Lorents-Zygmund spaces / Studia matematica, 1966, t.158. P.141-158.

УСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКОГО ПРОГНОЗА ДО ДВУХ СУТОК СИЛЬНЫХ ШКВАЛОВ И ОПАСНОГО ВЕТРА ДЛЯ ТЕРРИТОРИИ ЦЕНТРАЛЬНОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

Переходцева Э.В.

В настоящее время ни у нас, ни за рубежом не имеется пока успешных гидродинамических моделей прогноза (даже на 12ч) явлений сильных шквалов, смерчей и опасного ветра со скоростью V>24м/с, зависящих от большого количества параметров атмосферы. Методами статистической классификации из множества потенциальных предикторов (n=38 параметров атмосферы) нами были отобраны наиболее информативные и слабо зависимые параметры (предикторы) и построены статистические решающие правила диагноза и прогноза этих явлений. Эти правила зависели от значений давления, приземной температуры и влажности, скорости и сдвига ветра в средней тропосфере, гидродинамической неустойчивости, вертикального и горизонтального градиента температуры, значения температуры на уровне максимальных ветров. В гидродинамико-статистической модели прогноза были использованы прогностические (за 12-36ч) значения полей полусферной модели краткосрочного гидродинамического прогноза погоды по полным уравнениям Гидрометцентра России (автор- Беркович Л.В.). После проведения оперативных испытаний в пяти региональных метеослужбах европейской территории России были получены достаточно успешные результаты прогноза по этой гидродинамико-статистической модели (критерий Пирси-Обухова T для заблаговременности 12-36ч. для разных регионов составил T=0,47-0,68 при достаточно высокой предупрежденности самих явлений (П=75%-90%).

В настоящее время в Гидрометцентре России используется продукция новой оперативной региональная гидродинамической модели краткосрочного прогноза погоды (автор – Лосев В.М.) с горизонтальным разрешением 75x75км. В течение 2008 года проводилась адаптация разработанной ранее гидродинамико-статистической модели прогноза сильных ветров, шквалов и смерчей с использованием значений выходных полей региональной модели с заблаговременностью от 12 ч до двух суток. В результате в 2009г была получена значительная серия успешных прогнозов шквалов и смерчей (на территории Центрального Федерального Округа - смерча в Московской области вечером 3 июня 2009 года). С 2010года в течение трех летних сезонов расчет прогнозов этих явлений проводился регулярно два раза в сутки, результаты выкладывались на FTP-сервер Гидрометцентра России, а независимыми экспертами лаборатории испытаний Гидрометцентра России оценивался альтернативный прогноз скорости ветра $V >= 22$м/с.

В 2010 году в Центральном Федеральном Округе было отмечено 24 явления сильных шквалов и максимального ветра со скоростью $V >= 22$м/с (8 из них– со скоростью $V > 24$м/с). Были предупреждены за 12ч все явления со скоростью ветра $V > 24$м/с. В 2011 году в ЦФО было отмечено 7 явлений ветра с $V >= 22$м/с, но всего 2 явления с $V > 24$м/с, из которых 1 явление в Московской области не было предупреждено. В 2012 году повторяемость опасных ветров в ЦФО была выше, чем в 2011, а поэтому и результаты оказались более успешными. Расчеты прогнозов проводились в оперативном режиме для территории ЦФО с заблаговременностью прогноза 24, 36ч и даже 48ч. В докладе приводится значительное число примеров прогнозов сильных шквалов и опасных ветров с заблаговременностью 12-48ч Хотелось бы отметить при этом, что результаты прогнозов большей заблаговременности (24-36-48ч) лишь немногим уступают прогнозам с заблаговременностью 12ч, несмотря на систематические ошибки полученных из модели прогностических (с заблаговременностью 24-36-48ч) значений используемых параметров атмосферы, и близки к полученным ранее результатам прогноза по полусферной модели. Это свидетельствует об устойчивости разработанной статистической модели сильных шквалов, смерчей и опасного ветра со скоростью $V > 24$м/с к ошибкам прогноза гидродинамических моделей краткосрочного прогноза погоды. Увеличение заблаговременности оперативного прогноза с последующим его уточнением позволяет своевременно принять предохранительные меры для предупреждения населения и администрации регионов.

ДЕТЕРМИНАНТНЫЙ ПРИЗНАК СЖАТИЯ

Перов А.И., Грязнова Т.С. (Воронеж)
just_for_me.8@mail.ru

Во многих задачах вычислительных методов линейной алгебры [1] важно знать, когда спектральный радиус матрицы меньше единицы; такие матрицы именуются *сжатиями*.

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — вещественная или комплексная квадратная $n \times n$ - матрица и $\lambda_1(\mathbf{A}), \lambda_2(\mathbf{A}), \ldots, \lambda_n(\mathbf{A})$ - полный набор ее собственных значений. Интересующая проблема коротко записывается так: $spr\mathbf{A} \equiv \max\limits_{j=1,2,\ldots,n} |\lambda_j \mathbf{A}| < 1$. Спрашивается как, не вычисляя корней, дать ответ на поставленный вопрос? С помощью критерия Мецлера-Котелянского [2, с. 335], [3, с. 370-371] доказано следующее предложение:

Теорема 1. *Для того чтобы спектральный радиус матрицы* $\boldsymbol{A}$ *был меньше единицы, необходимо, если она неотрицательная, и достаточно в общем случае, чтобы были положительными последовательные главные миноры внедиагональной неположительной матрицы* $\boldsymbol{I} - |\boldsymbol{A}|$ *:*

$$1 - |a_{11}| > 0, \begin{vmatrix} 1 - |a_{11}| & -|a_{12}| \\ -|a_{21}| & 1 - |a_{22}| \end{vmatrix} > 0, \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} 1 - |a_{11}| & -|a_{12}| & \ldots & -|a_{1n}| \\ -|a_{21}| & 1 - |a_{22}| & \ldots & -|a_{2n}| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -|a_{n1}| & -|a_{n2}| & \ldots & 1 - |a_{nn}| \end{vmatrix} > 0.$$

Здесь $\mathbf{I} = (\delta_{ij})$ - единичная $n \times n$ - матрица, δ_{ij} - кронекеровская дельта, а модуль матрицы определяется формулой $|\mathbf{A}| = (|a_{ij}|)$.

Детерминантный признак сжатия, если и уступает, то совсем немного, классическим критерию Сильвестра положительной определенности вещественной (эрмитовой) симметричной (самосопряженной) матрицы и критерию Рауса-Гурвица отрицательности вещественных частей корней алгебраических многочленов n-й степени с вещественными коэффициентами.

Литература

Фаддеев Д. К., Фаддева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Москва — Ленинград: Физматгиз, 1963. — 736 с.

Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. — 368с.

Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. — 576 с.

О НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Петросян Г.Г. (Воронеж)
garikpetrosyan@yandex.ru

Пусть E - банахово пространство. Для разбиения отрезка $[0,T]$ точками $0 < t_1 < ... < t_m < T, \quad m \geqslant 1$ и функции $c : [0,T] \to E$ обозначим

$$c(t_k^+) = \lim_{h \to 0+} c(t_k + h),$$

$$c(t_k^-) = \lim_{h \to 0-} c(t_k + h),$$

для $1 \leqslant k \leqslant m$.

Мы будем рассматривать существование решения для полулинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^\alpha u(t) \in Au(t) + F(t, u_t, u(t)), t \in [0,T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}, \quad (1),$$

с нелокальным начальным условием:

$$u(s) + g(u)(s) = \vartheta(s), \quad s \in (-\infty, 0] \qquad (2),$$

где $D^\alpha, 0 < \alpha < 1,$ — дробная производная Римана—Лиувилля, $A : D(A) \subset E \to E$ — линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, $F : [0,T] \times \mathcal{B} \times E \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Здесь $\mathcal{B}$ обозначает фазовое пространство бесконечных запаздываний и $u_t \in \mathcal{B}$ характеризует предисторию функции до момента $t \in [0,T]$, т. е. $u_t(\theta) = u(t+\theta), \quad \theta \in (-\infty, 0]$. Мультиотображение F удовлетворяет следующим условиям:

$(F_1) \quad F : [0,T] \times \mathcal{B} \times E \to Kv(E)$ - удовлетворяет верхним условиям Каратеодори,

(F_2) существует функция $w \in L^p([0,T]), p > \frac{1}{\alpha}$ такая, что:

$$\|F(t, \vartheta, u)\| := sup\{\|f\|_E : f \in F(t, \vartheta, u)\} \leqslant w(t)(1 + |\vartheta|_{\mathcal{B}} + \|u\|_E),$$

[1]Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-00328 и 12-01-00392.

для всех $(\vartheta, u) \in \mathcal{B} \times E\cdot$

(F_3) существует функция $\mu \in L^p([0,T])$ такая, что для любых ограниченых множеств $\Omega \subset \mathcal{B}$ и $Q \subset E$, мы имеем:

$$\chi(F(t,\Omega,Q)) \leqslant \mu(t)(\psi(\Omega) + \chi(Q)),$$

где χ - м.н.к. Хаусдорфа в E, $\psi(\Omega) = \sup_{\theta \leqslant 0} \chi(\Omega(\theta))$; $\Omega(\theta) = \{q(\theta), q \in \Omega\}$.

В условии (2) функция $\vartheta \in \mathcal{B}$ задана, а для отображения g предпологается выполненым следующее:

(g_1) $g : E \to E$ — непрерывное отображение, преобразующее ограниченное множество в ограниченное.

(g_2) существует суммируемая функция $l \in (-\infty, 0] \to \mathbb{R}_+$, такая что:

$$\chi(g(D(t)) \leqslant l(t)\chi(D(t)),$$

для любого $t \in (-\infty, 0]$, и для любого ограниченного множества $D \subset \mathcal{B}$.

(g_3) для любого ограниченного множества $D \subset \mathcal{B}$, $\{g(\psi(\cdot)); \psi \in D\}$ — равностепенно непрерывное множество функций и семейство функций

$$\{e^{At}u, \quad u \in g(D(0))\}$$

также равностепенно непрерывно.

(g_4)

$$\liminf_{\|u(t)\| \to \infty} \frac{\|g(u)(t)\|}{\|u(t)\|} < 1.$$

Наконец, будем полагать, что искомая функция удовлетворяет в моменты $t_1, ..., t_m$ условиям импульсных воздействий:

$$u(t_k^+) = u(t_k) + \mathcal{I}_k(u(t_k)), \quad k = 1, ..., m \tag{3}$$

где $\mathcal{I}_k : E \to E$ - вполне непрерывные импульсные функции.

Определение. *Интегральным решением* на $(-\infty, T]$ задачи (1)-(2), называется функция $u : (-\infty, T] \to E$ вида:

$$u(t) = \begin{cases} \vartheta(t) - g(u)(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ e^{At}\left(\vartheta(0) - g(u)(0) + \sum_{t_k < t} \mathcal{I}_k(u(t_k))\right) & \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} \varphi(s) ds, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

где $\varphi(s, u_s, u(s)) \in F(s, u_s, u(s))$.

Теорема. *При выполнении условий* $(A), (F_1), (F_2), (F_3),\ (g_1)-(g_4)$, *множество решений задачи (1)-(3) непусто и компактно.*

Литература

1. Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, Введение в теорию многозначных оторбажений и дифференциальных включений. Издание 2-е, испр. и доп. — М.: Книжный дом «Либроком», 2011.

2. M. Kamenskii, V. Obukhovskii and P. Zecca, Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Speces, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7, Walter de Gruyter, Berlin - New-York, 2001.

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ У НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДУ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Письменный Н.А. (Воронеж)

nikitosp@bk.ru

Рассматривается нелинейная система:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) + \mu_1\gamma_1(t, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) + \mu_2\gamma_2(t, x_1) \end{cases} \tag{1}$$

Предполагается, что f_1, f_2 непрерывно дифференцируемые функции, γ_1, γ_2 непрерывны и $T-$периодичны по первой переменной и допускают непрерывные производные первого порядка по второй переменной, μ_1, μ_2-малые положительные, независимые друг от друга параметры.

При нулевых значениях малых параметров система (1) распадается на два уравнения:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) \tag{2}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) \tag{3}$$

каждое из которых допускает $T-$периодическое решение. Также предполагается, что 1-является простым собственным значением у операторов сдвига по траекториям линеаризованных на периодических решениях уравнений (2) и (3).

Найдены необходимые и достаточные условия для существования периодических решений у системы (1) при достаточно малых значениях параматров μ_1, μ_2, обращающихся при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ в решения уравнений (2) и (3).

КОМПЕТЕНТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ПРЕПОДАВАНИЮ МАТЕМАТИКИ

Плетнёва О.К., Гайдукова Н.И. (Воронеж)

Модернизация общеобразовательной школы предполагает ориентацию образования не только на усвоение обучающимися определенной суммы знаний, но и на развитие его личности, его познавательных и созидательных способностей. Система образования должна быть ориентирована на реализацию компетентностного подхода, на формирование ключевых (базовых, универсальных) компетентностей, т.е. готовности обучающихся использовать усвоенные знания, учебные умения и навыки, а также способы деятельности в жизни для решения практических и теоретических задач.

Основными целями математического образования являются:

–интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для полноценной жизни в обществе;

–овладение конкретными математическими знаниями, умениями и навыками, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;

–воспитание личности в процессе освоения математики и математической деятельности;

–формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности.

Соответственно целям обучение математике конкретизируется на четырех группах компетентностей.

Математическая (прагматическая) компетентность выпускника старшей школы предполагает, что он умеет использовать математические знания для описания и решения проблем реальной жизни; умеет грамотно выполнять алгоритмические предписания и инструкции на математическом языке; умеет пользоваться математическими формулами, самостоятельно составлять формулы зависимостей между величинами на основе обобщения частных случаев и эксперимента.

Социально - личностная компетентность предусматривает владение стилем мышления, характерным для математики, его абстрактностью, строгостью; умение проводить аргументированные рассуждения, делать логически обоснованные выводы, отличать доказанные утверждения от недоказанных, аргументировать суждения; умение проводить обобщения и открывать закономерности на основе анализа частных примеров, эксперимента, выдвигать гипотезы и понимать необходимость их проверки.

Общекультурная компетентность проявляется в понимании и умении аргументировано объяснять значимость математики как неотъемлемой части общечеловеческой культуры, воздействовать на иные области культуры, на совершенствование человека; в наличии представления о различии требований, предъявляемым к доказательствам в различных областях науки и на практике, в математике, естественных и гуманитарных науках.

Предметно - мировоззренческая компетентность предполагает наличие представлений об аксиоматическом построении математической теории, о логическом статусе аксиом, определяемых и неопределяемых понятий, определений и теорем; о значении аксиоматики для других областей знаний и практики; владение приемами построения и исследования математических моделей при решении прикладных задач и задач из смежных областей.

Концепция предмета обусловливает содержание школьного математического образования, которое все больше становится направленным на практическое приложение теоретического материала. Основу обучения составляют три основных направления: 1) приложения уже разработанных схем к проблемам практики; 2) создание моделей по известным схемам; 3) создание и разработка новых схем моделей или их вариантов. Предметно значимыми становятся темы, использование которых связано с практическими приложениями.

Цели обучения математике обусловлены гуманизацией и гуманитаризацией образования. Важные условия гуманизации математического образования - усиление мотивации и дифференциация обучения. Гуманитаризация образования предполагает вооружение школьников методами научного поиска, среди которых наиболее важными становятся эвристические приемы и методы научного познания.

Школьное математическое образование складывается из следующих содержательных компонентов: арифметика, алгебра, геометрия, начала математического анализа, элементы статистики и теории вероятности. Такая структура опирается на опыт обучения математике в нашей стране, а также учитывает современные тенденции современной и зарубежной школы. Первые четыре компонента составляют традиционный для школы материал. Последний блок является новым для нашей школы, имеющим большое общекультурное и практическое значение для жизни человека в современном обществе, широко представленным в мировом образовании. Кроме того, если ранее в содержание образования включали систему предметных знаний и способы деятельности, то теперь предполагается приобщение школьника к творческому процессу, что возможно осуществить только через включение в содержание образования различных эвристик и создание специальных условий для творчества ученика.

Социальная значимость образования с помощью математики заключается в повышении средствами математики уровня интеллектуального развития человека для его полноценного функционирования в обществе, обеспечении функциональной грамотности каждого члена общества, что является необходимым условием повышения интеллектуального уровня общества в целом. В контексте образования с помощью математики образовательная область "Математика"выступает именно как предмет общего образования, ведущей целью которого является интеллектуальное воспитание, развитие мышления подрастающего человека, необходимое для свободной и безболезненной адаптации его к условиям жизни в современном обществе.

МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ ДЛЯ РЯДОВ ПО ПЕРЕСТАВЛЕННЫМ СИСТЕМАМ УОЛША[1]

Плотников М.Г. (Вологда)

mgplotnikov@mail.ru

Множеством единственности (U*-множеством*) для рядов по некоторой системе функций называют множество A такое, что коэффициенты любого сходящегося вне A к нулю ряда по данной системе равны нулю. Для рядов по системе Уолша, как и для тригонометрических, построена разветвлённая теория множеств един-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00321-а) и программы "Ведущие научные школы" (проект НШ-979.2012.1).

ственности (см., напр., работы [1], [2] и содержащуюся в них библиографию), причём описание таких множеств требует привлечения не только метрических, но и арифметических характеристик. Несложно показать, что любое множество положительной меры не является U-множеством для тригонометрических рядов или рядов Уолша–Пэли. Верен ли этот факт для соответствующих многомерных рядов, неизвестно (вопрос Н. Н. Холщевниковой, см. [3]).

Под системой Уолша понимают несколько систем, отличающихся нумерацией функций; хорошо известны *система Уолша–Пэли*, *система* собственно *Уолша*, *система Уолша–Качмажа*, *системы Уолша–Шиппа* [4]. Большинство из них являются "хорошими" в том смысле, что получаются из системы Уолша–Пэли перестановками, сохраняющими функции в двоичных пачках.

Теорема 1. *Существуют "хорошие" перестановки системы Уолша–Пэли, для одномерных рядов по которым имеются совершенные U-множества положительной меры.*

Литература

[1] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.

[2] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применение. М.: Наука, 1987.

[3] *Холщевникова Н. Н.* Объединение множеств единственности кратных рядов — Уолша и тригонометрических. Матем. сб., **193**:4 (2002), 135–160.

[4] *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. Budapest: Academiai Kiado, 1990.

ТЕОРЕМА БАРИ ДЛЯ МАРТИНГАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ[1]

Плотников М.Г., Плотникова Ю.А. (Вологда)

mgplotnikov@mail.ru, *japlotnikova@yandex.ru*

Одним из фундаментальных результатов теории тригонометрических рядов является теорема Н. К. Бари [1] о структуре множеств единственности (U-множеств): *объединение счётного числа замкнутых U-множеств для тригонометрических рядов также является U-множеством.* Напомним, множество A называется *U-множеством* для рядов по некоторой системе функций, если любой сходящийся к нулю вне A ряд имеет лишь нулевые коэффициенты.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №11-01-00321-а) и программы "Ведущие научные школы" (проект НШ-969.2012.1)

Из [2] вытекает аналог теоремы Бари для рядов Хаара из класса Арутюняна–Талаляна. В [3] теорема Бари доказана для одномерных, а в [4] — для кратных рядов Хаара из классов Вэйда.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ с выделенной системой σ-алгебр $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}$. Зафиксируем систему $\{\mathcal{F}_i\}$. Рассмотрим топологию на Ω, порожденную всеми множествами $U \in \cup_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}_i$. Предположим, что система множеств $\{\mathcal{F}_i\}$ обладает тем свойством, что $\cap_{i=0}^{\infty} A_i \neq \varnothing$ для всякой убывающей последовательности $\{A_i\}$ такой, что $A_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 0, 1, \ldots$. Пусть Θ — семейство мартингалов $X = (X_i,\, \mathcal{F}_i)_{i=0}^{\infty}$ (см. [5, гл. 7]) такое, что для всех мартингалов $X = (X_i,\, \mathcal{F}_i)$ и $Y = (Y_i,\, \mathcal{F}_i)$ с условием $|X_i| \leqslant |Y_i|$ $\mathbf{P}$-п.в. для всех i, принадлежность $Y \in \Theta$ влечет $X \in \Theta$. Тогда *объединение счётного числа замкнутых U-множеств для мартингалов из семейства Θ также является таковым.* Упомянутые результаты из [2-4] вытекают из данного факта.

Литература

[1] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.

[2] *Мушегян Г. М.* О множествах единственности для системы Хаара. Изв. АН Армян. ССР. Сер. матем., **4**:1 (1969), 55–65.

[3] *Wade W. R.* Sets of uniqueness for Haar series. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **30**:(3–4) (1977), 265–281.

[4] *Плотников М. Г.* Квазимеры, хаусдорфовы p-меры и ряды Уолша и Хаара. Изв. РАН. Сер. матем., **74**:4 (2010), 157–188.

[5] *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980, МЦНМО, 2007.

О ВОЗМОЖНОСТИ РАЗДЕЛЕНИЯ ЗАПИСЕЙ ВЫЗВАННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ КОРЫ МОЗГА НА СИГНАЛЫ РАЗЛИЧНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)

anpokrovski@gmail.com

Вызванные потенциалы (ВП) регистрируются системой электродов, кончики которых расположены на разной глубине коры мозга. Сигнал с электрода каждого уровня содержит, вообще говоря, сумму потенциалов разного происхождения: потенциалы апикальных дендритов (наибольшей амплитуды) и суммарные потенциалы от всех других дендритов и их отростков, растущих во всех направлениях. Для понимания результатов экспериментов необходимо разделить послойную запись ВП на компоненты разного происхождения и с разными временами возникновения.

Прежде всего рассмотрим синаптические потенциалы и токи систем апикальных дендритов. Используем кусочно-линейную аппроксимацию токов через синапсы при фиксации потенциалов. В предположении, что поверхность и слои коры - это бесконечные плоскости, а плотность апикальных дендритов везде одинакова, получаем одно уравнение параболического типа для потенциалов и токов апикальных дендритов. Подбор параметров (включая и моменты времени начала токов) позволяет найти внеклеточные потенциалы рассматриваемой системы синапсов апмкальных дендритов и вычесть их из экспериментальных кривых. В случае наличия двух популяций апикальных дендритов необходимо будет проделать эти вычисления для каждой из них.

После вычитания из записи ВП модельных потенциалов системы апикальных дендритов остаются только суммарные потенциалы множества отрезков более тонких разных направлений. Каждый отрезок тонкого дендрита заменим на бесконечный цилиндр той же толщины, с активацией одного синапса в предполагаемом центре этого цилиндра. Погрешность такой замены может оказаться небольшой, поскольку внутриклеточные потенциалы синапса убывают вдоль оси цилиндра по зкспоненте. Далее после усреднения по всем направлениям цилиндров найдём внеклеточный потенциал одного синапса, а по распределению каждого типа синапсов – суммарный внеклеточный потенциал каждого типа.

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Поляков Д.М. (Воронеж)

DmitryPolyakow@mail.ru)

Пусть $L_2[0,1]$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом на $[0,1]$ комплекснозначных функций со скалярным произведением $(x,y)=\int\limits_0^1 x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau$,

$x,y\in L_2[0,1]$. Через $W_2^4[0,1]$ обозначим пространство Соболева $\{y\in L_2[0,1]\to\mathbb{C} : y$ имеет три непрерывные производные, y''' абсолютно непрерывна и $y^{IV}\in L_2[0,1]\}$.

Рассматривается оператор $L : D(L)\subset L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, который определяется следующим дифференциальным выражением

$$l(y)=y^{IV}-a(t)y''-b(t)y, \quad \text{где} \quad a,b\in L_2[0,1],$$

с областью определения

$$y \in D(L) = \left\{ y \in W_2^4[0,1] : y(0) = y(1) = 0, y''(0) = y''(1) = 0 \right\}.$$

Оператор

$$L_0 : D(L_0) = D(L) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1], \qquad L_0 y = y^{IV},$$

будет называться свободным оператором. При изучении оператора L он будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор $L_1 y = a(t)y'' + b(t)y$ — возмущения. Оператор L_0 является самосопряженным оператором с компактной резольвентой. Спектр $\sigma(L_0)$ допускает представление

$$\sigma(L_0) = \{\lambda_1, \lambda_2, ...\}, \quad \lambda_n = \pi^4 n^4, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Соответствующая собственная функция имеет вид $e_n(t) = \sqrt{2} \sin \pi n t$.

С помощью метода подобных операторов [1] были получены следующие спектральные свойства возмущенного оператора L.

Теорема 1. *Дифференциальный оператор $L = L_0 - L_1$ является оператором с компактной резольвентой и его собственные значения $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ...$ допускают следующую асимптотику*

$$\tilde{\lambda}_n = (\pi n)^4 - (\pi n)^2 \int_0^1 a(t) \cos 2\pi n t dt - \frac{1}{\pi^4} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{nl} a_{ln}}{l^4 - n^4} -$$

$$- \frac{n^2}{\pi^{12}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk} a_{kj}}{k^4 - j^4} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{jm} a_{mn}}{m^4 - n^4} \right) \right) \frac{j^2}{j^4 - n^4} \right) + \alpha_n n^2,$$

$$n \geqslant m + 1,$$

где (α_n) — суммируемая последовательность, а коэффициенты $a_{nl} = \pi^2 l^2 \left(\int_0^1 a(t) \cos \pi(l-n) t dt - \int_0^1 a(t) \cos \pi(l+n) t dt \right), l \geqslant 1$, для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Литература

1. *Баскаков А.Г.*, Гармонический анализ линейных операторов, изд-во Воронежского государственного университета, Воронеж, 1987, 165 с.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Попов М.И., Ряжских В.И. (Воронеж)
mihail_semilov@mail.ru

Математическая формализация внутренних задач кондуктивно-ламинарного режима свободной конвекции приводит к необходимости интегрирования следующей системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\frac{\partial^2\Phi(X,Y,\theta)}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Phi(X,Y,\theta)}{\partial Y^2}\Big]= \\ =\frac{\partial^4\Phi(X,Y,\theta)}{\partial X^4}+2\frac{\partial^4\Phi(X,Y,\theta)}{\partial X^2\partial Y^2}+\frac{\partial^4\Phi(X,Y,\theta)}{\partial y^4}-\frac{\partial T(X,\theta)}{\partial X},$$

$$T(X,\theta)=1-X+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p}\sin\left[(1-X)\,\pi p\right]\exp\left(-\frac{\pi^2p^2}{Pr}\theta\right),$$

$$\Phi(X,Y,0)=0,$$

$$\Phi(0,Y,\theta)=\Phi(1,Y,\theta)=\Phi(Y,0,\theta)=\Phi(X,\xi,\theta)=0,$$

$$\frac{\partial\Phi(0,Y,\theta)}{\partial X}=\frac{\partial\Phi(1,Y,\theta)}{\partial X}=\frac{\partial\Phi(X,0,\theta)}{\partial Y}=\frac{\partial\Phi(X,\xi,\theta)}{\partial Y}=0,$$

где $T(X,\theta)$ – температура, $\Phi(X,Y,\theta)$ – функция тока, Pr – число Прандтля, θ, X, Y – текущие время и декартовы координаты, ξ – отношение сторон прямоугольника, которое записано для прямоугольника $[0,1]\times[0,\xi]$. Область решения разбивается равномерной по X и по Y сеткой с шагами $\triangle X$ и $\triangle Y=\xi\triangle X$.

Строится конечно-разностная схема. Частные производные по координатам второго порядка аппроксимируются трехточечным, а четвертого пятиточечным шаблоном со вторым порядком точности. За счет двухточечной аппроксимации производной по времени, получена явная двухслойная (по времени) конечно разностная схема. Однако, функция тока входит в производную в неявном виде, поэтому ее матрица значений на каждом шаге находится из системы линейных уравнений. Для обеспечения большей точности на каждом шаге пересчитываются значения в приграничных слоях, используя многоточечную аппроксимацию первой производной в граничных точках. Полученная невязка пропорционально распределяется между внутренними точками области решения.

Особенностью данной схемы является ее явный по времени характер, что значительно упрощает вычисления и существенно экономит память ЭВМ. По результатам вычислительного эксперимента проведен анализ характера изменения функции тока в зависимости от соотношения сторон прямоугольника ξ.

ПРОСТРАНСТВО ТЕЙХМЮЛЛЕРА И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРИМА[1]

Пушкарева Т.А. (Горно-Алтайск)
pushkareva.tanya@gmail.com

Пусть F_μ – переменная компактна риманова поверхность рода $g \geqslant 2$, комплексно-аналитическая структура задана дифференциалом Бельтрами $\mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz}$ на $F = F_0$. Обозначем через Γ_μ квазифуксову группу униформизирующую F_μ в $w^\mu(U)$, где w^μ – решение уравнения Бельтрами на $U = \{|z| < 1\}$. Характер ρ для F_μ это любой гомоморфизм $\rho:\ \pi_1(F_\mu) \cong \Gamma_\mu \to \mathbf{C}^*$. Дифференциалов Прима φ для ρ на F_μ назовем дифференциал $\varphi = \varphi(z)dz$ такой, что $\varphi(Tz)T'(z) = \rho(T)\varphi(z),\ z \in w^\mu(U),\ T \in \Gamma_\mu$.

Обозначим через $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ пространство всех голоморфных дифференциалов Прима для ρ на F_μ. Для $\varphi = df(z)$ на $w^\mu(U)$ верно $f(Tz) = \rho(T)f(z) + \varphi(T)$, где период $\varphi(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$ для $T \in \Gamma_\mu$. Отображение $\varphi:\ \Gamma_\mu \to \mathbf{C}$, удовлетворяет коциклическому условию, $\varphi(ST) = \varphi(S) + \rho(S)\varphi(T),\ S, T \in \Gamma_\mu$, то есть $\varphi \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$. Определен класс периодов $[\varphi] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho) = Z^1(\Gamma_\mu, \rho)/B^1(\Gamma_\mu, \rho)$, где $B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ порождается 1-циклом $\sigma_\mu = 1 - \rho_\mu(T),\ T \in \Gamma_\mu$. Пусть L_g – подгруппа несущественных характеров, $[S^1]^{2g}$ – подгруппа нормированных характеров в группе $Hom\ (\Gamma, \mathbf{C}^*)$, $\mathbf{T}_g$ – пространство Тейхмюллера рода g.

Теорема 1. *Векторное расслоение*

$$\mathbf{P}_{1,0} = \bigcup_{[\mu] \in \mathbf{T}_g, \rho \in L_g \setminus 1} \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))/ < df_0 >$$

будет голоморфным векторным расслоением ранга $g - 1$ *над* $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus 1)$ *для любого* $g \geqslant 2$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-90800-мол-рф-нр)

Теорема 2. *Последовательность голоморфных векторных расслоений и отображений*

$$0 \to \mathbf{P}_{1,0} \to G \to G/\mathbf{P}_{1,0} \to 0$$

над $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash 1)$ *является точной для любого* $g \geqslant 2$.

МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ КОМПЛЕКСНОГО ПРИМЕНЕНИЯ АКТИВНЫХ И ПАССИВНЫХ СРЕДСТВ ЗАЩИТЫ АКУСТИЧЕСКОЙ РЕЧЕВОЙ ИНФОРМАЦИИ

Пырочкин А.С. (Воронеж)
piras@inbox.ru

В настоящее время для предотвращения перехвата акустической речевой информации (АРИ) по виброакустическому каналу используются пассивные и активные способы защиты.

Пассивные способы основаны на уменьшении (ослаблении) уровня речевого сигнала путем звукоизоляции помещений, которая обеспечивается с помощью архитектурных и инженерных решений, а также применением специальных строительных и отделочных материалов (покрытий). Однако, даже несмотря на необходимую в этом случае весьма дорогостоящую техническую доработку строительных конструкций, применение таких способов не всегда эффективно [1].

Активные методы основаны на создании маскирующих вибрационных помех. Однако во многих ситуациях использование таких мер защиты приводит к появлению мешающих акустических шумов, существенно снижающих комфортность работы персонала в защищаемом и смежных с ним помещениях. Комплексирование же обоих методов позволяет добиваться выполнения основных требований по защите информации и обеспечивать при этом минимальный уровень мешающих акустических шумов [1].

Имеющийся на сегодняшний день методический аппарат не позволяет проводить адекватные оценки эффективности комплексного применения пассивных и активных средств защиты АРИ. Это обусловлено тем, что он ориентирован только лишь на случаи зашумления многослойных строительных конструкций, обладающих минимальными звукопоглощающими свойствами. В тоже время использование специализированных звукопоглощающих материалов (покрытий) предполагает значительное ослабление не только уровня информативного (защищаемого) сигнала, но и помехового сигнала, создаваемого активными средствами защиты. Поэтому необходимо разработать методический аппарат, учитывающий не только многослойный характер строительных конструкций [2,3], но и их поглощающие свойства, что позволит проводить корректные оценки эффективности комплексного применения пассивных и активных средств защиты АРИ.

Основные положения и допущения

1. В качестве показателя эффективности комплексного применения пассивных и активных средств зашиты АРИ будем использовать радиус эффективного действия виброизлучателя $R_{\text{эф}}$, под которым понимается минимальное расстояние, на котором словесная разборчивость речи P_W достигает некоторого порогового значения P_{W_0}.

2. Для оценок P_W используется инструментально-расчетный метод Покровского [4], в соответствии с которым отношение "уровней речевого сигнала и акустического шума (помехи)"q_i в поддиапазонах разбиения речевого сигнала определяется выражением

$$q_i(r) = \frac{\int\limits_{f_{Hi}}^{f_{Bi}} p_s^2(f)}{\int\limits_{f_{Hi}}^{f_{Bi}} p_j^2(r,f)}, \tag{1}$$

где индекс "s"относится к возбуждению конструкции извне (защищаемый сигнал), индекс "j к возбуждению конструкции источником в одном из слоев (помеха); f_{Bi}, f_{Hi}- граничные частоты поддиапазонов; $p_s^2(f), p_j^2(r,f)$- спектральные плотности квадратов звуковых давлений воздуха, обусловленных источниками "защищаемого"сигнала и помехи.

3. По аналогии с [3], в качестве защищаемого рассматривается сигнал с одним или несколькими фиксированными интегральными уровнями и характерной для русской речи спектральной плотностью, а в качестве параметров виброизлучателя используется интегральная мощность и спектральная плотность мощности структурного звука.

Расчетные соотношения

Для учета поглощения, обусловленного вязкостью материалов слоев конструкции, введем, в соответствии с [5], комплексные коэффициенты Ламе

$$\lambda \to \lambda - i\omega(\frac{2}{3}\eta - \zeta), \mu \to \mu + i\omega\eta, \tag{2}$$

где ς, η- объемная и сдвиговая вязкости, соответственно.

С учетом этого скорость продольных акустических колебаний в веществе слоя пластины в месте расположения виброизлучателя описывается выражением

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}[I + \frac{i\omega}{\lambda + 2\mu}(\zeta + \frac{4}{3}\eta)]^{1/2}. \tag{3}$$

Спектральные плотности квадратов звуковых давлений, обусловленных источниками "защищаемого"сигнала и помехи, могут быть выражены следующим образом [3]:

$$p_s^2(f) = 16\pi^2 p^2(f)|\xi_s(0,f)|^2 r_0^2, \tag{4}$$

$$p_j^2(r,f) = \frac{2\pi^2 p_0^2 c}{\rho_k} N_j(f)|\xi_j(r,f)|^2, \tag{5}$$

где $p^2(f)$- заданная спектральная плотность квадрата давления сигнала;

$N_j((f)$- спектральная плотность мощности виброизлучателя;

$\xi_{s(j)}(r,f)/\theta_{s(j)}(f), \theta_{s(j)}(f)$- Фурье-представление скорости объёма среды, вытесняемого источником "защищаемого"сигнала (помехи);

$\varphi_{s(j)}(r,f)$- потенциал скоростей и его Фурье-представление;

r_0- расстояние от источника защищаемого сигнала до строительной конструкции. В соответствии с [3] принимаем $r_0 = 1$ м. Теперь, используя (1) и (3) - (5), можно рассчитать спектральный индекс артикуляции речи R_i для каждой полосы частотного разбиения речевого сигнала

$$R_i = p_i \cdot k_i, \tag{6}$$

где k_i- весовой коэффициент частотной полосы, определяемый по формуле

$$k_i = k(f_{Bi}) - k(f_{Hi}), \tag{7}$$

$$k(f) = \begin{cases} 2,57 \cdot 10^{-8} \cdot f^{2,4}, & \text{если } 100 < f \leqslant 400 \text{ Гц}, \\ 1 - 1,074 \cdot exp(-10^{-4} \cdot f^{1,18}), & \text{если } 400 < f \leqslant 10000 \text{ Гц}, \end{cases}$$

а коэффициент p_i рассчитывается следующим образом

$$p_i = \begin{cases} \frac{0,78+5,46 \cdot exp[-4,3 \cdot 10^{-3} \cdot (27,3-|Q_i|)^2]}{1+10^{0,1 \cdot |Q_i|}}, & \text{если } Q \leqslant 0, \\ \\ 1 - \frac{0,78+5,46 \cdot exp[-4,3 \cdot 10^{-3} \cdot (27,3-|Q_i|)^2]}{1+10^{0,1 \cdot |Q_i|}}, & \text{если } Q > 0, \end{cases} \quad (8)$$

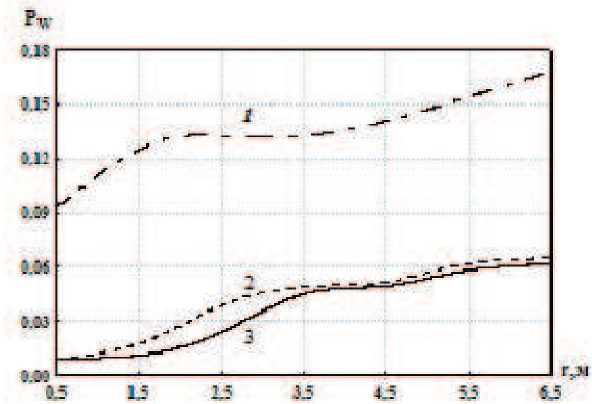
где $Q_i = q_i - \Delta A_i, \Delta A_i$- формантный параметр полосы. С учетом (6) - (8) словесная разборчивость речи определяется выражением [7]

$$P_W = \begin{cases} 1,54 \cdot R \cdot exp(-11R), & \text{если } R < 0,15, \\ \\ 1 - exp(-\frac{11R}{1+0,7R}), & \text{если } R \geqslant 0,15 \text{ Гц}, \end{cases} \quad (9)$$

где $R = \sum\limits_{i=1}^{N} R_i; N$- число полос разбиения речевого сигнала.

В качестве примера использования предлагаемой методики ниже на рисунке представлены рассчитанные по (9) зависимости словесной разборчивости речи для четырехслойной строительной конструкции штукатурка-бетон-штукатурка-звкопоглащающее покрытие из двух листов гипсокартона, пространство между которыми заполнено минералватной плитой "Шуманет-БМ". Толщины слоев составляли: штукатурка - 0,05 м, бетон - 0,2 м, гипсокартон - 0,01 м, минералватная плита - 0,05 и 0,075 м. Виброизлучатель средства зашумления считался заглубленным в стену на 0,2 м (т.е. находился в бетоне). "Защищаемый"сигнал соответствовал среднему уровню громкости на расстоянии 1 м от источника (75 дБ). Долевое распределение по октавам интенсивности возбуждаемых виброизлучателем колебаний принималась равномерным, а его интегральная мощность составляла 50 мВт. Расчёт $\xi_{s(j)}(r, f)$ проводился по отдельной методике на основе решения волновой задачи о возбуждении многослойной пластины [2].

Из рисунка видно, что радиусы эффективного действия средств виброакустического зашумления на конструкциях разного типа существенно отличаются друг от друга. Наличие покрытий, обладающих высоким коэффициентом поглощения, приводит к резкому снижению словесной разборчивости речи вблизи места установки



виброизлучателя, причем этот эффект возрастает с увеличением толщины покрытия.

Рис. Зависимости словесной разборчивости защищаемого сигнала от расстояния между виброизлучателем и точкой прослушивания: в отсутствии звукопоглощающего покрытия (1); при толщине покрытия 0,07 м (2); и 0,095 м (3).

Выводы.

Предложенная методика позволяет проводить теоретические оценки радиусов эффективного действия средств виброакустического зашумления с учетом поглощающих свойств строительных конструкций и может быть востребована при проектировании мер защиты речевой информации в выделенных помещениях при совместном использовании пассивных и активных мер защиты.

Литература

1. *Каргашин В.Л.* Некоторые особенности реализации пассивных мер защиты в виброакустических каналах утечки речевой информации//Специальная техника, 2002, № 4.

2. *Колычев С.А., Пырочкин А.С.* Математическая модель оценки пространственно-частотных характеристик акустических полей в плоскослоистых ограждающих конструкциях // Телекоммуникации. - 2007. № 3. С. 26 - 31.

3. *Колычев С.А., Пырочкин А.С.* Методика прогнозирования радиусов зон эффективного действия виброизлучателей средств за-

шумления плоскостных строительных конструкций // Телекоммуникации. - 2007. № 4. С. 31 - 36.

4. *Покровский Н.Б.* Расчет и измерение разборчивости речи. М.: Связьиздат, 1962. - 391 с.

5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 2001, 259 с.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ ВОЗМУЩЕННОЙ ДЕСКРИПТОРНОЙ СИСТЕМЫ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ В ОБЩЕСТВЕ

Раецкая Е.В. (Воронеж)

raetskaya@inbox.ru

Рассматривается дескрипторная динамическая система:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Bx(t) + C(t, x(t)) + f(t), \tag{1}$$

$$F(t) = Ax(t) \tag{2}$$

описывающая распространение эпидемического заболевания в обществе.

Здесь $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ - функция состояния, где $x_1(t)$ - группа населения, восприимчивая к новому заболеванию, $x_2(t)$ - инфицированная группа населения, а $x_3(t)$ - группа населения, исключенная из первоначального числа исследуемых; $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ - наблюдаемая входная функция, где $f_1(t)$ - скорость, с которой появляются новые восприимчивые, а $f_2(t)$ - скорость, с которой появляются новые инфицированные; нелинейное слагаемое $C(t, x(t))$ отражает взаимодействие между группами населения; $F(t)$ - входная наблюдаемая функция, которая отражает соотношение между тремя группами населения.

Система является полностью наблюдаемой (идентифицируемой по Калману), если по известным, реализуемым входной $f(t)$ и выходной $F(t)$ функциям состояние системы $x(t)$ в каждый момент времени определяется однозначно.

Система (1),(2) возмущается при помощи малого параметра:

$$\varepsilon \frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = B(\varepsilon)x(t,\varepsilon) + C(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) + f(t,\varepsilon), \tag{3}$$

$$F(t,\varepsilon) = A(\varepsilon)x\varepsilon. \tag{4}$$

Методом каскадного расщепления (см. [1] -[4]) исследуется полная наблюдаемость предельной и возмущенной дескрипторных систем.

Устанавливаются свойства коэффициентов, которые обеспечивают нечувствительность системы к возмущениям указанного типа.

Выводятся формулы для построения функций $x_1(t,\varepsilon)$, $x_2(t,\varepsilon)$ и $x_3(t,\varepsilon)$ полностью наблюдаемой возмущенной системы (3), (4), а также выявляется вид связи между наблюдаемыми входной $f(t,\varepsilon)$ и $F(t,\varepsilon)$ выходной функциями системы (3), (4).

Литература

[1] Раецкая Е.В. Полная условная управляемость и полная наблюдаемость линейных систем: Дисс. …канд. физ.- мат. Наук. Воронеж, 2004. 145 с.

[2] Раецкая Е.В. Полная наблюдаемость нестационарной дифференциально-алгебраической системы / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг // Вестник Воронежского государственного технического университета. Воронеж. – 2010. Том 6. № 8. 2010 г. – С. 82-86.

[3] Раецкая Е.В. Об инвариантности нестационарной системы наблюдения относительно некоторых возмущений /С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов.- 2010. Том 15, вып. 6. – С. 1678-1679.

[4] Раецкая Е.В. О полной наблюдаемости сингулярно возмущенной динамической системы / Е.В. Раецкая// Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения-XXIII- Воронеж: ВорГУ, 2012. С. 157-158

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рамазанов А.К. (Калуга)

akramazanov@mail.ru

Пусть $D = \{z\ :\ |z| < 1\}$, а $AL_2(D)$ – пространство голоморфных в D функций f, суммируемых с квадратом по плоской мере Лебега, с конечной нормой

$$\|f\|_{L_2(K)} = \left(\iint_D |f(\zeta)|^2 \, d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через $\mathbb{P}_n$ будем обозначать множество всех многочленов степени не выше n. Рассмотрим логарифмическую производную рациональной функции:

$$r_{n,m}(z) = \left(\log \left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \right) \right)' = \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} - \frac{Q_m'(z)}{Q_m(z)}, \; n+m \geqslant 1,$$

где $P_n \in \mathbb{P}_n, \; Q_m \in \mathbb{P}_m$.

Класс всех таких рациональных дробей, с полюсами вне D, будем обозначать через $SR_{n,m}(D)$. В частности, при $m = 0$ получаем наипростейшие рациональные дроби.

Обозначим через $r_{n,m}(z, f)$ рациональную дробь из $SR_{n,m}(D)$ наилучшего приближения для функции f из пространства $AL_2(D)$.

Для дальнейшего удобна следующая форма записи полиномов (с попарно различными корнями), используемых ниже в работе

$$\begin{aligned} P_n(z) &= c_1(z-\alpha_1)^{\nu_1} \cdots (z-\alpha_p)^{\nu_p}, \quad |\alpha_j| > 1 \; (j = 1, 2, \ldots, p), \\ Q_m(z) &= c_2(z-\beta_1)^{\mu_1} \cdots (z-\beta_q)^{\mu_q}, \quad |\beta_j| > 1 \; (j = 1, 2, \ldots, q). \end{aligned}$$

Всюду ниже n и m – целые неотрицательные числа, причем $n+m \geqslant 1$. Справедлива следующая

Теорема . *Пусть $f \in AL_2(D)$ и*

$$r_{n,m}(z, f) = r_{n,m}(z) = \left(\log \left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \right) \right)'.$$

Тогда справедливы следующие равества

$$\begin{aligned} & f^{(l)}(0) = r_{n,m}^{(l)}(0), \\ & l = 0, 1, \ldots, \max\{n - \deg(P_n) - 1; m - \deg(Q_m) - 1\}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$f^{(s)}(1/\overline{\alpha_j}) = r_{n,m}^{(s)}(1/\overline{\alpha_j}), \quad s = 1, \ldots, \nu_j, \; j = 1, \ldots, p, \tag{2}$$

$$f^{(s)}(1/\overline{\beta_j}) = r_{n,m}^{(s)}(1/\overline{\beta_j}), \quad s = 1, \ldots, \mu_j, \; j = 1, \ldots, q. \tag{3}$$

Заметим, что интерполяция в нуле выполняется лишь при выполнении одного из неравенств $n-1 \geqslant \deg(P_n)$ или $m-1 \geqslant \deg(Q_m)$.

Аналогичная теорема справедлива для приближений на окружности ∂D и прямой. Для рациональных приближений подобные теоремы были доказаны ранее в [1].

Литература

1. *Вячеславов Н. С., Рамазанов А. К.* Интерполяционные свойства рациональных функций наилучшего приближения в среднем квадратическом на окружности и в круге // Матем. заметки. 1995, Т.57, вып.2, С. 228 – 239.

О КОЭФФИЦИЕНТНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ В ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Родикова Е.Г. (Брянск)

evheny@yandex.ru

Пусть D - единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Рассмотрим класс S_α^p, $\alpha > -1$, $0 < p < +\infty$ (см. [1], с. 92) аналитических в D функций, таких что

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha T^p(r,f)dr < +\infty,$$

где $T(r,f)$ - характеристика Р. Неванлинны функции f.

Определение. Последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ назовем мультипликатором из класса S_α^p в некоторый класс X аналитических в D функций, если для произвольной функции $f \in S_\alpha^p$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ функция $\Lambda(f) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda_n a_n z^n \in X$.

Описанию мультипликаторов в различных классах голоморфных функций посвящены работы отечественных и зарубежных ученых (см. [2],[3]). Основным результатом является доказательство следующего утверждения:

Теорема. *Пусть X совпадает с одним из следующих классов: S_β^p, $-1 < \beta < \alpha$ или H^p, $0 < p \leqslant \infty$. Для того чтобы последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ являлась мультипликатором из класса S_α^p в класс X, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda_n| = O\left(exp\left(-c \cdot n^{\frac{\alpha+p+1}{\alpha+2p+1}}\right)\right), n \to +\infty,$$

где $c > 0$.

Литература

1. *Шамоян Ф.А., Шубабко Е.Н.* Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций - Брянск: БГУ. 2009. - 152 с.

2. *Duren P.L.* Theory of H^p spaces, Pure and Appl. Math., V. 38, Academic Press, NY, 1970. - 292 p.

3. *Yanagihara N.* Multipliers and linear functionals for the class N^+ // Transactions of the AMS, v. 180, 1973. - P. 449-461.

КОСВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ НЕЛЕГАЛЬНЫХ ДОХОДОВ[1]

Родин В.А. (Воронеж)

После обоснования в работах [1,2] гипотезы о логнормальном распределении легальных доходов граждан Российской Федерации стало возможным моделирование эффектов от введения прогрессивного подоходного налога. Пусть N - количество налогоплательщиков, $t(x)$ - ставка подоходного налога, зависящая от величины дохода. Тогда совокупный налог, собранный со всех налогоплательщиков, равен $S = N \int\limits_0^\infty t(x)xf(x)dx$. Если $t(x) = const$, то получим равномерную шкалу налогообложения:$S = N\int\limits_0^\infty Constxf(x)dx = ConstN\mu^*$. В настоящее время в России ставка 13%, поэтому $S_R = 0.13N\mu^*$. Плотность распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}exp\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2^{\sigma^2}}\}$, где $\sigma \geqslant 0$. Математическое ожидание и дисперсия имеют вид:

$$\mu^* = M(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}, s = (\sigma^*)^2 = D(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}. \quad (1)$$

Для определения границ изменения суммы сбора налога, в зависимости от параметра определяющего разброс воспользуемся правилом "трех сигм"для нормально распределенной случайной функции $\ln x$. Получаем неравенство $\ln x \leqslant \mu + 3\sigma$, или $x \leqslant exp(\mu + 3\sigma)$. В относительном измерении к среднему доходу по формуле (2) получаем $x/\mu^* \leqslant (\sigma(3 - \sigma/2))$. Максимум параболы в правой части неравенства $\sigma(3 - \sigma/2)$ достигается в точке $\sigma = 3$ и равен 4.5. Граница относительного роста:

$$x/\mu^* \leqslant (\sigma(3 - \sigma/2)) \leqslant exp(4.5) \approx 90. \quad (3)$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00614-а.

Вывод. Формула (3) дает важную информацию. Для легальных доходов, распределенных по логнормальному закону сумма дохода должна не превосходить среднюю величину дохода в 90 раз. Вернее вероятность такого события почти равна единицы. Так как согласно работам [1,2] именно логнормальное распределения характеризует легальные доходы населения в настоящее время в районах РФ, то превышение этой границы можно считать косвенным указанием на возможные нетрудовые доходы рассматриваемого физического лица. Интересным фактом, что для возможной проверки легальности доходов налоговыми органами работниками СССР шестидесятых годов было превышение в 100 раз минимальной заработанной оплаты труда в определенной сфере деятельности. Что в определенной мере совпадает с формулой (3).

Литература

1. Скрыль С.В., Тростянский С.Н. Безопасность социоинформационных процессов. Теория синтеза прогностических моделей. - Воронеж: Воронежский институт МВД России, 2008. - с.155.

2. Колмаков И.Б. Прогнозирование показателей дифференциации денежных доходов населения // Проблемы прогнозирования. - 2006. - №1. - С.136-162.

К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ СХЕМ ОПТИМАЛЬНЫХ МАРШРУТОВ ПАТРУЛИРОВАНИЯ В РАЙОНАХ МЕГАПОЛИСОВ[1]

Родин В.А., Думачев В.Н. (Воронеж)

В докладе для построения оптимальной схемы движения маршрутов патрулирования в крупном городском районе применяется подход учитывающий разветвленность и насыщенность (фрактальность [1]) сети улиц в разных частях района. Подход напоминает схему Хака [2] для изучения фрактальных явлений в бассейнах рек. Список объектов находящихся в данном районе порождает "карту важности", которая описывается матрицей A. В свою очередь насыщенность и искривленность улиц (фрактальность) разных территорий района описывается "картой фрактальности". Ей соответствует матрица B. Перемножая поэлементно эти матрицы, получаем "карту важности и сложности района". По этой карте определяется сеть маршрутов патрулирования разной значимости. Частично тема раскрывалась на конференции [3].

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00614-а.

Литература

[1] Dumachev, V.N. Rodina E.V, Rodin V.A. Typology and Conformity to Natural Laws of "Chaotic City" Development (Tokyo, New York) // Resource Architecture 71, UIA Berlin 2002. XXI World Congress of Architecture, White Book , Annex: The Future of Ach. P. 45-48.

[2] Федер Е. Фракталы. Москва. Мир. 1991. 260 с.

[3] Dumachev, V.N. Rodina E.V, Rodin V.A. Methods and Principles of Police Deployment within "Chaotic"Urban Structure // Materials of the University Collage of London, (2003), Volume 2, p. 410-419.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ДИРАКА В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Романова Е.Ю. (Воронеж)

vsu.romanova@gmail.com

Пусть $L_p = L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$, пространство Соболева $W_p^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2) = \{y \in \mathcal{L}_p([0,2\pi],\mathbb{C}^n), p \geqslant 1 : y$ абсолютно непрерывна и $\dot{y} \in \mathcal{L}_p([0,2\pi],\mathbb{C}^n)\}$

Рассмотрим оператор Дирака $L : D(L) \subset L_p \to L_p$

$$L = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} - v, v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}, t \in [0,2\pi],$$

где $P, Q \in L_1([0,2\pi],\mathbb{C}^1)$. Область определения $D(L)$ определяется периодическим краевым условием $x(0) = x(2\pi)$[1], где $x \in W_p^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$.

Если $v = 0$ (нулевой потенциал), то будем использовать запись L^0(свободный оператор).Таким образом, $L = A - B$, где B - оператор умножения на потенциал v, а $A = L^0$.

Для исследования спектральных свойств оператора Дирака используется метод подобных операторов [1]. Основные результаты содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. Исследуемый оператор является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N, \lambda_{N+1}, ...$ оператора L,что

$$\lim_{n\to\infty} \mid \lambda_n - n \mid = 0, n \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через P_n - проектор Рисса, отвечающий собственному значению n свободного оператора Дирака,$\widetilde{P}_n$ - проектор Рисса, отвечающий собственному значению λ_n оператора L.

Теорема 2. Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов L и L^0 :

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_n - P_n\| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} (1 - \frac{|k|}{n})\widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} (1 - \frac{|k|}{n}) P_k\| = 0.$$

Литература

[1]*Баскаков А.Г. Дербушев А.В. Щербаков А.О.*Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Известия Российской Академии Наук .сер.матем.- 2011 - Т.75. - №3 - С.3-28.

ВЕЙВЛЕТ- И DFA-АНАЛИЗ ВАРИАБЕЛЬНОСТИ РИТМА СЕРДЦА

Рудалев В.Г., Сереженко Н.П., Коптев А.В. (Воронеж)

rud_wl@mail.ru

Актуальным направлением приложений математических методов в медицине является анализ вариабельности сердечного ритма (ВСР). ВСР измеряется по так называемой ритмограмме, представляющей собой числовую последовательность длин интервалов между R-зубцами ЭКГ. Основной проблемой является выбор критериев ВСР, которые могут служить статистическими обоснованными диагностическими показателями.

Показатели на базе быстрого преобразования Фурье (БПФ) плохо отслеживают кратковременные скачкообразные изменения ритма и могут давать одинаковые результаты для различных клинических групп. Поэтому представляется перспективным совместное применение наряду с БПФ альтернативных подходов – вейвлет-анализа и анализа флуктуаций после удаления тренда (DFA).

В докладе исследуются свойства стандартного среднеквадратического отклонения флуктуаций ритма от линейного тренда (метод DFA) и стандартного отклонения вейвлет-преобразования как функции выбранной шкалы. Дополнительно рассчитываются скейлинговые отклонения DFA α_{DFA} и вейвлет-преобразования α_{WAV}, не зависящие от выбранной шкалы.

Упомянутые показатели рассчитывались для больных с гипертонической болезнью, протекающей на фоне хронического аутоиммунного тиреоидита. Наибольшие значения α_{DFA} встретились, в частности, в клинической группе больных с сочетанием артериальной гипертензии и аутоиммунной патологией щитовидной железы. Анализ α_{WAV} позволил выявить статистически значимые различия в группах с явлениями скрытой сердечной недостаточности. Корреляционный анализ показал тесную зависимость между уровнем гормонов щитовидной железы и значениями α_{WAV} и α_{DFA}.

Выявленные закономерности позволяют изучать особенности регуляторных меанизмов СР и могут быть использованы для оценки тяжести заболевания и эффективности проводимого лечения.

К РАЗРУШЕНИЮ КРУГОВОЙ СИММЕТРИИ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

Сапронова Т.Ю. (Воронеж)
tsapr@mail.ru

Задачу описания раскладов бифурцирующих экстремалей в вырожденной критической точке функции часто можно решать, опираясь на *принцип разрушения непрерывной симметрии* [1,2]. В результате применения такого подхода возникает задача описания критических точек полиномов на гладких многообразиях.

1. Экстремали возмущенных функционалов при разрушении непрерывной симметрии.

Рассмотрим $V(x,\varepsilon)$ — гладкое семейство гладких фредгольмовых индекса ноль функционалов на банаховом пространстве E, $\varepsilon \in \mathbf{R}^q$, E непрерывно вложено в гильбертово пространство H.

Пусть на пространстве H задано ортогональное действие группы Ли G, причем пространство E и «невозмущенный» функционал $V_0(x) = V(x,0)$ инвариантны относительно этого действия, а «возмущенный» функционал $V_\varepsilon(x) = V(x,\varepsilon)$ (при $\varepsilon \neq 0$) не является инвариантным (происходит *разрушение непрерывной симметрии*). И пусть L — компактная морсовская критическая орбита инвариантного функционала V_0 с индексом Морса m. Рассмотрим функцию $\tilde{W}(\xi,\sigma^0) = \sum\limits_{i=1}^{q} {\sigma^0}_i V_i(\xi)$, где $V_i = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i}(\cdot,0)$, σ^0 — некоторая фиксированная точка из $\mathbf{R}^q \backslash \{0\}$, $\xi \in L$.

Теорема. *Пусть $a_0 \in L$ — морсовская критическая точка индекса l функции $\tilde{W}(\xi,\sigma^0)$, $\xi \in L$. Тогда при всех достаточно малых $\delta \in \mathbf{R}$ функционал $V_{\delta\sigma^0}$ имеет изолированную морсовскую критическую точку $a(\delta) = a_0 + O(\delta) \in L_{\delta\sigma^0}$ индекса $l+m$.*

Замечание. Функция $\tilde{W}(\xi,\sigma^0)$ называется *порождающей*.

Таким образом, при несимметричных возмущениях функционала V_0 *от морсовских критических точек порождающей функции отходят ветви изолированных экстремалей возмущенного функционала* $V_{\delta\sigma^0}$.

2. Примеры полиномов с разрушенной симметрией.

Имеются примеры «стандартных» (модельных) полиномов [2,3], интерпретируемых как полиномы с разрушенной сферической симметрией, в которых анализ ветвления критических точек можно проводить композицией симметричного анализа (то есть поиска морсовских критических орбит «невозмущенной» части полинома) и анализа «возмущающих» полиномов на критических орбитах. Такой подход позволяет пролить новый свет на механизм зарождения разнообразных комбинаций критических точек.

В случае *двух переменных* достаточно часто встречаются функции вида $|\xi|^4 + \delta|\xi|^2 + \varepsilon_3\xi_1^2\xi_2^2 + \varepsilon_1\xi_1^2 + \varepsilon_2\xi_2^2$ и вида $|\xi|^6 + \delta_2\,|\xi|^4 + \delta_1\,|\xi|^2 + \varepsilon_4\,\xi_1^2\xi_2^2\,|\xi|^2 + \varepsilon_3\,\xi_1^2\xi_2^2 + \varepsilon_1\xi_1^2 + \varepsilon_2\xi_2^2$, $\xi := (\xi_1, \xi_2)^\top$, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ (случаи разрушения *круговой симметрии*).

Для уравнений равновесных сегнетоэлектрических фаз в кристаллах (с *трехмерным* вырождением) появляются полиномы

$$\sigma_1^2 + \varepsilon\,\sigma_2 - \delta\,\sigma_1, \qquad \sigma_1^3 + \varepsilon_1\,\sigma_1\sigma_2 + \varepsilon_2\,\sigma_1^2 + \varepsilon_3\,\sigma_2 - \delta\,\sigma_1,$$

$$\sigma_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad \sigma_2 = \xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3^2 + \xi_2^2\xi_3^2$$

(разрушение *сферической симметрии* с сохранением симметрии куба).

Если рассмотреть, например, полином двух переменных $|\xi|^4 - \delta|\xi|^2 + \varepsilon\,\xi_1^2\xi_2^2$, обладающий при $\varepsilon = 0$ круговой симметрией (инвариантен относительно стандартного действия $SO(2) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$), то, как показывают вычисления, на критической окружности появляются восемь критических (порождающих) точек — четыре минимума и четыре седла. Из порождающих точек выходят ветви критических точек после разрушения круговой симметрии.

В случае полинома трех переменных $\sigma_1^2 + \varepsilon\,\sigma_2 - \delta\,\sigma_1$ возникает задача описания (условных) критических точек полинома $\sigma_2 = \xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3^2 + \xi_2^2\xi_3^2$ на двумерной сфере $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$. В результате несложных вычислений получается максимальный расклад (на критической сфере), состоящий из восьми минимумов, шести максимумов и двенадцати седел.

Литература

1. *Сапронова Т.Ю.* О методе квазиинвариантных подмногообразий в теории фредгольмовых функционалов // Топологические методы нелинейного анализа / Воронеж, 2000. – С. 107–124.

2. *Сапронова Т.Ю., Швырева О.В.* Использование разрушения сферических симметрий и краевых особенностей функций в вариационных задачах // Математические модели и операторные уравнения / Воронеж. гос. ун–т. – 2011. – Т. 7 – С. 178–192.

3. *Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л.* Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2004. – Т. 12 – С. 3–140.

СПИРАЛЕОБРАЗНЫЕ ОКРЕСТНОСТИ МЕРОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Сижук Т.П. (Ставрополь)

sv47@mail.ru

Пусть Σ – класс мероморфных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций с лорановским разложением

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k. \qquad (*)$$

Обозначим через $\Sigma(\lambda)$, $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ и фиксировано, класс функций из Σ удовлетворяющих в E условию $Re\left\{e^{i\lambda} z f'(z)/f(z)\right\} > 0$. По сложившейся терминологии функции класса $\Sigma(\lambda)$ называют спиралеобразными. Такие функции однолистны в E.

Следуя [1, 2] назовём δ-окрестностью $N_\delta(f)$ функции $f(z)$ из Σ с разложением (*) множество функций

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$$

из Σ, для которых $\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k - b_k| \leqslant \delta$, $\delta > 0$.

Понятие δ-окрестности голоморфной функции в E введено в работе [1], а в работе [2] оно распространено на мероморфные функции и найдены достаточные условия звездообразности δ-окрестностей функций из Σ. В данной работе изучается вопрос о спиралеобразности δ-окрестностей функций класса Σ. Доказана

Теорема. *Если $f(z) \in \Sigma$ и $|z(f(z) * h_\Theta(z))| \geqslant C > 0$ в E, где*

$$h_\Theta = \frac{1}{z} + \frac{e^{-i\Theta}}{2cos\lambda}\left[(e^{i\lambda} + e^{i(\Theta-\lambda)})\frac{z}{1-z} + (e^{i\lambda} - e^{i(\Theta+\lambda)})\frac{z}{(1-z)^2}\right],$$

$0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi$, $*$ *– операция свёртки Адамара, то* $N_\delta(f) \subset \Sigma(\lambda)$, $\delta = c(1 + |sin\lambda|)^{-1} cos\ \delta$.

Литература

1. *Ruscheveyh Stephan.* Neighborhoods of univalent functions // Proc.Amer.Math.Soc. 1981. V.81. No4. P.521-527.

2. *Сижук П.И., Сижук Т.П.* Звездообразные и почти выпуклые окрестности мероморфных функций // Вестник Томского гос. университета. Математика и механика. 2009. №2(6). С.67-70.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

simonov-b2002@yandex.ru

Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \qquad (2)$$

Пусть $\varphi(u)-$ неотрицательная функция, определенная для $u \geqslant 0$. Будем говорить, что $2\pi-$ периодическая измеримая функция $f(x)$ принадлежит классу L_φ, если $\varphi(|f(x)|)$ интегрируема на $(0, 2\pi)$.

Через Φ обозначим совокупность неотрицательных на $[0, +\infty)$ функций $\varphi(x)$, почти возрастающих и удовлетворяющих Δ_2- условию.

Для последовательности коэффициентов $\{a_n\}$ определим $\Delta_{1,r} a_n = a_n - a_{n+r}$ и $\Delta_{2,r} a_n = \Delta_{1,r}\big(\Delta_{1,r} a_n\big) = a_n - 2a_{n+r} + a_{n+2r}$. Пусть заданы $r \in N$ и последовательность $\{a_n\}$. Скажем, что последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет *условию* $M_{1,r}$, если $\Delta_{1,r} a_n \geqslant 0$ для всех n или $\Delta_{1,r} a_n \leqslant 0$ для всех n; удовлетворяет *условию* $M_{2,r}$, если $\Delta_{2,r} a_n \geqslant 0$ для всех n или $\Delta_{2,r} a_n \leqslant 0$ для всех n.

Пусть заданы число $r \in N$ и последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Будем говорить, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$

удовлетворяют *условию* PM_r, если $\Delta_{1,r} a_n \geqslant 0$ для всех n и $\Delta_{1,r} b_n \leqslant 0$ для всех n или, наоборот, $\Delta_{1,r} a_n \leqslant 0$ для всех n и $\Delta_{1,r} b_n \geqslant 0$ для всех n;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00169) и Программы Поддержки Ведущих Научных Школ (проект НШ 979-2012-1)

удовлетворяют *условию* OM_r, если $\Delta_{1,r}a_n \geqslant 0$ для всех n и $\Delta_{1,r}b_n \geqslant 0$ для всех n или, наоборот, $\Delta_{1,r}a_n \leqslant 0$ для всех n и $\Delta_{1,r}b_n \leqslant 0$ для всех n.

Для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ и некоторого условия А определим индикатор его выполнения следующим образом: $\chi_{\text{усл.А}}(\{a_n\},\{b_n\}) = 1$, если последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ удовлетворяют условию А, и $\chi_{\text{усл.А}}(\{a_n\},\{b_n\}) = 0$ в противном случае.

Лемма 1. Пусть $r \in N$; $m \in Z$; $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, где a_n- коэффициенты ряда (1); $\{a_{nr}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{a_{nr+[\frac{r}{2}]}\}_{n=0}^{\infty}$ при четных r удовлетворяют условию $M_{2,r}$. Кроме того, при $r > 2$ для каждого значения $k = 1, 2, ..., [\frac{r-1}{2}]$ подпоследовательности $\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условию PM_r или следующему условию: соответствующая этому k разность $\{a_{nr+k} - a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $M_{1,r}$, а сумма $\{a_{nr+k} + a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $M_{2,r}$. Тогда ряд (1) сходится п. в. и функция $f(x+m\frac{2\pi}{r})$ ($f(x)$– сумма ряда (1)) может быть почти всюду представлена в виде

$$f(x + m\tfrac{2\pi}{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{2,r}a_{nr}B_n^2(rx) + \left([\tfrac{r}{2}] - [\tfrac{r-1}{2}]\right)\cos m\pi \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{2,r}a_{nr+[\frac{r}{2}]}BC_n^2(\tfrac{rx}{2}) + \operatorname{sign}\left[\tfrac{r-1}{2}\right] \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]} \Big\{ \cos(km\tfrac{2\pi}{r} + (2k-r)\tfrac{x}{2})\Big\{\chi_{\text{усл.}PM_r}(\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty},$$

$$\{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}) \sum_{n=0}^{\infty}(\Delta_{1,r}a_{nr+k} + \Delta_{1,r}a_{nr+r-k}) \cdot$$

$$\cdot BC_n^1(\tfrac{rx}{2}) + (1-\chi_{\text{усл.}PM_r}(\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty}, \{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty})) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{2,r}(a_{nr+k} + a_{nr+r-k})BC_n^2(\tfrac{rx}{2})\Big\} +$$

$$+ \sin(km\tfrac{2\pi}{r} + (2k-r)\tfrac{x}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{1,r}(a_{nr+k} - a_{nr+r-k})\overline{BC}_n^1(\tfrac{rx}{2})\Big\}.$$

Лемма 2. Пусть $r \in N$; $m \in Z$; $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, где a_n- коэффициенты ряда (2); $\{a_{nr}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{a_{nr+[\frac{r}{2}]}\}_{n=0}^{\infty}$ при четных r удовлетворяют условию $M_{1,r}$. Кроме того, при $r > 2$ для каждого значения $k = 1, 2, ..., [\frac{r-1}{2}]$ подпоследовательности $\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условию OM_r или следующему условию: соответствующая этому k сумма $\{a_{nr+k} + a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $M_{1,r}$, а разность $\{a_{nr+k} - a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $M_{2,r}$. Тогда ряд (2) сходится п. в. и функция $g(x+m\frac{2\pi}{r})$ ($g(x)$– сумма ряда (2)) может быть почти всюду представлена в виде

$$g(x + m\tfrac{2\pi}{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{1,r} a_{nr} \overline{B}_n^1(rx) + ([\tfrac{r}{2}] - [\tfrac{r-1}{2}]) \cos m\pi \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{1,r} a_{nr+[\frac{r}{2}]} \overline{BC}_n^1(\tfrac{rx}{2}) + \operatorname{sign}\Big[\tfrac{r-1}{2}\Big] \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]} \Big\{ \cos(km\tfrac{2\pi}{r} + (2k-r)\tfrac{x}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{1,r}(a_{nr+k} + a_{nr+r-k}) \overline{BC}_n^1(\tfrac{rx}{2}) + \sin(km\tfrac{2\pi}{r} + (2k-r)\tfrac{x}{2}) \cdot$$

$$\cdot \Big\{ \chi_{\text{усл.}OM_r}(\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty}, \{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta_{1,r} a_{nr+k} - \Delta_{1,r} a_{nr+r-k}) BC_n^1(\tfrac{rx}{2}) +$$

$$+ (1 - \chi_{\text{усл.}OM_r}(\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty}, \{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty})) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{2,r}(a_{nr+k} - a_{nr+r-k}) BC_n^2(\tfrac{rx}{2}) \Big\} \Big\}.$$

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ В КЛАССАХ L_φ[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

simonov-b2002@yandex.ru

Теорема 1. Пусть $\varphi \in \Phi$; $r \in N$; $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, где a_n- коэффициенты ряда (1); $\{a_{nr}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{a_{nr+[\frac{r}{2}]}\}_{n=0}^{\infty}$ при четных r удовлетворяют условию $M_{2,r}$. Кроме того, при $r > 2$ для каждого значения $k = 1, 2, ..., [\frac{r-1}{2}]$ подпоследовательности $\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условию PM_r или следующему условию: соответствующая этому k разность $\{a_{nr+k} - a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $M_{1,r}$, а сумма $\{a_{nr+k} + a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $M_{2,r}$. Тогда ряд (1) сходится п. в. и

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f(x)|)dx \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(|\Delta_{1,r} a_{nr}|(n+1)^2)(n+1)^{-2} + ([\tfrac{r}{2}] - [\tfrac{r-1}{2}]) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(|\Delta_{1,r} a_{nr+[\frac{r}{2}]}|(n+1)^2)(n+1)^{-2} +$$

$$\operatorname{sign}\Big[\tfrac{r-1}{2}\Big] \sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]} \Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(|a_{nr+k} - a_{nr+r-k}|(n+1))(n+1)^{-2} + (1 - \chi_{\text{усл.}PM_r}(\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty},$$

$$\{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty})) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(|\Delta_{1,r}(a_{nr+k} + a_{nr+r-k})|(n+1)^2)(n+1)^{-2} \Big\}.$$

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00169) и Программы Поддержки Ведущих Научных Школ (проект НШ 979-2012-1)

Теорема 2. Пусть $\varphi \in \Phi$; $r \in N$; $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, где a_n- коэффициенты ряда (2); $\{a_{nr}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{a_{nr+[\frac{r}{2}]}\}_{n=0}^{\infty}$ при четных r удовлетворяют условию $M_{1,r}$. Кроме того, при $r > 2$ для каждого значения $k = 1, 2, ..., [\frac{r-1}{2}]$ подпоследовательности $\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условию OM_r или следующему условию: соответствующая этому k сумма $\{a_{nr+k} + a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $M_{1,r}$, а разность $\{a_{nr+k} - a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $M_{2,r}$. Тогда ряд (2) сходится п. в. и

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(|g(x)|)dx \asymp \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_{nr}|n)n^{-2} + \left([\tfrac{r}{2}] - [\tfrac{r-1}{2}]\right) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_{nr-[\frac{r}{2}]}|n)n^{-2} + \operatorname{sign}[\tfrac{r-1}{2}] \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]} \Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(|a_{nr+k} + a_{nr+r-k}|(n+1))(n+1)^{-2} + (1 - \chi_{\text{усл.}OM_r}(\{a_{nr+k}\}_{n=0}^{\infty}, \{a_{nr+r-k}\}_{n=0}^{\infty})) \cdot$$
$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(|\Delta_{1,r}(a_{nr+k} - a_{nr+r-k})|(n+1)^2)(n+1)^{-2} \Big\}.$$

О КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТИ НАШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Скляднев С.А. (Воронеж)
prfa@main.vsu.ru

Падение качества образования в нашей стране бесспорно. И происходит это на фоне резкого роста числа преподавателей, имеющих ученые степени и звания, на фоне реализации программ модернизации образования, успешных и широкомасштабных научных исследований, на фоне внедрения новых образовательных технологий. Проводятся конференции, съезды, симпозиумы, существенно улучшается материально-техническое и информационное обеспечение учебного процесса. Но качество образования падает, «. . . .студенты приходят в состояние «самораспространяющейся псевдообразованности» и . . . .фактически наши выпуски специалистов в значительной мере являются обманом, липой и приписками: эти так называемые специалисты не в состоянии решить простейших задач, не владеют элементами своего ремесла» (В.И Арнольд)

Почему это происходит? Все дело в том, что мы, создавая рынок «образовательных услуг», полагались исключительно на «невидимую руку рынка». А на российском «рынке образовательных услуг» не только отсутствуют абсолютно все известные механизмы противодействия деструктивным тенденциям, но, в рамках действующего законодательства, эти механизмы и не могут быть созданы. А значит, закономерно, что « положение дел в образовании становится самой серьёзной угрозой нашей конкурентоспособности». И это утверждение не лозунг, а теорема, которая доказывается в рамках знаменитой модели Дж. Акерлофа о «рынке лимонов»

Следовательно, падение конкурентоспособности и падение качества нашего образования будут перманентно продолжаться до тех пор, пока на нашем «рынке образовательных услуг» не будут созданы соответствующие механизмы.

Заметим, что мы говорим не столько об угрозе конкурентоспособности нашего образования сколько об угрозе конкурентоспособности нашей страны.

СПЕКТРЫ ЧАСТОТ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Смоленцев М.В. (Москва)

smihvic@rambler.ru

Во множестве $\mathcal{E}^n$ дифференциальных уравнений вида

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0;\infty),$$

с ограниченными непрерывными коэффициентами выделим подмножество $\mathcal{P}^n$ уравнений с *периодическими коэффициентами.*

Частоту (*нулей*) [1] функции $y\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ зададим формулой

$$\nu(y) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t}\nu(y,t),$$

где $\nu(y,t)$ – число нулей функции y на промежутке $(0;t]$. *Спектром частот* уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ назовем множество всех частот его ненулевых решений. Значение частоты ν, принадлежащее спектру частот уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, назовем *существенным* [2], если оно принимается на тех его решениях, начальные значения которых содержат множество положительной меры в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ существует уравнение $a \in \mathcal{P}^3$, спектр частот которого содержит не менее N существенных значений.*

Теорема 2. *Существует уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, спектр частот которого содержит счетное множество существенных значений.*

Замечание. Утверждения теорем 1, 2 нельзя распространить на уравнения второго порядка [1].

Теорема 3.(ср.[4]) *Существует уравнение* $a \in \mathcal{P}^3$, *спектр частот которого содержит целый отрезок числовой прямой.*

Литература

1. Сергеев И. Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.

2. Сергеев И. Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1661–1662.

4. Горицкий А. Ю., Фисенко Т. Н. Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 479–486.

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДВУМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ВЕКУА

Солиев Ю.

К настоящему времени существуют достаточно развитые численные и эффективные методы вычисления одномерных сингулярных интегралов. В то же время методы приближенного вычисления многомерных сингулярных интегралов разработаны гораздо хуже.

В работе для понимаемого в смысле главного значения по Коши сингулярного интеграла Векуа [1]

$$Sf = S(f;z) = \frac{1}{\pi} \int\int_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta,\ z \in G, \tag{1}$$

где G-круг $|z| < 1,\ z = x + iy,\ \zeta = \xi + i\eta$, построены и исследованы ряд интерполяционных кубатурных формул.

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом $P_n(z) = P_n(f;z)$ степени не выше n, удовлетворяющий условиям

$$P_n^{(l)}(f;z_k) = f^{(l)}(z_k),\ l = \overline{0, \alpha_k - 1},\ k = \overline{1, m},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n + 1,\ z_k \in G,\ k = \overline{1, m},$$

получим кубатурную формулу

$$Sf = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\alpha_k - 1} f^{(l)}(z_k) \frac{1}{l!} \sum_{s=0}^{\alpha_k - l - 1} C_s^{(k)}$$

$$\sum_{v=1}^{n+1+l+s-\alpha_k} a_v^{nk}((v-1)z^{v-2} - vz^{v-1}\overline{z}) + R_n(f;z), \qquad (2)$$

где a_v^{nk} - коэффициенты разложения $A(z)(z-z_k)^{l+s-\alpha_k}$ по степеням z, а $R_n(f;z)$ - остаточный член.

Рассмотрены некоторые частные случаи формулы (2). Приведем один из результатов.
С помощью свойств сингулярного оператора Sf ([1], [2]) доказывается, что если в (2)
$\alpha_k = 1,\ k = \overline{1,m},\ f(z) \in H_\alpha^{(r)}(M)\ (r = 0,1,...,0 < \alpha < 1),\ z_k = e^{i\Theta_k},\ \Theta_k = \frac{2k-1}{n}\pi,\ k = 1,2,...,n,$
то справедлива оценка

$$|R_n(f;z)| = M \cdot O\left(\frac{lnn}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Литература

1. *И.Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции. М., 1998.

2. *А.Я. Исмаилов, М. Мансуров, В.В. Салаев.* О сингулярном интеграле теории аналитических функций по Векуа. ДАН СССР, 1974, 215, №5 , 1041-1044.

ОПЕРАТОР ДИРАКА В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ КВАНТОВАНИЕ СПИНОРНОГО МОДУЛЯ

Старинец В.В. (Москва)

vstarinets@mail.ru

Рассматриваются J-самосопряженные операторы $\hat{\mathbb{D}}$ и $\grave{\hat{\mathbb{D}}}$, отвечающие дифференциальным выражениям $\mathbb{D} = i\gamma_\mu\partial^\mu$ и $\grave{\mathbb{D}} = i\grave{\gamma}_\mu\partial^\mu$ ($\grave{\gamma}_\mu = \gamma_5\gamma_\mu$) в пространствах Крейна $\mathcal{S}(\mathbb{B})$ и $\grave{\mathcal{S}}(\mathbb{B})$ ($\mathbb{B} = \mathbb{R}\times(\mathbb{R}_3^+ \cup \mathbb{R}_3^-)$) с индефинитной метрикой $[f,g] = \mathrm{Reg}\int_{\mathbb{B}} \bar{g} f\, d^4x$ ($\bar{g} = g^*\gamma^0$). В линеалах $\mathcal{S}_\lambda(\mathbb{B}_\lambda) = \mathrm{Lin}\{F(p;x), \bar{F}(p;x)\}_\lambda$ и $\grave{\mathcal{S}}_\lambda(\grave{\mathbb{B}}_\lambda) = \mathrm{Lin}\{F(p;x), \grave{\bar{F}}(p;x)\}_\lambda$, отвечающих собственному значению $\lambda = m_0$ и соответственно $p^2 = \pm\lambda^2$, проводится квантование амплитуд разложений решений $\Psi(x)$ уравнений $(\mathbb{D} - m_0)\Psi(x) = 0$ и $(\grave{\mathbb{D}} - m_0)\Psi(x) = 0$ по «плоским» волнам из $\mathcal{S}_\lambda(\mathbb{B}_\lambda)$ и $\grave{\mathcal{S}}_\lambda(\grave{\mathbb{B}}_\lambda)$ (где $\mathbb{B}_\lambda$ — гиперповерхность $x_0 = \mathrm{const}$, а $\grave{\mathbb{B}}_\lambda$ — $r = \mathrm{const}$), являющихся пространствами Крейна с индефинитными метриками соответственно $[\psi, \varphi]_\lambda = \mathrm{Reg} \int_{\mathbb{B}_\lambda} d\sigma^\mu(x)\, \bar{\varphi}\gamma_\mu\psi$ и $[\psi, \varphi]_\lambda = \int_{\grave{\mathbb{B}}_\lambda} d\sigma^\mu(x)\, \bar{\varphi}\gamma_\mu\psi$. Различаются квантования следующих типов. 1. Простое параболическое и кратно-параболическое квантование (одномодульные состояния отвечают вещественным собственным числам операторов заряда Q и импульса P_μ и, в первом случае — одномерны и позитивны, во втором — образуют n-мерную невырожденную жорданову цепочку, либо пару нейтральных кососвязанных жордановых цепочек). 2. Эллиптическое квантование (одномодульные состояния отвечают вещественным собственным числам операторов Q и P_μ, одномерны и негативны. 3. Простое гиперболическое и кратно-гиперболическое квантование (парам комплексно сопряженных собственных чисел операторов Q и P_μ отвечают в первом случае пара нейтральных кососвязанных элементов, а во втором — пара соответствующих n-мерных кососвязанных нейтральных жордановых цепочек. Исследуются коммутационные соотношения и функции распространения для регулярных и сингулярных суперпозиций операторов спинорных модульных полей.

Литература

1. *Старинец В. В.* Сингулярные операторы Штурма—Лиувилля в пространствах с индефинитной метрикой. Ч. 1, 2. — М.: Изд-во МГУП, 2010.

2. *Старинец В. В.* Квантование скалярного модуля. // Вестник МГУП. 2012. Вып. 3. С. 45–187.

КОЛЬЦЕОБРАЗНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КАПИЛЛЯРНОСТИ

Стенюхин Л.В. (Воронеж)

stenyuhin@mail.ru

Задача о симметричо лежащей малой капли, эквивалентная задаче капиллярности, описывается уравнением

$$\mathrm{div}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\nabla u\right) = Bu, \tag{1}$$

$u = u(x, y)$ – функция высоты поверхности над уровнем основания, $B = \frac{\rho g a^2}{\sigma}$ – число Бонда, характеризующее размер капли, ρ – плотность, σ – поверхностное натяжение, a – радиус основания.

Граничное условие задачи –

$$n\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\nabla u\right)=\cos\gamma, \tag{2}$$

n – нормаль к поверхности, γ – угол контакта поверхности с границей; значение функции u на границе области равно нулю.

Аппроксимационно-аналитические решения задачи в различных условиях и при малых значениях числа Бонда приведены в [1]. Если число Бонда нарастает, то сходимость разложений нарушается или расходится с эксперементальными данными. Увеличение числа возможно за счёт увеличения давления или температуры, то есть некоторого потенциала φ. Для больших чисел Бонда задача остаётся открытой.

Получена следующая

Теорема 1. *Если $B=\cos\gamma_0\equiv\cos\gamma+\frac{\varphi}{\sigma}$, то существует точное аналитическое решение задачи (1) – (2) вида*

$$u(r)=\frac{-\cos\gamma_0+\sqrt{1-(r-r_0)^2\sin^2\gamma_0}}{\sin\gamma_0}, \tag{3}$$

r_0 *– радиус кольца.*

Литература

[1] Финн Р. *Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория* (Мир, М., 1989)

О СУЩЕСТВОВАНИИ УСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Степанов А.В. (Санкт-Петербург)
stepanov17@yandex.ru

Рассмотрим нелинейную систему разностных уравнений в $\mathbb{R}^n$:

$$x_{k+1}=\sum_{j=0}^{m}A^{(j)}x_{k-j}+u\left(\sigma(x_{k-m})\right), \tag{1}$$

здесь $k\geqslant k_0$ — целочисленный индекс, $A^{(j)}$ — вещественные матрицы размерности $n\times n$, значения $x_{k_0-m},\ \ldots,\ x_{k_0}$ считаем известными. Предположим, что $\sigma:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — линейная функция, а отображение u имеет конечное множество значений в $\mathbb{R}^n$, и каждая из компонент u кусочно-постоянна и ограниченна.

Обозначим D_u множество точек разрыва суперпозиции $u(\sigma)$. По аналогии с [1], назовем произвольное решение x_k системы (1) грубым, если $\rho(D_u, \Omega) = \delta > 0$, где Ω — множество ω-предельных точек данного решения.

Теорема 1. *Если нулевое решение однородной системы*

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} A^{(j)} y_{k-j}$$

экспоненциально устойчиво, то любое грубое решение системы (1) сходится при $k \to \infty$ к экспоненциально устойчивому периодическому решению этой системы.

Следствие. *Пусть, например, для заданного $\alpha > 1$ выполнено неравенство [2]*

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha^{j+1} \left\| A^{(j)} \right\| < 1,$$

тогда любое грубое решение системы (1) сходится при $k \to \infty$ к экспоненциально устойчивому периодическому решению этой системы.

Рассмотрим теперь случай переменного запаздывания в управлении u. Пусть

$$x_{k+1} = Ax_k + u\left(\sigma(x_{k-m_k})\right), \tag{2}$$

последовательность $\{m_k\} \subset \mathbb{Z}_+$ - почти периодическая.

Теорема 2. *Если $\|A\|_2 < 1$, то любое грубое решение системы (2) сходится при $k \to \infty$ к асимптотически устойчивому почти периодическому решению этой системы.*

Заметим, что утверждение остается справедливым, если рассмотреть почти периодическую последовательность матриц A_k вместо постоянной матрицы A. В этом случае придется потребовать равномерной асимптотической устойчивости соответствующей линейной однородной системы

$$y_{k+1} = A_k y_k.$$

Аналогичный результат справедлив и в более сложном случае, когда величина запаздывания зависит от текущего состояния системы:

$$x_{k+1} = Ax_k + u\left(\sigma(x_{k-g(k,\sigma_2(x_k))})\right);$$

здесь функция g ограниченная, почти периодическая (равномерно относительно σ_2), удовлетворяет при любом k тем же требованиям, что и u, и принимает неотрицательные целочисленные значения. В этом случае результат Теоремы 2 остается справедливым, если уточнить определение грубости решения:

$$\rho(D_u \cup D_g, \Omega) = \delta > 0,$$

где D_g — множество точек разрыва суперпозиции $g(\sigma_2)$.

В принципе, здесь можно ограничиться требованием непрерывности σ_2.

Литература

[1] *Косякин А. А., Шамриков Б. М.* Колебания в цифровых автоматических системах. М.: Наука, 1983. — 334 с.

[2] *Stojanovic S., Debeljkovic D.* Exponential Delay-Dependent Stability for Linear Discrete Time Delay Systems, Zbornik radova Tehnoloskog fakulteta u Leskovcu, No. 19, 2009, pp. 185-191.

ОПТИМИЗАЦИЯ СОСТАВА КОМПОЗИТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОТХОДОВ ПРОМЫШЛЕННОСТИ И ЛЕСНОГО КОМПЛЕКСА

Стородубцева Т.Н., Томилин А.И., Аксомитный А.А.
(Воронеж)

В соответствии с принятой концепцией исследований созданы на уровне изобретения новые композиционные материалы в которых использованы местное сырье и отходы промышленности, лесного комплекса и сельского хозяйства; отходы химической промышленности.

Нами исследовались зависимости пределов прочности — $\sigma_{\text{чи}}$ и $\sigma_{\text{сж}}$, модулей упругости — $E_{\text{чи}}$ и $E_{\text{сж}}$, и предельной растяжимости $\varepsilon_{\text{р}}$ от конкретного содержания компонентов, вводимых в состав матрицы древесностекловолокнистого композита [1,2]. Так, испытывали серии образцов вводя 1; 2; 3; 4; 5 и 6 % графитовой муки от ее массы, кроме того — контрольную серию без нее. Число образцов серии на каждую экспериментальную точку при всех видах испытаний равнялось трем, затем подсчитывалось среднее арифметическое значение характеристик. Таким образом, был испытан 21 образец. Результаты экспериментов обрабатывали на ЭВМ, используя разработанную для этого программу, представляя зависимости полиномами третьей степени [3] и выявляя границы «зоны благоприятных свойств» [2] получаемых промежуточных композитов при введении этого модифицирующего наполнителя.

Было выявлено, что введение модифицирующих наполнителей — муки из графита и пиритовых огарков либо повышает значение характеристик, в особенности предельную растяжимость – до 0,53 . . . 0,57% и прочность при изгибе до 24 МПа, либо сохраняет их на уровне характеристик песчаной матрицы. Введение замедлителя реакции кристаллизации (ЗРК) уменьшает значения модулей упругости композита, что приближает полученный материал к эталонному — древесине. Армирование стеклосеткой полимерраствора и, в целом, СВКМ делает эти материалы почти идеальными с точки зрения прочности и жесткости, но стеклосетка дорога, поэтому не имеет смысла размещать ее по всей высоте сечения и, кроме того, возникают сложности с технологией отливки шпалы даже при увеличении количества смолы ФАМ в составах. При армировании полимерраствора только кусковыми отходами лесопиления – щепой, ее влияние положительно сказывается на прочности при изгибе этого вида ДСВКМ (16,7 МПа), но предельная растяжимость низкая – 0,17%.

При одновременном введении в состав всех перечисленных компонентов, за счет синергетических эффектов, получен композиционный материал с механическими характеристиками, практически соответствующими или превышающими заданные ВНИИЖТ МПС. Так прочность при изгибе повысилась в 2 раза, предельная растяжимость – в 19 раз, а величины модулей упругости и массы снизились в 1,2 . . . 1,7 раза. Единственный недостаток — некоторое увеличение расхода смолы ФАМ (33,6 кг), который может быть уменьшен за счет введения в состав щебня.

Для сравнения с изложенным выше методом был применен статистический метод планирования активного эксперимента [4], который является одним из эмпирических способов получения математического описания статики сложных объектов исследования, т.е. уравнения связи отклика объекта Y и независимых управляемых нормированных входных переменных (факторов — X_i, $i = 1, 2, \ldots, N$). При этом математическое описание представляется в виде полинома – отрезка ряда Тейлора, в который разлагается исследуемая зависимость в окрестности оптимума.

В качестве критерия оптимизации принимали пределы прочности — $\sigma_{\text{чи}}$, $\sigma_{\text{сж}}$, и модули упругости — $E_{\text{чи}}$, $E_{\text{сж}}$, которые представляли функциями Y_1; Y_2; Y_3; Y_4; в качестве факторов X_1 — содержание графитовой муки (Гр); X_2 — содержание пиритовой муки (ПО); X_3 — содержание стеклосетки (СС); X_4 — содержание кусковых отходов лесного комплекса (Щ) в композите, которые вводили в принятый постоянный состав полимерной песчаной матрицы.

Каждая из функций Y_1; Y_2; Y_3; Y_4 описывается некоторой зависимостью от факторов X_1, X_2, X_3, X_4. Анализ показывает, что данная зависимость может быть представлена в виде полинома второго порядка, с достаточной точностью описывающие поведение объекта в окрестности экстремальной точки (в «почти стационарной» области). Для получения квадратичных моделей использовали результаты эксперимента, проведенного по плану второго порядка.

Так как выполняли условия: ошибки наблюдений распределены по нормальному закону с нулевым средним и конечной дисперсией; входные переменные измеряли без ошибок; наблюдения независимы, поэтому для обработки экспериментальных данных применяли метод регрессионного анализа, причем вычислительная процедура оценивания неизвестных коэффициентов уравнения регрессии основана на методе наименьших квадратов.

В практике постановки подобных исследований наиболее широкое применение получили ортогональные, ротатабельные и D-оптимальные планы. Для нашего случая был выбран ротатабельный план, так как он позволяет получать уравнения регрессии, предсказывающие значения выходной величины объекта с одинаковой точностью во всех направлениях на одинаковом расстоянии от центра плана.

Проверку адекватности математического описания производили с использованием F-критерия Фишера. Критерий Фишера позволяет проверить гипотезу об однородности двух выборочных дисперсий $S^2_{\text{ад}}$ и $S^2_{\text{вос}}$, где $S^2_{\text{ад}}$ — дисперсия адекватности, а $S^2_{\text{вос}}$ — дисперсия воспроизводимости.

При уровне значимости равной 0,05 для степеней свободы $v_1 = 16 - 4 = 12$ и $v_2 = 16(3 - 1) = 32$ критическое значение критерия Фишера равно 2,26. Эмпирическое значение для функций Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 соответственно равно 2,11, 2,21, 1,98 и 1,95. Так как эмпирическое значение меньше критического, то данная гипотеза является адекватной.

Точки соответствующие значению 2 и -2 — это $X_1 = 6{,}0$ и 2,0; $X_2 = 6{,}0$ и 2,0; $X_3 = 6{,}0$ и 2,0; $X_4 = 18$ и 0 в кодовом представлении.

Используя стандартные методы определения коэффициентов уравнения регрессии, получили:

$$\sigma_{\text{чи}} = f(X_1, X_2, X_3, X_4) = 30\text{МПа};$$
$$\sigma_{\text{сж}} = f(X_1, X_2, X_3, X_4) = 48\text{МПа};$$
$$E_{\text{чи}} \cdot 10^{-4} = f(X_1, X_2, X_3, X_4) = 1{,}42 \cdot 10^4\text{МПа};$$
$$E_{\text{сж}} \cdot 10^{-4} = f(X_1, X_2, X_3, X_4) = 2{,}23 \cdot 10^4\text{МПа}.$$

Используя стандартные методы исследования полиномов получили максимальные значения целевых функций, значения аргументов приведены в таблице.

Таблица Составы и характеристики композита, полученные по уравнениям регрессии*)

№ состава	Содержание компонентов				Характеристика
	X_1 (Гр)	X_2 (ПО)	X_3 (СС)	X_4 (Щ)	
	%				МПа
1	2	3	4	5	6
1	4,0	5,0	4,0	7,5	$Y_1 = \sigma_{\text{чи}} = 30$
2	3,0	5,0	4,0	1,0	$Y_2 = \sigma_{\text{сж}} = 48$
3	3,0	5,0	4,0	3,0	$Y_3 = E_{\text{чи}} = 1{,}42 \cdot 10^4$
4	3,0	4,5	4,0	4,0	$Y_4 = E_{\text{сж}} = 2{,}23 \cdot 10^4$

*)Примечание: при анализе регрессий учитывали составы, позволяющие получить положительные значения характеристик в виде полиномов второго порядка

В результате использования уравнений регрессии получены составы и характеристики композита, практически адекватные найденным с помощью предложенной аналитико-графической методики, основанной на применении полиномов третьей степени [3], о достоинствах которых уже говорилось. Кроме этого, необходимо фактическое подтверждение величин полученных характеристик путем эксперимента, так как зависимости не поддаются прямой оптимизации, а составы, соответствующие им, различны. При четырех факторах естественно не учтены смола ФАМ, БСК, глицерин, ОММ, ДСТ и песок, безусловно, влияющих на характеристики проектируемых КМ и синергетические эффекты.

Таким образом, нами использованы местное сырье и отходы промышленности, а именно: смола ФАМ, содержащая фурфурол, который получают из отходов лесного комплекса и сельского хозяйства; кусковые отходы переработки древесины; отходы химической промышленности – мука из пиритовых огарков и кубовые остатки производства бутадиенового каучука, а также отработанное машинное масло. Характеристики разрабатываемых композитов с позиций получены с применением формул науки о сопротивлении материалов, т.е. в пределах справедливости закона Р. Гука, на который эта наука опирается.

Исследованы зависимости основных механических характеристик полимерного песчаного раствора ФАМ (матрицы) от содержания в ней модифицирующих наполнителей (графитовая мука и мука из пиритных огарков), замедлителя реакции кристаллизации бензолсульфокислоты (глицерин – ЗРК) и армирующих заполнителей ДСВКМ (стеклосетка и кусковые отходы переработки древесины – щепа).

Выявлено, что эти зависимости могут быть представлены математическими моделями в виде полиномов третьей степени, что подтверждается минимальными значениями сумм квадратов отклонений. При этом получили физический смысл свободные члены полиномов, – значения характеристик полимерной песчаной матрицы, представляющих их, и вид кривых, отражающих суть процессов формирования необходимой структуры конечных композиционных материалов при введении в состав поочередно, а затем вместе, различных количеств структурообразующих компонентов.

Выявлено, что введение в базовый состав полимерного раствора ФАМ графитовой и пиритовой муки повышает прочностные и упругие характеристики наполненного композиционного материала, однако увеличение содержания графитовой муки в смеси приводит как бы к "смазке" частиц структуры отвержденного композита, их «скольжению» под нагрузкой. Такой же эффект наблюдается и при введении глицерина. Отказ от применения названных компонентов нежелателен: т.к. графитовая мука, введенная в оптимальных количествах, повышает прочность и водостойкость, а глицерин совершенствует технологический процесс отливки изделий из ДСВКМ, и, возможно, связывает фенол, выделяющийся из свободной БСК при ее обводнении.

Роль армирующего заполнителя – щепы из древесины сосны с длиной элементов $150\ldots210$ мм и условной площадью поперечного сечения 6 см^2 заключается в повышении изгибной прочности композита и снижении его массы. С этим связана необходимость ее высушивания до влажности $7\ldots8\%$, что, кроме этого, обеспечивает пропитку древесины олигомером ФАМ, который, проникая в поры древесины в процессе отливки, затем отверждается в ней, защищая от гниения. Однако, как показали дальнейшие исследования, такой защиты оказалось недостаточно.

Стеклосетка повышает изгибную прочность, предельную растяжимость и трещиностойкость композиционного материала, однако размещение ее по всей высоте поперечного сечения из-за ее стоимости нецелесообразно, т.к. функциональная роль этого заполнителя заключается, в первую очередь, в повышении названных величин в нижних и верхних слоях поперечного сечения, например шпалы, подвергающейся действию знакопеременных нагрузок. Действительно, предельная растяжимость повысилась до 0,52 %.

Таким образом, введение модифицирующих и армирующих компонентов в состав полимерной песчаной матрицы, а также их гидрофобизация, повысили прочность при изгибе в два раза, предельную растяжимость в 19 раз и снизили величины модулей упругости материала и его массы в 1,2 . . . 1,7 раза.

Для подтверждения полученных результатов был применен метод планирования активного эксперимента, а именно ротатабельный план для четырех факторов, т.е. тех же модулей упругости и пределов прочности. Установлено, что полиномы третьей степени дают большую точность, чем второй, хотя варианты № 8, 16, 24 и 29 адекватны характеристикам ДСВКМ, полученным ранее с помощью графоаналитических моделей.

Литература

1. Стородубцева Т.Н. Композиционный материал на основе древесины для железнодорожных шпал: Трещиностойкость под действием физических факторов: Моногр. / Т.Н. Стородубцева. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2002.– 216 с.

2. Стородубцева Т.Н. Строительные древесностекловолокнистые композиционные материалы для изделий специального назначения / Т. Н. Стородубцева : Автореф. дис. . . . докт. техн. наук; Воронеж. гос. архитектурно-строительный университет, Воронеж, 2005. – 43 с.

3. Использование полинома третьей степени при проектировании оптимального состава полимербетона ФАМ [Текст] / Т.Н. Стородубцева, В.И. Харчевников, С.В. Назаров и др. – Воронеж, 1989. – 10 с. – Деп. в ВНИИС 4.02.89, № 9224; Опубл. 1.04.89, БУДР Вып. 4.

4. Баженов, Ю.М. Компьютерное материаловедение строительных композитов с трещинами и порами [Текст] / Ю.М. Баженов,

В.А. Воробьев, А.В. Илюхин // Изв. вузов. Строит. – 2001.– № 11. – С. 37–43.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ГРУППЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОСНОВНЫХ КОМПОНЕНТОВ КОМПОЗИТА

Стородубцева Т.Н., Федянина Н.В., Батурин К.В. (Воронеж)

Энергетический потенциал молекул древесного заполнителя выражается состоянием радикалов надмолекулярных структур цепных макромолекул целлюлозных волокон. Содержание активных функциональных групп в древесине составляет, % [1]: гидроксильные – 1,19; альдегидные СНО – 0,95; карбонильные – 0,15; карбоксильные СООН – 0,05. Лигнин также реакционноспособный полимер, содержащий те же функциональные группы, что и целлюлоза, и, кроме того, метильные группы.

Начальным гарантом, констатирующим возникновение связей между смолой (адгезив) и древесиной (субстрат), является смачивание. По определению Советского энциклопедического словаря (СЭС) [2], – это поверхностное явление, возникающее при соприкосновении жидкости и твердого тела.

По А.А. Берлину [3], смачивание является проявлением действия молекулярных сил и характеризуется краевым углом смачивания между поверхностью твердого тела и касательной, проведенной к образующей поверхности жидкости. При $\theta = 0°$имеет место полное смачивание, при $\theta = 180°$– полное не смачивание (шарик ртути на твердой поверхности, например).

Г.Д. Андреевская, ссылаясь на Ф. Мозера [4], утверждает, что значения краевых углов смачивания позволяют "предсказывать" адгезионную прочность, и предлагает классифицировать смолы соответственно значениям этих углов. При $\theta \leqslant 21\ldots45°$– смолы являются полярными по отношению к субстрату, при $\theta \cong 46\ldots65°$– малополярными и при $\theta = 66\ldots90°$– неполярными.

Таким образом, смачивание является необходимым условием хорошей адгезии, поскольку указывает на наличие достаточно сильных межмолекулярных сил на поверхности, приводящих к взаимодействию адгезива и субстрата.

Смачивание и растекание адгезива по поверхности субстрата сопровождается поверхностной диффузией и миграцией молекул адгезива по поверхности. Эти процессы являются подготовительными, но играют важную роль [5]. Ранее В.И. Харчевниковым был определен краевой угол смачивания для системы: олигомер ФАМ, отвержденный в присутствии БСК, – поверхность стекла, который оказался равным 14…15°, что также характеризовало смолу ФАМ как полярную и к стекловолокну [6], используемому в композиционном материале.

Смачивание сопровождается вторым актом взаимодействия смолы ФАМ и древесины – физической адсорбцией, осуществляемой Ван-дер-Ваальсовыми силами. Теплота физической адсорбции 0,05 …0,17 эв или примерно 2,36 ккал/моль, т.е. незначительная [7].

В свою очередь физическая адсорбция сопровождается диполь - дипольным взаимодействием, т.е. притяжением положительного конца полярной молекулы ($H^{+\delta}$) отрицательным концом другой ($0^{-\delta}$), при этом возникают водородные связи с теплотой 6…8 кДж/моль [2] (диполь полярная молекула, у которой центр отрицательного заряда не совпадает с центром положительного; δ – означает частичный заряд, который возникает вследствие сдвига электронной пары в сторону, например, наибольшей электроотрицательности).

Рассмотрим применимость предложенной теории для вновь создаваемого композита, а конкретно, для его основных компонентов – олигомера ФАМ и древесины (целлюлозы и лигнина). На рисунках 1 и 2 показан возможный механизм взаимодействия функциональных групп основных компонентов композита.

Отметим, что процесс возникновения адгезионного соединения очень сложный, его фазы взаимно переплетаются во времени.

Не ясен был и характер взаимодействия по метильным CH_3, альдегидным CHO и карбоксильным COOH группам, имеющимся в молекулах лигнина, и олигомером ФАМ. Образование связей между $C = O$ карбонильной группой ФАМ и ДФАМ и гидроксильной группой элементарного звена целлюлозы возможно по типу образования кеталей в присутствии кислот в качестве катализаторов.

Нашими совместными исследованиями [8], установлено, что монодифурфурилиденацетоны реагируют друг с другом по двойной связи (рисунок 3), а также взаимодействуют за счет карбоксильных групп и атомов водорода метильных групп. При этом образуются плавкие и растворимые олигомеры:

Сложность адгезионных процессов породило и достаточно большое количество соответствующих теорий, которые будут рассмотрены позднее.

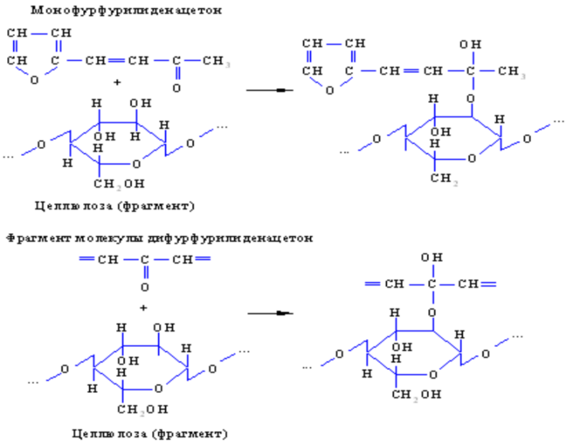


Рис. 1: Возможный механизм химического взаимодействия ФАМ и ДФАМ с целлюлозой

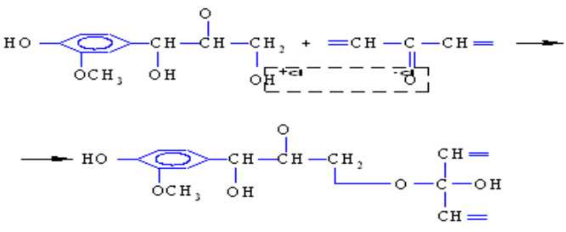


Рис. 2: Возможный механизм образования химических связей между ДФАМ и фрагментами молекул лигнина

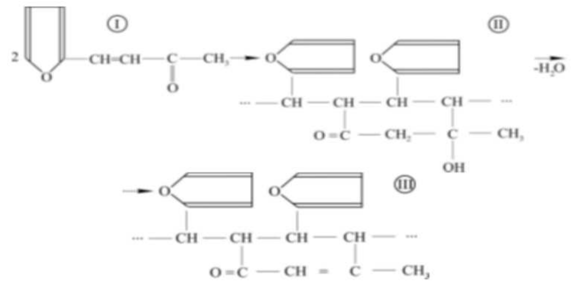


Рис. 3: Механизм образования олигомера из монофурфурилиденацетона (1 – монофурфурилиденацетон, II и III - продукты взаимодействия молекул монофурфурилиденацетона)

Литература

1. Акчабаев, А.А. Основы прогрессивной технологии прессуемого арболита [Текст]: автореф. дис. ...д-ра техн. наук / А.А. Акчабаев. – СПб, 1992. – 49 с.

2. Советский энциклопедический словарь [Текст] / Гл. ред. А.М. Прохоров (2-е изд).– М.: Сов. Энциклопедия.– 1983.– 1600 с.

3. Берлин, А.А. Основы адгезии полимеров [Текст] / А.А. Берлин, В.Е. Васин. – М.: Химия, 1974. – 391 с.

4. Андреевская, Г.Д. Высокопрочные ориентированные стеклопластики [Текст] / Г.Д. Андреевская. – М.: Наука, 1966. – 369 с.

5. Липатов, Ю.С. Композиционные полимерные материалы [Текст] / Под ред. Ю.С. Липатова.– Киев: Наукова думка, 1975.– 190 с.

6. Горлов, Ю.П. О некоторых современных проблемах строительного материаловедения [Текст] / Ю.П. Горлов // Изв. вузов. Строительство.– 1996.– № 1. – С. 39–42.

7. Дерягин, Б.В. Адгезия твердых тел [Текст]: Моногр. / Б.В. Дерягин, Н.А. Кротова, В.П. Смильга. – М.: Наука, 1973. – 280 с.

8. Композиционный материал на основе отходов лесного комплекса [Текст] / В.И. Харчевников, Б.А. Бондарев, Т.Н. Стородубцева и др.: Моногр. / Под ред. В.И. Харчевникова.– Воронеж: ВГЛТА, 2000. – 296 с.

О СПЕКТРЕ АЛГЕБРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ[1]

Струкова И.И. (Воронеж)

irina.k.post@yandex.ru

Пусть X – комплексное банахово пространство, $EndX$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов на X. Пусть $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ – банахово пространство непрерывных ограниченных функций, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ – равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X, $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$ – замкнутое подпространство из $C_{b,u}$ убывающих на бесконечности функций.

В пространстве $C_{b,u}$ рассмотрим изометрическую группу операторов $S : \mathbb{R} \to EndC_{b,u}$ вида $(S(\alpha)x)(t) = x(t + \alpha),\ \alpha, t \in \mathbb{R}$.

Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $(S(\alpha)x - x) \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *периодической на бесконечности периода* $\omega > 0$, если $(S(\omega)x - x) \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Множества медленно меняющихся и периодических на бесконечности периода ω функций обозначим символами $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ соответственно.

Рядом Фурье функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида $x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{R}$, а функции

$$x_n(t) = \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}}{\omega}\int\limits_0^{\omega} x(t + \tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z},$$

- *коэффициентами Фурье* функции x.

Введем в рассмотрение фукционал $\xi_\gamma : C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ вида $\xi_\gamma(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi(x_k)\gamma^k,\ x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, где $\gamma \in \mathbb{T}$, функционал $\xi \in C_{sl}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})^*$ аннулируется на пространстве $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, а x_k - $k-$ый коэффициент Фурье функции x.

Теорема 1. *Каждый характер на банаховой фактор-алгебре* $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})/C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ *допускает представление вида* ξ_γ.

Литература

Баскаков А.Г., Калужина Н.С. Теорема Бёрлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений. Матем. заметки, 2012, 92:5, 643-661.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00367)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ $\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}$, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ, В СЛУЧАЕ ЦЕЛЫХ α и β[2]

Султанахмедов М.С. (Махачкала)

sultanakhmedov@gmail.com

Пусть на отрезке $[-1,1]$ задана сетка $\{\eta_j\}_{j=0}^{N}$, где $-1=\eta_0<\eta_1<\ldots<\eta_N=1$; $\Delta\eta_j=\eta_{j+1}-\eta_j$, $j=\overline{0,N-1}$. Рассмотрим новую сетку $T_N=\{t_j\}_{j=0}^{N-1}$, такую что $\eta_j\leqslant t_j\leqslant\eta_{j+1}$, $j=\overline{0,N-1}$. Через $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}\}_{k=0}^{N-1}$ обозначим конечную систему полиномов, образующих на T_N ортонормированную систему в смысле следующего скалярного произведения:

$$<\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta},\hat{p}_{m,N}^{\alpha,\beta}>=$$

$$\sum_{j=0}^{N-1}\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t_j)\hat{p}_{m,N}^{\alpha,\beta}(t_j)\text{æ}^{\alpha,\beta}(t_j)\Delta\eta_j=\delta_{nm}=\begin{cases}0, & n\neq m\\ 1, & n=m\end{cases},$$

где $\text{æ}^{\alpha,\beta}(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$.

В настоящей работе рассматривается вопрос об асимптотических свойствах полиномов $\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}$ при $n,N\to\infty$ в случае, когда α и β — целые неотрицательные числа. Показано, что при определенных условиях на рост степени $n=n(N)$ в зависимости от роста числа узлов сетки N, имеет место асимптотическая формула вида

$$\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)=\hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(t)+v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

где $\hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(t)$ — классические ортонормированные полиномы Якоби, $v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ — остаточный член.

В качестве следствия асимптотической формулы получены весовые оценки для дискретных полиномов Якоби $\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}$.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00191-а)

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ [1]

Султанов Э.Ш. (Каспийск)
emir.sultanov@gmail.com

Рассмотрена задача о приближении дискретной функции $f(x)$, заданной на сетке $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$, частичными суммами предельного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{-1} m_n^{-1}(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

образуемого в результате почленного предельного перехода при $\alpha \to -1$ из ряда Фурье $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^{\alpha} m_n^{\alpha}(x)$ по полиномам Мейкснера $m_n^{\alpha}(x)$, ортонормированным на сетке Ω. Впервые этот ряд был введен в работе [1]. Исследовано поведение функции Лебега $\Lambda_n(x)$ частичных сумм ряда (1)

$$S_n^{-1}(f) = S_n^{-1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{-1} m_k^{-1}(x).$$

В частности, получена оценка функции Лебега частичных сумм предельного ряда по полиномам Мейкснера.

Литература

1. *Султанов Э.Ш.* Предельные дискретные ряды Мейкснера и их аппроксимативные свойства // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 16-й Сарат. Зимней школы. – Саратов: ООО "Издательство "Научная книга", 2012. – С. 172-173.

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ХАОСОВ РАДЕМАХЕРА

Суханов Р.С. (Самара)
surose@yandex.ru

Определение 1. *Хаосом порядка $d \in \mathbb{N}$ будем называть множество всех функций вида $f_{i_1,\ldots,i_d}(t) := f_{i_1} \cdots f_{i_d}(t)$, где $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_d < \infty$.*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00191-а)

Определение 2. *Пусть $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций, определенных на $[0;1]$, является системой ε-единственности, если из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(t)$ к нулю на произвольном множестве $E \subset [0;1]$, мера Лебега которого удовлетворяет условию $m(E) > 1-\varepsilon$, следует, что $c_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Теорема 1. *Пусть $\varphi(t)$ – произвольная конечная функция с периодом 1, удовлетворяющая условию*

$$\varphi\left(t+\frac{1}{2}\right) - \varphi(t) \neq 0 \text{ для п.в. } t \in [0;1].$$

Если ряд

$$\sum_{0\leqslant i_1<\cdots<i_d<\infty} a_{i_1,\ldots,i_d}\varphi(2^{i_1}t)\cdots\varphi(2^{i_d}t)$$

сходится к постоянной C на множестве $E \subset [0;1]$, $m(E) > 1 - 2^{-d}$, то $C = 0$ и $a_{i_1,\ldots,i_d} = 0$ для произвольных $0 \leqslant i_1 < \cdots < i_d$.

Теорема является обобщением **теоремы 1** из статьи Стечкина и Ульянова. Полагая $\varphi(t) = r_1(t)$, получаем утверждение относительно хаосов Радемахера.

Материал опубликован в журнале “Математические заметки”.

Литература

Стечкин С. Б., Ульянов П. Л. О множествах единственности. Изв. АН СССР, Сер.матем., 1962. — Т. 26, 200-211.

Асташкин С. В., Суханов Р. С. О некоторых свойствах хаоса Радемахера. М.: Наука, Математические заметки, 2012. — Т. 91, 654-666.

О СИНТЕЗЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВУХЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ С ПРИВОДАМИ[1]

Таджиев Д.А. (Ульяновск)
vertigojt@gmail.com

Рассматривается модель механического двухзвенного манипуляционного робота. Двухзвенник может совершать движения в горизонтальной плоскости и управляется при помощи моментов, создаваемых приводами в его шарнирах. Уравнение движения системы

[1]Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0373 «Развитие методов и алгоритмов исследования задач об управлении нелинейными механическими системами и компьютерное моделирование управляемого движения системы тел».

состоит из уравнений Лагранжа 2-го рода механической системы и уравнений, описывающих динамику приводов. Разработаны алгоритмы построения входных управлений на приводы, обеспечивающих стабилизацию заданного программного движения робота. Методика разработки основана на применении метода законопостоянных функций Ляпунова [1] и [2]. Полученные результаты развивают соответствующие результаты о синтезе управления механическими системами из [3] и [4].

Литература

Андреев А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. - Т. 48. - Вып. 2. - С. 225-232.

Андреев А. С., Дмитриева О.Г., Петровичева Ю.В. Об устойчивости нулевого решения системы с разрывной правой частью // Научно-технический вестник Поволжья, 2011. - № 1. - С. 15-21.

Матюхин В.И. Универсальные законы управления механическими системами. - Москва: МАКС Пресс, 2001. - 252 с.

Матюхин В.И., Пятницкий Е.С. Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учета динамики приводов // Автоматика и телемеханика. - 1989. - № 9. - С. 67-82.

О РЯДЕ ИЗ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ ЧЛЕНОВ РЯДА ПО СИНУСАМ[1]

Теляковский С.А. (Москва)

sergeyAltel@yandex.ru

С помощью строго возрастающей последовательности Λ натуральных чисел $n_1 = 1 < n_2 < \dots$ ряду $\sum b_k \sin kx$ ставится в соответствие ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} b_k \sin kx \right|, \tag{1}$$

сумму которого обозначим $g_\Lambda(x)$.

Теорема. *Функция $g_\Lambda(x)$ является ограниченной для всех рядов $\sum b_k \sin kx$, коэффициенты которых удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=m}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \leqslant \frac{B}{m}, \quad m = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11 – 01 – 00417).

где B – абсолютная постоянная, в том и только том случае, когда для последовательности Λ выполнено условие

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{n_j} \min(n_i, n_{j+1} - n_j) \leqslant A, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где A – абсолютная постоянная.

Условие (2) выполняется, в частности, для всех рядов $\sum b_k \sin kx$ с монотонными коэффициентами, имеющих ограниченную сумму.

В [1] установлено, что оценка (3) необходима и достаточна, для того чтобы функции вида (1) были ограниченными для всех функций ограниченной вариации. Приведенная теорема и это утверждение из [1] несравнимы.

Л. Лейндлер (2001) доказал, что функция $g_\Lambda(x)$ ограничена, если для коэффициентов b_k справедлива оценка (2), а для последовательности Λ выполнено условие

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{n_i}{n_j} \leqslant A, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Литература

1. *Белов А.С., Теляковский С.А.* Усиление теорем Дирихле-Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации. – Математический сборник, 2007, 198:6, 25–40.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ткачева С.А., Савченко Г.Б., Савченко Ю.Б. (Воронеж)

Рассмотрим первую краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{x'} u - \alpha\left(x_n\right) \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\alpha\left(x_n\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = f(x', x_n, t), \tag{1}$$

$$x' = \left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right), \; x' \in E_{n-1}, \; x_n > 0, \; t > 0$$

$$u|_{x_n=0} = 0, \, u|_{t=+0} = 0. \tag{2}$$

где $x' \in E_{n-1}, \quad x_n > 0, \quad 0 < t < \infty, \quad \Delta_{x'} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2}$ - оператор Лапласа по переменной $x' \in E_{n-1}$; $\alpha(x_n)$ - весовая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\alpha(x_n) \in C^2\left(E^+ \setminus \{0\}\right), \alpha(x_n) > 0, x_n > 0, \alpha(+0) = 0;$$

$$\int_0^N \frac{ds}{\alpha(s)} < \infty, \ \forall N > 0, \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{ds}{\alpha(s)} < \infty, \ \forall N > 0$$

Гладкость решения задачи исследуется в весовых пространствах Соболева - Слободецкого $W_{p,\alpha}^{2l,l}$ $(1 < p < \infty)$. с нормой (см. [1]):

$$\|u\|_{W_{p,\alpha}^{2l,l}\left(E_n^+ \times (0,T)\right)} =$$

$$= \sum_{|\nu'| + \nu_n + 2\nu_0 \leqslant 2l} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\nu'} (\alpha D_{x_n})^{\nu_n} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_o} u(x', x_n, t) \right\|_{p,\alpha}$$

где $\alpha D_{x_n} = \alpha(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}$,

$$\|u\|_{p,\alpha} = \left\{ \int_{E^{n-1}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |u(x', x_n, t)|^p \frac{dx_n}{\alpha(x_n)} \, dt dx' \right\}^{1/p}$$

Теорема. Пусть $f(x', x_n, t) \in W^{2\ell+1/p, \ell+1/2p}(E_n^+ \times (0,T))$, $(0 < p < \infty)$ Тогда функция $u(x', x_n, t)$ и ее производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ $\left(\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 u(x', x_n, t)$ принадлежат при каждом фиксированном $t \in (0,T)$ пространству $W_{p,\alpha}^{2\ell+1/p, \ell+1/2p}\left(E_{n-1} \times (0,\infty) \times (0,T)\right)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_{p,\alpha}^{2\ell+1/p, \ell+1/2p}\left(E_{n-1} \times (0,\infty) \times (0,T)\right)} \leqslant$$

$$\leqslant c\, \|f\|_{W_{p,\alpha}^{2\ell+1/p, \ell+1/2p}\left(E_{n-1} \times (0,\infty) \times (0,T)\right)}.$$

Литература

1. Глушко В.П. Об уравнении теплопроводности с существенно переменным коэффициентом / В.П. Глушко, С.А. Ткачева. – ДАН РФ, т.335, №6, 1996

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С ПОТЕНЦИАЛОМ НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ С УГЛОМ $\pi/6$

Томин Н.Г., Томина И.В. (Иваново)
nikolay.tomin@gmail.com

Рассмотрим спектральную граничную задачу Дирихле для оператора Лапласа на прямоугольном треугольнике $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y\sqrt{3} \leqslant x \leqslant (2\pi - y\sqrt{3})/3\}$ с острым углом $\pi/6$:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ на } D, \quad u = 0 \text{ на } \partial D.$$

Известно [1], что эта задача и порождаемый ею самосопряженный положительный в $L^2(D)$ оператор T имеют ортонормированную полную в $L^2(D)$ систему собственных функций $V = \{v_{mn}(x, y) \mid (m, n) \in \tau\}$, соответствующих собственным числам $\lambda_{mn} = m^2 + 3n^2$, где $\tau = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leqslant m < n \text{ и } (-1)^{m+n} = 1\}$, а $v_{mn}(x, y) = (2\sqrt[4]{12}/\pi)(\sin mx \sin \sqrt{3}ny - \sin m_1 x \sin \sqrt{3}n_1 y + \sin m_2 x \sin \sqrt{3}n_2 y)$ при $m_1 = (3n - m)/2$, $n_1 = (n + m)/2$, $m_2 = (3n + m)/2$, $n_2 = (n - m)/2$.

Пусть $\alpha > 1$, p — вещественная или комплекснозначная функция из $L^2(D)$ и P — оператор умножения на функцию p в $L^2(D)$. Оператор T^α положителен, самосопряжен и обладает собственными функциями v_{mn}, соответствующими собственным числам λ_{mn}^α, где $(m, n) \in \tau$. Если $\alpha > 3/2$ и норма потенциала p в $L^2(D)$ достаточно мала, то линейные операторы T^α и $T^\alpha + P$ дискретны в пространстве $L^2(D)$ и имеют ядерные резольвенты, а все собственные числа оператора $T^\alpha + P$ с учетом их алгебраических кратностей могут быть представлены в виде двойной последовательности комплексных чисел $\{\mu_{mn}(p, \alpha)\}_{(m,n)\in\tau}$ таких, что $|\mu_{mn}(p, \alpha) - \lambda_{mn}^\alpha| \leqslant C\lambda_{mn}^{1/4}$ для всех $(m, n) \in \tau$.

Через $\tilde{p}$ обозначаем продолжение функции p с треугольника D на прямоугольник $\Pi = [0, \pi] \times [0, \pi/\sqrt{3}]$, построенное следующим образом (см. [1]). Каждой точке $M(x, y) \in D$ сопоставляем 6 точек $M_i(x_i, y_i) \in \Pi$, где $i = \overline{0, 5}$, $x_0 = x$, $y_0 = y$, $x_1 = (x + y\sqrt{3})/2$, $y_1 = (x\sqrt{3} - y)/2$, $x_2 = (x - y\sqrt{3})/2$, $y_2 = (x\sqrt{3} + y)/2$ и при $i \in \{3, 4, 5\}$ имеем $x_i = \pi - x_{i-3}$, $y_i = \pi/\sqrt{3} - y_{i-3}$. Когда точка M пробегает треугольник D, точки M_i, $i = \overline{0, 5}$, заполняют прямоугольник Π. Функция $\tilde{p}$ полностью определяется на прямоугольнике Π равенством $\tilde{p}(M_i) = p(M)$ для всех $M \in D$ и $i = \overline{0, 5}$. Пусть множество B состоит из всех упорядоченных пар (m, n), где m и n — нечетные натуральные числа и m не делится на 3. Далее, пусть $\{\tilde{\lambda}_j\}_{j=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность всех собственных чисел $\lambda_{mn} = m^2 + 3n^2$ таких, что $(m,n) \in B$. Полагаем $W = \cup_{j=1}^{\infty} W(j)$, где $W(j) = \{(m,n) \in \tau \mid \lambda_{mn} = \tilde{\lambda}_j\}$ при $j \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Пусть $\alpha > 2$. Тогда существуют положительные числа δ и C_0 такие, что для любой двойной комплексной последовательности $\{\xi_{mn}\}_{(m,n)\in W}$, удовлетворяющей условию*

$$\Lambda \equiv \sqrt{\sum_{(m,n)\in W} |\xi_{mn} - \lambda_{mn}^{\alpha}|^2} < \delta,$$

найдется функция $p \in L^2(D)$ со следующими свойствами:

1) *для всех $j \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$\sum_{(m,n)\in W(j)} (\xi_{mn} - \mu_{mn}(p,\alpha)) = 0;$$

2) *при всех $(m,n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2 \setminus B$ выполняется соотношение*

$$\iint\limits_{\Pi} \tilde{p}(x,y) \cos mx \cos \sqrt{3} ny \, dx \, dy = 0;$$

3) *$\|p\| \leqslant C_0 \Lambda$, где $\|\cdot\|$ есть норма в $L^2(D)$.*

Доказательство теоремы использует принцип сжатых отображений и метод контурного интегрирования резольвенты с учетом поправок аналитической теории возмущений и оценок абсолютной нормы резольвенты оператора T^{α} в $L^2(D)$.

Литература

1. *Томина И.В.* Первый регуляризованный след степени оператора Лапдаса на прямоугольном треугольнике с углом $\pi/6$ в случае задачи Дирихле. Фундаментальная и прикладная математика, 1995, т.1, №2, с. 59-61.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОНИЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ МОДЕЛЕЙ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Тропкина Е.А. (Самара)
elena_ a.85@mail.ru

Для описания моделей химической кинетики часто используют сингулярно возмущенные дифференциальные системы, содержащие малый параметр при части производных. Этот факт объясняется тем, что в химической системе одновременно происходят резко отличающиеся по скоростям процессы.

Стремление к более точному математическому описанию явлений химической кинетики, как правило, приводит к усложнению системы и увеличению количества уравнений, входящих в нее. В связи с этим возникает проблема качественного анализа таких систем.

Данный доклад посвящен одному из подходов уменьшения размерности кинетических моделей химических реакций, а именно, методу понижение порядка (редукция) описывающих их систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на разделении быстрых и медленных движений.

Литература

Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк. 1990. 208 с.

Соболев В. А., Щепакина Е. А. Редукция моделей и критические явления в макро-кинетики. М.: Физматлит, 2010

Fehrst A. Enzyme structure and mechanisms // 2nd edition. Ed. W.F. Freeman. New York, 1975.

Соболев В. А., Тропкина Е. А. Асимптотические разложения медленных инварантных многообразий и редукция моделей химической кинетики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 1. С. 81–96.

Тропкина Е. А. Итерационный метод приближенного построения интегральных многообразий медленных движений // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. 2010. № 4(78). С. 78–88.

Roussel M. R., Fraser S. J. Geometry of of the steady-state approximation: Perturbation and accelerated convergence method // J. Chem. Phys. 1990. Vol. 93. Pp. 1072–1081.

ОБ ОПЕРАТОРАХ УРЫСОНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Трусова Н.И. (Липецк)
trusova.nat@gmail.com

Пусть $B = (B_{ij})\ \ (i, j = 1, ..., n)$, где

$$(B_{ij}y)(t,s) = \int_T l_{ij}(t,s,\tau,y(\tau,s))d\tau + \int_S m_{ij}(t,s,\sigma,y(t,\sigma))d\sigma +$$
$$\iint_D n_{ij}(t,s,\tau,\sigma,y(\tau,\sigma))d\tau d\sigma, \quad i,j = 1,...,n,$$

операторы Урысона с частными интегралами в которых $T = [a,b]$, $S = [c,d]$, $t,\tau \in T$, $s,\sigma \in S$, $D = T \times S$, $u \in R = (-\infty; +\infty)$, $l_{ij}(t,s,\tau,u)$, $m_{ij}(t,s,\sigma,u)$ и $n_{ij}(t,s,\tau,\sigma,u)$ — вещественные функции.

Через $C^{(p)}(D)$ обозначим пространство функций со значениями в R, всевозможные производные которых по t и s до p-го порядка включительно непрерывны, а через $C^{(p),n}(D)$- пространство вектор-функций $x(t,s) = (x_1(t,s),...,x_n(t,s))$, принимающих значения в R^n и имеющих непрерывные производные по t и s до p-го порядка включительно.

Если функции l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} и их всевозможные производные по t и s до p-го порядка включительно непрерывны на $D \times T \times R$, $D \times S \times R$, $D \times D \times R$ соответственно, то оператор B действует в $C^{(p),n}(D)$, ограничен и непрерывен. Имеет место более общее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функции l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} и их всевозможные производные по t и s до p-го порядка включительно непрерывны в целом и интегрально ограничены на $D \times T \times R$, $D \times S \times R$, $D \times D \times R$ соответственно. Тогда оператор B действует в $C^{(p),n}(D)$, ограничен и непрерывен.*

Отметим,что свойства операторов Урысона с частными интегралами в различных классах функциональных пространств исследовались в [1,2].

Литература

1. *Калитвин А.С.* Нелинейные операторы с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2002. – 208 с.

2. *Калитвин А.С., Калитвин В.А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

ОДНОЗНАЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ НА ПЕРЕМЕННОЙ КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Тулина М.И. (Горно-Алтайск)
aniram.ru@googlemail.com

Однозначные дифференциалы (особенно случаи для порядка $q = 1$ и $q = 2$) даже на фиксированной поверхности уже нашли многочисленные приложения в уравнениях математической физики.

Пусть F – фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geqslant 2$.

Рассмотрим наборы q–дифференциалов:

$$\tau^{(1)}_{q,P_1}, \tau^{(2)}_{q,P_1}, \dots, \tau^{(\alpha_1)}_{q,P_1}, \dots, \tau^{(1)}_{q,P_l}, \tau^{(2)}_{q,P_l}, \dots, \tau^{(\alpha_l)}_{q,P_l}, \tau_{q,P_1P_{l+1}}, \dots, \tau_{q,P_1P_n}, \tag{1}$$

или

$$\tau^{(1)}_{q,P_1}, \tau^{(2)}_{q,P_1}, \dots, \tau^{(\alpha_1)}_{q,P_1}, \dots, \tau^{(1)}_{q,P_l}, \tau^{(2)}_{q,P_l}, \dots, \tau^{(\alpha_l)}_{q,P_l}, \tau_{q,P_{l+1}}, \dots, \tau_{q,P_n}, \tag{2}$$

при $l \geqslant 1, q > 1$;

$$\tau^{(1)}_{q,P_1}, \tau_{q,P_1P_2}, \dots, \tau_{q,P_1P_n}, \tag{3}$$

или

$$\tau^{(1)}_{q,P_1}, \dots, \tau^{(1)}_{q,P_n}, \tag{4}$$

при $l = 0, q > 1$.

Теорема 1. *Векторное расслоение*

$$\bigcup_{[\mu]} \Omega^q\left(\frac{1}{P_1^{\alpha_1} \dots P_l^{\alpha_l} P_{l+1} \dots P_n}; F_\mu\right) / \Omega^q(1; F_\mu)$$

будет голоморфным векторным расслоением ранга $\alpha_1 + \dots + \alpha_l + n - l$ над пространством Тейхмюллера $\mathbb{T}_g(F)$, где $g \geqslant 2$, $\alpha_1, ..., \alpha_l \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, $0 \leqslant l \leqslant n$, $q > 1$ и точки $P_1, \dots, P_n$ попарно различны. При этом классы смежности q–дифференциалов из наборов $(1), (2), (3), (4)$ дают базис локально голоморфных сечений этого расслоения.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ЖИДКОСТИ ГЕРШЕЛЬ-БАЛКЛИ[1]

Турбин М.В. (Воронеж)

mrmike@math.vsu.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$ — ограниченная область с гладкой (как минимум $C^{3,1}$) границей. Как известно, движение несжимаемой жидкости в области Ω на промежутке времени $[0, T], T < \infty$ описывается следующей системой уравнений в форме Коши:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p = Div\sigma + f, \tag{1}$$

$$div\, v = 0. \tag{2}$$

Здесь, $v(x, t)$ скорость жидкости точке x в момент времени t; $p = p(x, t)$ — давление в жидкости в точке x в момент времен t; $f = f(x, t)$ — плотность внешних сил; $\sigma = (\sigma_{ij}(x))$ — девиатор тензора напряжений. Через $Div\sigma$ обозначен вектор составленный из дивергенций столбцов матрицы σ.

Система (1),(2) формально описывает движение всех типов жидкости. Однако, число неизвестных этой системы больше числа уравнений. Чтобы замкнуть эту систему, рассматривают различные соотношения между девиатором тензора напряжений σ и тензором скоростей деформаций $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$. Такие соотношения называют реологическим соотношениями.

Нами рассматривается следующее соотношение:

$$\sigma = \nu|\mathcal{E}(v)|^{p-2}\mathcal{E}(v) + \mu\frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} \text{ при } |\mathcal{E}(v)| \neq 0 \text{ и } |\sigma| \leqslant \mu \text{ при } |\mathcal{E}(v)| = 0. \tag{3}$$

Здесь $p \in \mathbb{R}$, $\frac{3n}{n+2} < p < 2$, μ — некоторая положительная константа и $\nu > 0$ — вязкость жидкости.

Для системы (1)-(3) рассматривается начально-краевая задача с начальным условием

$$v(x, 0) = a(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31188)

и граничным условием

$$v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{5}$$

Введем необходимые обозначения. Пусть $C_0^\infty(\Omega)^n$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, содержащимся в Ω. Через V_p и H обозначим пополнение множества гладких соленоидальных функций $\mathcal{V} = \{u : u \in C_0^\infty(\Omega)^n, div\, u = 0\}$ по нормам W_p^1 и $L_2(\Omega)^n$ соответственно. $(V_p)^*$ — пространство сопряженное к V_p. $\langle h, v\rangle$ обозначает действие функционала $h \in (V_p)^*$ на функцию $v \in V_p$.

Будем предполагать, что $a \in H, f \in L_{p'}(0,T; L_{p'}(\Omega)^n)$. Здесь $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Определение 1. *Пара функций* (v, σ), $v \in \{u : u \in L_p(0,T,V_p),\ v' \in L_{p'}(0,T,(V_p)^*)\}, \sigma \in L_{p'}(0,T,L_{p'}(\Omega)^{n^2})$ *называется слабым решением начально-краевой задачи (1)-(5), если она удовлетворяет равенству*

$$\langle v'(t), \varphi\rangle - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i(t)v_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx - \int_\Omega \sigma(t) : \nabla\varphi dx = \int_\Omega f(t)\varphi dx$$

для всех $\varphi \in V_p$ *и почти всех* $t \in (0,T)$ *и начальному условию*

$$v(0) = a.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Существует хотя бы одно слабое решение начально-краевой задачи (1)-(5).*

ОМБИЛИЧЕСКАЯ ОСОБЕННОСТЬ ВБЛИЗИ УГЛОВОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Уварова Н.С. (Воронеж)

В теории особенностей [1], а также при решения ряда прикладных нелинейных вариационных задач с полуограничениями (в теории управления, в теории фазовых переходов, в теории бифуркаций периодических волн и т.д.) вида

$$V(x) \longrightarrow extr, \quad x \in E, \quad g_k(x) \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

после применения одной из редукционных схем мы сталкиваемся с задачей бифуркационного анализа гладкой функции $W(\xi) :=$

$\inf\limits_{x:g(x)=\xi} V(x)$ вблизи угловой особой точки омбилического типа [2], [3]. В двумерном случае омбилическая особенность может возникать, как минимум, в трех видах, позволяющих выделить несколько подходов к её анализу. Так, в теории кристаллов особенность принимает вид полинома шестой степени с двумя переменными [4]:

$$\xi_1^6+\xi_2^6+a_1\xi_1^4\xi_2^2+a_2\xi_1^2\xi_2^4+q\xi_1^4\xi_2^4+\varepsilon_1\xi_1^4+\varepsilon_2\xi_2^4+\varepsilon_3\xi_1^2\xi_2^2+\delta_1\xi_1^2+\delta_2\xi_2^2$$

Заменой переменных $\eta_1=\xi_1^2$, $\eta_2=\xi_2^2$, мы можем перейти в координатный угол $\eta_1\geqslant 0$, $\eta_2\geqslant 0$, упростив при этом полином:

$$\eta_1^3+\eta_2^3+a_1\eta_1^2\eta_2+a_2\eta_1\eta_2^2+q\eta_1^2\eta_2^2+\varepsilon_1\eta_1^2+\varepsilon_2\eta_2^2+\varepsilon_3\eta_1\eta_2+\delta_1\eta_1+\delta_2\eta_2.$$

В таком виде угловая особенность естественныи образом вознкает в теории упругости [2] и «чистой» теории особенностей [1]. При желании упростить полином с помощью нелинейной замены координат, мы можем перейти к канонической форме омбилического полинома [2]: $W=x^3\pm xy^2+\delta_1x+\delta_2y+\delta_3x^2$, но при этом угол примет вид $x+\alpha_1y+\beta_1+\cdots\geqslant 0,\ \ x+\alpha_2y+\beta_2+\cdots\geqslant 0$, то есть в общем случае он может стать криволинейным [5].

Каждый из перечисленных случаев даёт нам возможность более полно и с разных сторон исследовать данную особенность, а также найти разные подходы к проведению полного бифуркационного анализа (к описанию каустики, раскладов бифурцирующих экстремалей и их асимптотических предсавлений по закритическим приращениям «управляющих» параметров).

Литература

1. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО. 2004. - 672 с.

2. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т.12. 2004. С.3–140.

3. Siersma D. Singularities of functions on boundaries, corners, etc// Quart.J. Oxford Ser, 1981.– 32,125.–P.119-127.

4. Даринский Б.М., Колесникова И.В., Сапронов Ю.И. Сапронов Ветвление фаз кристалла, определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка// Системы управления и информационные технологии. – Москва-Воронеж, 2009. - № 1(35). — С. 72-76.

5. Белоглазов А.В. Об угловых особенностях гладких функций в нелинейных задачах математической физики// Труды воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна - 2006. Воронеж: ВорГУ, 2006. - С. 21-36.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА В ЗАДАНИЯХ ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ

Ускова Н.Б., Ускова О.Ф. (Воронеж)
nat-uskova@mail.ru

Назначение единого государственного экзамена по информатике состоит в объективной оценке общеобразовательной подготовки по информатике выпускников общеобразовательных учреждений с целью продолжения образования в учреждениях высшего профессионального образования.

Одним из тематических блоков, тематика заданий которого входит в ЕГЭ, является блок «Основы логики». Как и по другим тематическим блокам, задания из блока «Основы логики» не требуют простого воспроизведения теоретического материала (терминов, понятий, величин, правил).

На уровне воспроизведения знаний блока «Основы логики» проверяется фундаментальный теоретический материал по основным элементам математической логики. Умения создавать и преобразовывать логические выражения, формировать для логической функции таблицу истинности и логическую схему, умения решать логические задачи проверяются при выполнении заданий ЕГЭ, нацеленных на проверку сформированности умений в стандартной и новой ситуации. Задания из тематического блока «Основы логики» входят в части А и В ЕГЭ по информатике всех предшествующих лет. Из 32 заданий ЕГЭ 2010 года их этого тематического блока в части А было 16% и в 6% [1]. Средний процент выполнения заданий по рассматриваемому тематическому блоку достаточно высокий: 77% (часть А) и 67% (части В).

Уровень заданий ЕГЭ части В, связанных с решением логических уравнений, существенно вырос. Приведем для сравнения тексты таких заданий последних трех лет.

Вариант 2010 года.

A, B, C — целые числа, для которых истинно высказывание

$$((C > A) \vee (B < A)) \wedge (B < A)) \wedge (\neg(B + 1 < C) \vee A > C - 8).$$

Чему равно максимально возможное C, если $A = 16$, $B = 22$.

Вариант 2011 года [4].

Сколько различных решений имеет уравнение

$$((D \vee A \wedge C) \to \neg(A \to E)) \vee (\neg(A \wedge B \wedge C)) \wedge (B \to\neq C) = 0,$$

где A, B, C, D, E — логические переменные?

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений A, B, C, D и E, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Вариант 2012 года [4].

Сколько различных решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} (x_1 \wedge x_2 \vee \neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \equiv x_3) = 1, \\ (x_2 \wedge x_3 \vee \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_2 \equiv x_4) = 1, \\ (x_3 \wedge x_4 \vee \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_3 \equiv x_5) = 1, \\ (x_4 \wedge x_5 \vee \neg x_4 \wedge \neg x_5) \vee (x_5 \equiv x_6) = 1, \\ (x_5 \wedge x_6 \vee \neg x_5 \wedge \neg x_6) \vee (x_5 \equiv x_7) = 1, \end{cases}$$

где $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_7$ — логические переменные?

Знаком $\equiv$ обозначена логическая операция «эквивалентность» (результат — «истина», если операнды одинаковы). В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_7$, при которых выполнена данная система уравнений. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

В заключение приведем некоторые результаты ЕГЭ по информатике и ИКТ по Воронежской области: минимальное количество баллов, свидетельствующее об усвоении школьного курса равно 40, не преодолели минимального порога 7,67% сдавших этот экзамен (по России 11,1%).

Литература

1. ЕГЭ 2010. информатика: сборник экзаменационных заданий (Авт.– сост.: П.А.Якушкин, С.С.Крылов.– М.: ЭКСМО, 2010.– 176.

2. Крылов С.С. Информатика. Тематические тестовые задания ФИПИ/ С.С.Крылов, Д.М. Ушаков.– М. Издательство «Экзамен». 2012.– 223.

3. Ускова О.Ф. О некоторых аспектах методики проведения занятий по информатике на подготовительных курсах ВГУ / О.Ф. Ускова, Н.А. Тюкачев, В.Г. Хлебостроев, А.И. Шашкин. Информатика: проблемы, методология, технологии // Материалы X международной научно-методической конференции 11-12 февраля 2010 года. Воронеж, ТЗ. Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2010.– 479 с. С. 412-416.

4. Ускова О.Ф. Анализ заданий пробного варианта ЕГЭ по информатике и ИКТ 2011 года/ О.Ф. Ускова. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики // Сборник трудов международной конференции. Воронеж 28-29 сентября 2011. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2011. – 445 с. С. 401-406.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ КОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Устинов Г.М. (Екатеринбург)
shevchenko@imm.uran.ru

Пусть X — банахово пространство, $x \in X$, $r > 0$, $B(x,r) = \{y \in X : \|y - x\| \leqslant r\}$, M — ограниченное множество в X. Мерой некомпактности $K(M)$ множества M по Куратовскому называется число $K(M) = \inf\left\{r : \exists x_1, x_2, \dots, x_n,\ \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r) \supset M\right\}$. $C(Q)$ — пространство непрерывных функций на метризуемом компакте Q, $C_{W^*}(Q, X^*)$ — пространство W^*-непрерывных функций $g : \ Q \to X^*$, $\|g\| = \sup_{t\in Q}\|g(t)\|$, $C(Q,X^*) \subset C_{W^*}(Q,X^*)$ — пространство непрерывных по норме функций; для $g \in C_{W^*}(Q,X^*)$ полагаем $\rho(g) = \inf_{h\in C(Q,X^*)}\|g - h\|$. $L(X, C(Q))$ — пространство линейных ограниченных операторов $T : X \to C(Q)$, $K(X, C(Q)) \subset L(X, C(Q))$ — подпространство компактных операторов. Существуют различные подходы к изучению аппроксимационных свойств подпространства $K(X, C(Q))$ в $L(X, C(Q))$ — один из них заключается в использовании линейной изометрии $\tau : L(X, C(Q))$ и $C_{W^*}(Q, X^*)$, причем τ переводит $K(X, C(Q))$ в $C(Q, X^*)$ (см. [1, с. 528]), а потому достаточно изучать аппроксимативные свойства $C(Q, X)$ в $C_{W^*}(Q, X^*)$.

Теорема 1. *Если $g \in C_{W^*}(Q,X^*)$, то $\rho(g) = K(g(Q))$.*

С применением теоремы выводится ряд аппроксимационных свойств пространства $K(X, C(Q))$ в $L(X, C(Q))$, дополняющих и уточняющих ранее известные утверждения [2, 3].

Теорема 2. *Если X — сепарабельное банахово пространство, то $K(X, C(Q))$ не антипроксиминальное подпространство в $L(X, C(Q))$.*

Литература

1. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т.1. М.: Из-во ин. Лит. 1962.

2. *Mach J.* On the proximinality of compact operators with range in $C(S)$. PAMS. 1978. – Vol. 72, № 1. – P. 99–104.

3. *Yost D.* Approximation by compact operators between $C(x)$ spaces. Y. Of Approx. Theory. – 1987. – Vol. 49. – P. 99–107.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МАЖОРАНТЫ ЧАСТНЫХ СУММ ДВОЙНОГО РЯДА ВИЛЕНКИНА

Фадеев Р.Н.
belal_ templier@mail.ru, belal_ templier@mail.ru

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, $2 \leqslant p_n \leqslant N$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbf{N}$. Тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n). \tag{1}$$

Если $y \in [0,1)$ также имеет вид (1), то по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n/m_n, z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}, z_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$. Аналогично определяется $x \ominus y$. Если $k \in \mathbf{Z}_+$ записано в виде $k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, k_i \in \mathbb{Z} \cap [0, p_i)$, то по определению для $x \in [0,1)$ полагаем $\chi_k(x) = e^{\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\right)\right)}$. Известно, что $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированная полная в $L[0,1)$ система [1], и что $\chi_n(x \oplus y) = \chi_n(x)\chi_n(y)$ для почти всех $y \in [0,1)$ при фиксированном $x \in [0,1)$ и $n \in \mathbf{Z}_+$. Коэффициенты Фурье по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ задаются формулой $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}\, dt$.

Для ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \tag{2}$$

рассмотрим прямоугольные частные суммы
$S_{mn}(x,y) = \sum\limits_{j=0}^{m-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y), m, n \in \mathbb{N}$.
Ряд (2) определяет следующие максимальные функции
$M^*(x,y) = \sup\limits_{m,n \in \mathbb{N}} |S_{mn}(x,y)|\,, M(x,y) = \sup\limits_{l,q \in \mathbb{Z}_+} \left|S_{m_l m_q}(x,y)\right|.$

В одномерном случае $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит $RBVS$, если для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ верно $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k| \leqslant C a_n$. Аналогично

$\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty} \in RBVS^{(2)}$, если $\{a_{jk}\}_{j=0}^{\infty} \in RBVS, k \in \mathbb{Z}_+$, $\{a_{jk}\}_{k=0}^{\infty} \in RBVS, j \in \mathbb{Z}_+$, $\sum\limits_{j=l}^{\infty}\sum\limits_{k=q}^{\infty} |\Delta_{11}a_{jk}| \leqslant Ca_{lq}, l, q \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $1 \leqslant r < \infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Через $L^r_{\alpha,\beta}[0,1)^2$ мы обозначим множество измеримых на $[0,1)^2$ функций f с конечной нормой $\|f\|_{r,\alpha,\beta} = \left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |f(x,y)|^r x^\alpha y^\beta dxdy\right)^{1/r}$. С рядом (2) можно связать выражение $S_{r,\alpha,\beta}(a) = \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|^r (j+1)^{r-2-\alpha}(k+1)^{r-2-\beta}\right)^{1/r}$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $r \in [1,\infty)$ и $S_{r,\alpha,\beta}(a) < \infty$, где $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty} \in RBVS^{(2)}$. Тогда $M^*(x,y)$ содержится в $L^r_{\alpha,\beta}[0,1)^2$ и при этом $\|M^*\|_{r,\alpha,\beta} \leqslant S_{r,\alpha,\beta}(a)$.*

Теорема 2. *Пусть $r \in (1,\infty)$, $\alpha, \beta < r-1$, $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty} \in RBVS^{(2)}$, $\lim\limits_{max(j,k)\to\infty} a_{jk} = 0$ и $f(x,y)$ — сумма ряда (2). Если $f \in L^r_{\alpha,\beta}[0,1)$, то*

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(j+1)^{r-2-\alpha}(k+1)^{r-2-\beta}a^r_{j,k}\right)^{1/r} \leqslant C\|f\|_{r,\alpha,\beta}.$$

При $\alpha = \beta = 0$ результаты теорем 1 и 2 обобщают результаты Ф. Морица[2].

Теорема 3. *Пусть $r \in (0,\infty)$, $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ такова, что $\Delta_{22}a_{jk} \geqslant 0, j,k \in \mathbb{Z}_+$, $\lim\limits_{max(j,k)\to\infty} a_{jk} = 0$ и*

$$Q_r = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(j+1)^{2r-2}(k+1)^{2r-2}|\Delta_{11}a_{jk}|^r\right)^{1/r} < \infty.$$

Тогда сумма ряда (2) принадлежит $L^r[0,1)^2$ и $\|f\|_r \leqslant CQ_r$.

Аналогичные оценки для двойных четных тригонометрических рядов получены Т. М. Вуколовой и М.И. Дьяченко [3].

Литература

1.*Голубов Б. И. Ефимов А. В. Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша.// М. Наука, 1987.

2.*F. Moricz* On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients.// Proc. Amer. Math. Soc. 1990. v109. N2. p.417-425.

3. *Вуколова Т.М. Дъяченко М.И.* Оценки кратных сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами.// Изв. вуз. 1994 N.7 c.20-28.

КОМПОЗИЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ВЕСОВЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Фам Ч.Т. (Ростов-на-Дону)

phamtien@mail.ru

Пусть G – область в $\mathbb{C}$, $H(G)$ – семейство всех голоморфных на G функций и w – непрерывная положительная в G функция (*вес*). Образуем следующее весовое банахово пространство

$$H_w(G) := \{f \in H(G) : \|f\|_w := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{w(z)} < \infty\}.$$

Пространства такого вида применяются в теории аппроксимации и интерполяции, теории роста целых функций и их приложениях, теории двойственности функциональных пространств и др. Они являлись предметом и инструментом исследования во многих работах и в разных направлениях.

Одной из важнейших проблем для пространств $H_w(G)$ является описание их свойств и операторов в них в терминах весов, их определяющих. В настоящей работе мы исследуем композиционные операторы в этих пространствах. Ранее такие операторы интенсивно изучались в пространствах Харди, Бергмана, Дирихле и Блоха и в весовых пространствах непрерывных функций. В данном докладе будут представлены новые результаты для пространств голоморфных функций. Именно, пусть w_1, w_2 – веса на областях G_1, G_2, соответственно, и $\varphi : G_2 \to G_1$ – голоморфная функция на G_2. Получены критерии непрерывности и компактности композиционного оператора $C_\varphi : \ f \mapsto f \circ \varphi$, действующего из $H_{w_1}(G_1)$ в $H_{w_2}(G_2)$. Подробное изложение результатов доклада содержится в статье [1].

Литература

Фам Чонг Тиен. Композиционные операторы в весовых банаховых пространствах голоморфных функций// Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.— 2012.—№6. С. 34–39.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашения № 14.A18.21.0356 и № 8210)

ОБОБЩЕННЫЙ СЛАБЫЙ ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ С ОШИБКАМИ В ПРОЕКТОРЕ[1]

Федотов Н.Н. (Москва)
nikitafedot@yandex.ru

Пусть $\mathbf{D}$ — словарь в действительном гильбертовом пространстве H (то есть $\overline{span\mathbf{D}} = H$ и $\|e\| = 1$ для всех $e \in \mathbf{D}$), $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$. Для $f \in H$ индуктивно определим последовательности аппроксимантов $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ и остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$. Положим $r_0 = f$, $f_0 = 0$; если уже определены r_n и f_n, найдем $e_{n+1} \in \mathbf{D}$ такой, что $|\langle r_n, e_{n+1}\rangle| \geqslant t_{n+1} \sup_{e\in\mathbf{D}} |\langle r_n, e\rangle| - \xi_{n+1}$, и положим $f_{n+1} = \mathbf{Pr}_{n+1}(f) + g_{n+1}$, $r_{n+1} = f - f_{n+1}$, где $\mathbf{Pr}_k$ — оператор ортогонального проектирования на $< e_1, \dots, e_k >$.

Данный метод является обобщением ортогонального жадного алгоритма (OGA, [1]–[3]). Последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ моделируют, соответственно, относительные и абсолютные ошибки при выборе очередного элемента словаря, а g_n — ошибки при проектировании.

Теорема. *Если существует возрастающая подпоследовательность $\{n_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такая, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} t_{n_m}^2 = \infty$, $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\xi_{n_m}}{t_{n_m}} = 0$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\|g_{n_m-1}\|}{t_{n_{m-1}}} = 0$, а кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$, то для каждого $f \in H$ аппроксиманты f_n сходятся к f при $n \to \infty$. Условие $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$ является необходимым для сходимости.*

Приведенная теорема обобщает результаты работ [2]–[3], связанные с устойчивостью OGA.

Литература

1. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Some remarks on Greedy Algorithms Adv. Comput. Math. 1996. V. 5. P. 173–187.

2. *Temlyakov V. N.* Weak greedy algorithms Adv. Comput. Math. 2000. V. 12. P. 213–227.

3. *Галатенко В. В.* Сходимость слабых ортогональных жадных приближений. Материалы Воронежской зимней математической школы “Современные методы теории функций и смежные проблем”. 2011. С. 62–63.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11–01–00476).

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Феоктистов В.В., Мякинник О.О. (Москва)
ww.pheoktistow@yandex.ru, olga.mknk@ipmtel.ru

Элементарные волны X_k, $X_k \equiv (x_k + a^k t)$, которые распространяются со скоростью a^k в направлении координатных осей OX_k и являются решением уравнения

$$\frac{\partial u(t,x_k)}{\partial t} = a^k \frac{\partial u(t,x_k)}{\partial x_k}, \qquad k = \overline{1,s}, \tag{1}$$

моделирующего волновой процесс в одномерной среде, использованы в качестве аргументов функции W_p^α, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $\alpha_k \in N_0$,

$$W_p^\alpha(X_1, \ldots, X_p) \equiv X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_p^{\alpha_p}, \qquad p = \overline{1,s}, \tag{2}$$

которая задает закон взаимодействия p элементарных волн, для построения решения уравнения

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{s} a^k \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_k}, \quad x = (x_1, \ldots, x_s). \tag{3}$$

Представление о взаимодействии волн перенесено на решение системы уравнений. Из элементов последовательности произвольных числовых квадратных некоммутативных, вообще говоря, матриц

$$(A_1, A_2, \ldots, A_s) \tag{4}$$

порядка n построены выражения

$$X_k \equiv (Ex_k + A_k t), \quad E \cdot dx_k = A_k \cdot dt, \quad k = \overline{1,s}, \tag{5}$$

(E — единичная матрица), которые названы [2]–[3] бегущими волнами с матричными коэффициентами для системы

$$E\,\frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{s} A_k \frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial x_k}, \quad \vec{u}(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_n(t,x))^\top. \tag{6}$$

Такое определение согласуется со свойством волны при развитии во времени и пространстве сохранять некоторое состояние [1].

На волнах (5), обладающих перестановочными свойствами

$$[A_i, X_j] = [X_i, A_j], \quad [X_i, X_j] = t\cdot[A_i, X_j], \qquad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,s}, \tag{7}$$

задан оператор волнового взаимодействия W_p^α, который характеризуется размерностью p и порядком $\|\alpha\|$ [2]–[3]. Для оператора установлены правила дифференцирования.

Общее решение системы (6) представлено как разложение в ряд по взаимодействующим бегущим волнам (5). Для задачи Коши разложение по (5) представляет собой иную форму организации ряда, фигурирующего в теореме Коши-Ковалевской. При этом действие соответствующей системе операторной экспоненты на аналитическую функцию порождает операторы волнового взаимодействия, для которых аналитическая функция задает начальное состояние, а операторная экспонента — множество волн-аргументов.

Построения, выполненные по отношению к системе (6), вместе с их установленными свойствами названы моделью волнового взаимодействия для этой системы.

Литература

[1] Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. — М.: Мир, 1983. — 136 с.

[2] Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Структура ряда для решения системы уравнений с частными производными 1-го порядка // Вестник МГТУ. Серия "Естественные науки". — 2009. No 4 . — С. 3–22.

[3] Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Оператор волнового взаимодействия и нормальная форма системы линейных уравнений в частных производных 1-го порядка // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXI". — Воронеж, 2010. — С. 232–233.

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА

Фетисова А.В. (Воронеж)

alex_rk07@mail.ru

Рассмотрим нелинейную систему Лотки-Вольтерра с периодическими коэффициентами

$$\dot{\mathbf{N}}_i = N_i \left(b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) N_j \right), \tag{1}$$

где $b_i(t)$ и $a_{ij}(t)$ - непрерывные ω-периодические функции.

Предположим, что

$$b_i(t) > 0, \qquad i = 1, 2, ..., n; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} a_{ii}(t) > 0, \qquad a_{ij}(t) \leqslant 0 \qquad \text{при} \qquad i \neq j \qquad \text{и все главные} \\ \text{миноры матрицы} \qquad A(t) \equiv (a_{ij}(t)) \qquad \text{положительны.} \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть выполнено дифференциальное условие вогнутости Красносельского [1, с. 236]

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) N_i N_j \geqslant 0 \qquad \text{при} \qquad N_1 \geqslant 0, ..., N_n \geqslant 0. \tag{4}$$

Тогда система (1) имеет единственное ненулевое ω-периодическое решение $\hat{N}_i(t)$, и это решение асимптотически устойчиво в целом, то есть

$$|N_i(t) - \hat{N}_i(t)| \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to +\infty, \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{5}$$

для любого положительного решения $N_i(t) > 0$ системы (1).

Литература

1. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. - М: Наука, 1966.-332с.

2. Колесов Ю.С., Красносельский М.А. Устойчивость по Ляпунову и уравнения с вогнутыми операторами // Докл. АН СССР - 1962. Т.145, № 6.-с.1217-1220.

3. Макеенкова А.В. Положительные периодические решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. - Препринт / ВГУ. №35. - Воронеж, 2010. - 48 с.

4. Пых Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. - М: Наука, 1983.-184 с.

МИНИМИЗИРУЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРИБЛИЖЕННО ИЗВЕСТНЫМИ ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ ПРИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ[1]

Фролагина Е.В. (Нижний Новгород)

frolaginaev@gmail.com

Рассматривается задача оптимального управления с фиксированным временем $T > 0$ при фазовых ограничениях:

$$(1) \qquad \int_0^T F(t, x[u](t), u(t))dt \to \inf, \;\; g(t, x[u](t)) \leqslant 0, \; u \in D,$$

где $D = \{u \in L^m_\infty(0,T) : u(t) \in U \text{ п.в. на } (0,T)\}$, $U \subset R^m$ – компакт, $x[u](t)$ – соответствующее управлению $u \in D$ абсолютно непрерывное решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \; x(0) = x_0, \; t \in [0,T], \; x \in R^n.$$

Исходные данные задачи (1), т.е. функции $F : [0,T] \times R^n \times R^m \to R$, $f : [0,T] \times R^n \times R^m \to R^n$, $g : [0,T] \times R^n \to R$ удовлетворяют традиционным для подобного рода задач условиям.

Применительно к задаче (1) и в развитие результатов [1] обсуждаются необходимые и достаточные условия на элементы минимизирующих последовательностей допустимых управлений, регуляризирующие свойства принципа максимума Понтрягина для минимизирующих последовательностей. Отличительной особенностью рассматриваемой постановки задачи (1) является то, что ее исходные данные могут задаваться лишь приближенно. Как известно [1], в подобного рода ситуациях естественно в качестве базового понятия теории использовать понятие минимизирующей последовательности, а не классическое понятие оптимального управления.

Литература

1. *Сумин М.И., Трушина Е.В.* Минимизирующие последовательности в оптимальном управлении с приближенно известными исходными данными и регуляризирующие свойства принципа максимума // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. №2. С. 220-236.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00199-а)

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕЗИКОВИЧА

Хасанов Ю. (Душанбе, Таджикистан)
yukhas60@mail.ru

Функцию $f(x)$ будем называть почти–периодической в смысле Безиковича, если:

1. $|f(x)|^p$ $(p \geqslant 1)$ измерима и интегрируема в смысле Лебега на любом конечном отрезке;

2. $D_{B_p}\{f(x)\} = \left\{\overline{\lim\limits_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^p dx\right\}^{1/p} < \infty;$

3. существует последовательность тригонометрических сумм $\{P_n(x)\}$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \exp(i\lambda_k x),$$

для которой

$$\lim_{n\to\infty} D_{B_p}\{f(x) - P_n(x)\} = 0.$$

Через B_p $(p \geqslant 1)$, обозначим пространство почти-периодических в смысле Безиковича функций по конечной норме

$$\|f(x)\|_{B_p} = \left\{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Каждой функции $f(x) \in B_p$ можно отнести ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n-1}^{\infty} A_n \exp(i\lambda_n x),$$

где

$$A_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\exp(-i\lambda_n x)dx$$

– коэффициенты Фурье функции $f(x) \in B_p$, а числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – показателями (спектром)Фурье функции $f(x) \in B_p$.

В работе приводятся необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta} n^{\gamma} \ (0 < \beta < 2, \ 0 \leqslant \gamma < 1). \tag{1}$$

1. Пусть показатели Фурье функции $f(x) \in B_2$ имеют предельную точку в бесконечности, т.е.

$$\lambda_n < \lambda_{n+1} \ (n = 1, 2, \cdots); \ \lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$$

и пусть $n^{\alpha} = O(\lambda_n)$ $(\alpha > 0)$. Если при $k > \frac{\gamma+1-\beta/2}{\alpha\beta}$ выполнены условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} \omega_k^{\beta}(f; n^{-1})_{B_2} < \infty \ (\rho = \frac{\gamma + 1 - \beta/2}{\alpha}), \tag{2}$$

то ряд (1) сходится. Здесь в качестве структурной характеристики функции использован модуль непрерывности порядка k функции $f(x) \in B_2$

$$\omega_k(f; h)_{B_2} = \underset{|t| \leqslant h}{sup} \left\| \Delta_t^k f(x) \right\|_{B_2},$$

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \tbinom{k}{r} f(x + rt) \quad (h > 0, k \in N).$$

Если предположить, что коэффициенты Фурье рассматриваемой функции $\{A_n\}$ монотонно убывают, то условия (2) будут также необходимыми для сходимости ряда (1).

Далее рассматриваются ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \, |A_n|^{\beta} \quad (0 < \beta < 2), \tag{3}$$

где $\varphi(n)$- четная, положительная функция, определенная на множестве целых чисел.

Если спектр $\Lambda \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ функции $f(x) \in B_2$ имеют предельную точку в бесконечности и при $0 < \beta < 2$ выполнено условие

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2^{\nu}}}{\lambda_{2^{\nu-1}}} \right)^{k\beta} \psi_{\beta}(2^{\nu}) \omega_k^{\beta}(f; \lambda_{2^{\nu-1}}^{-1})_{B_2} < \infty,$$

то ряд (3) сходится, где

$$\psi_\beta(2^\nu) = \left\{ \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^\nu+1} [\varphi(n)]^{\frac{2}{2-\beta}} \right\}^{1-\beta/2}.$$

2. Пусть показатели Фурье функции $f(x) \in B_2$ имеют предельную точку в нуле, т.е.

$$\lambda_n < \lambda_{n-1} \ (n = 1, 2, \cdots); \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

и пусть $\lambda_n = O(n^{-\alpha})$ $(\alpha > 0)$. Если при $k > \frac{\gamma+1-\beta/2}{\alpha\beta}$ выполнены условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} W_k^\beta(f; n^{-1})_{B_2} < \infty \ \ (\rho = \frac{\gamma + 1 - \beta/2}{\alpha}), \tag{4}$$

то ряд (1) сходится.

Если коэффициенты Фурье функции $f(x) \in B_2$ монотонно убывают, то условия (4) являются необходимыми для сходимости ряда (1).

Величину

$$W_k(f; H)_{B_2} = \underset{T \geqslant H}{Sup} \|f_{T^k}(x)\|_{B_2} \ \ (H > 0, k \in N),$$

где

$$f_{T^k}(x) = (2T)^{-k} \int_{x-T}^{x+T} dt_1 \int_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \dots \int_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T} dt_{k-1} \int_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T} f(t_k) dt_k.$$

назовем модулем усреднения порядка k функции $f(x) \in B_2$.

Если показатели Фурье $\Lambda \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ функции $f(x) \in B_2$ имеют предельную точку в нуле, тогда при $0 < \beta < 2$ условие

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\beta(2^\nu) W_k^\beta(f; \lambda_{2^{\nu-1}}^{-1})_{B_2} < \infty,$$

влечет сходимости ряда (3).

ПОСТРОЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НУЛЬ-РЯДОВ В ОДНОМЕРНОМ, КРАТНОМ И СЧЕТНО-КРАТНОМ СЛУЧАЕ [1]

Холщевникова Н.Н. (Москва)

kholshchevnikova@gmail.ru

В 1916г. Д.Е.Меньшов [1,С.31] построил тригонометрический ряд, почти всюду, но не всюду, сходящийся к нулю. Такие ряды называют нуль-рядами и существование такого ряда оказалось большим сюрпризом для математической общественности.

Определение 1. *Множество $E \subset [0, 2\pi)$ называется M-множеством, если существует тригонометрический ряд,*

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1}$$

сходящийся к нулю на $[0, 2\pi) \setminus E$, не все коэффициенты которого равны нулю. Если множество E не является M-множеством, оно называется U-множеством или множеством единственности.

Определение 2. *Множество $E \subset [0, 2\pi)$ называется M_0-множеством или M-множеством в узком смысле, если существует тригонометрический ряд Фурье-Стилтьеса, сходящийся к нулю на $[0, 2\pi) \setminus E$, не все коэффициенты которого равны нулю. Если множество E не является M_0-множеством, оно называется U_0-множеством или множеством единственности в широком смысле.*

Построенный Д.Е.Меньшовым нуль-ряд является рядом Фурье-Стилтьеса. Понятно, что всякое M_0-множество является также и M-множеством. Вопрос, верно ли обратное, долго оставался открытым. Пример M-множества, которое не является M_0-множеством, построил в 1954г. Пятецкий-Шапиро [2].

Многие вопросы, которые решены для M_0-множеств, до сих пор остаются открытыми для M-множеств. Например, если E есть M_0-множество, то существует совершенное подмножество множества E, которое тоже является M_0-множеством. Аналогичный вопрос для M-множеств открыт.

Пример Д.Е.Меньшова решил вопрос о существовании нуль-рядов и M-множеств меры нуль не только в одномерном случае, но и для кратных и для счетно-кратных тригонометрических

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00321)

рядов для различных видов сходимости. Вопрос же о существовании множеств единственности в кратном случае долгое время оставался открытым. В 1990гг. в теории единственности кратных тригонометрических рядов произошло существенное продвижение. Ш.Т.Тетунашвили [3]построил широкий класс множеств единственности для кратных тригонометрических рядов в случае сходимости по прямоугольникам. В частности он доказал, что счетное множество является множеством единственности.

Пусть $S^1(x_1)$ и $S^2(x_2)$ тригонометрические ряды. Ряд, $S(x_1, x_2)$ полученный формальным почленным перемножением этих рядов, имеет прямоугольные частичные суммы:

$S_{M,N}(x_1, x_2) = S^1_M(x_1)S^2_N(x_2)$, где $S^1_M(x_1)$ и $S^2_N(x_2)$ частичные суммы первых двух рядов.

Пусть оба ряда $S^1(x_1)$ и $S^2(x_2)$ нуль-ряды, а E_1 и E_2, соответственно, множества, где они не сходятся к нулю, являющиеся, как видно из определений, M-множествами меры нуль. Тогда их формальное произведение - ряд $S(x_1, x_2)$ тоже является нуль-рядом, который сходится к нулю вне множества $E = (E_1 \times [0, 1)) \cup ([0, 1) \times E_2)$.

Теперь обратимся к счетно-кратным рядам. Системой Йессена называется система функций счетного множества переменных $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...), x_n \in \mathbb{R}$:

$$\prod_{r=1}^{p} e^{2\pi i n_r x_r} = \theta_{n_1,...,n_p}(x), \quad p \in \mathbb{N},\ n_r \in \mathbb{Z}.$$

Функции системы можно считать определенными на бесконечномерном торе $\mathbb{T}$, рассматриваемом как декартово произведение счетного множества одномерных торов $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{T}^\infty = \{x = (x_1, ..., x_n, ...) : 0 \leqslant x_n < 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

Тор $\mathbb{T}^\infty$, снабженный тихоновской топологией, является метризуемым компактным пространством. На торе $\mathbb{T}^\infty$ определяется мера Лебега, как на пространстве-произведении пространств $\mathbb{T}$ с одномерной мерой Лебега.

Система Йессена является полной ортонормированной системой на $\mathbb{T}^\infty$.

Обозначим через $\mathbb{Z}^{<\infty}$ множество бесконечномерных векторов $n = (n_1, ..., n_p, ...)$ с целочисленными координатами $n_p \in \mathbb{Z}$ $(p \in \mathbb{N})$, лишь конечное число которых отлично от нуля. Рассмотрим ряды по системе Йессена:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^{<\infty}} a_n e^{2\pi i n x}, \qquad \text{где}\, x\in\mathbb{T}^\infty,\ nx=\sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k,\ a_n\in\mathbb{C}. \qquad (2)$$

Прямоугольные частичные суммы этого ряда имеют вид

$$S_{p,N_1,\ldots,N_p}(x)=\sum_{n_1=-N_1}^{N_1}\ldots\sum_{n_p=-N_p}^{N_p} a_{n_1,\ldots,n_p} e^{2\pi i(n_1x_1+\ldots+n_px_p)}$$

Ряд (2) называется сходящимся по прямоугольникам в точке $x\in\mathbb{T}^\infty$ к числу s , если для любого $\varepsilon>0$ существует номер P такой, что для всякого $p\geqslant P$ найдется такое натуральное N, что для всех $N_1,\ldots,N_p\geqslant N$ выполняется неравенство

$$|S_{p,N_1,\ldots,N_p}(x)-s|<\varepsilon.$$

Пример. *Счетно-кратный тригонометрический ряд* $\sum_{p,n_1,\ldots,n_p}\varepsilon_{n_1,\ldots,n_p}\cos 2\pi n_1x_1\ldots\cos 2\pi n_px_p$, *где*

$$\varepsilon_{n_1,\ldots,n_p}=\begin{cases}1, & \textit{если } n_i=0 \textit{ или } 1 \textit{ для каждого } i=1,2,\ldots,p,\\ 0, & \textit{в противном случае,}\end{cases}$$

сходится по прямоугольникам к нулю почти всюду на $\mathbb{T}^\infty$.

Доказательство проводится с помощью усиленного закона больших чисел.

Литература

[1] *Меньшов Д.Е.* Избранные труды: математика. М.:Факториал. 1997.

[2] *Пятецкий-Шапиро И.И.*Дополнение к работе "К проблеме единственности разложения функций в тригонометрический ряд"// Ученые записки МГУ. 1954, вып.165. Математика, Т.VII.С.79-97.

[3] *Тетунашвили Ш.Т.* О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму // Матем. сборник. 1991. Т.182. N 8. С.1158-1176.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МЕХАНИКЕ УПРУГИХ СИСТЕМ

Хребтюгова О.А. (Ярославль)

olgax29@yandex.ru

Рассматривается начально-краевая задача

$$J^*\ddot{\theta} + \int_0^1 (x+a)y_{tt}(x,t)dx + \varepsilon \int_0^1 \varphi_{tt}(x,t)dx = M(t), \tag{1}$$

$$-\varepsilon y_{tt} + \gamma(y_{xx} - \varphi_x) = \varepsilon(x+a)\ddot{\theta}, \tag{2}$$

$$-\varepsilon^2\varphi_{tt} + \varepsilon\varphi_{xx} + \gamma(y_x - \varphi) = \varepsilon^2\ddot{\theta}, \tag{3}$$

$$y(0,t) = \varphi(0,t) = 0, y_x(1,t) - \varphi(1,t) = \varphi_x(1,t) = 0, \tag{4}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1(x), y(x,0) = y_0(x), y_t(x,0) = y_1(x),$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \tag{5}$$

возникающая в механике упругих систем, где J^*, a, γ, ε - положительные параметры. Начально-краевая задача (1)-(5) приведена в безразмерных переменных.

Рассмотрены следующие задачи оптимального управления.

Задача 1. *Определить функцию $M(t) \in L_2(0,T)$, переводящую решение начально-краевой задачи (1)-(4) из начального состояния (5) в конечное*

$$\theta(T) = \theta_T, \quad \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T, \quad y(x,T) = y_T(x), \quad y_t(x,T) = \dot{y}_T(x) \tag{6}$$

в заданный момент времени T и минимизирующую функционал

$$\Phi(M) = \|M(t)\|^2_{L_2(0,T)}/2. \tag{7}$$

Задача 2. *(Задача быстродействия) Определить функцию $M(t) \in L_2(0,T)$, $\Phi(M) \leqslant L < \infty$, переводящую решение начально-краевой задачи (1)-(4) из (5) в (6) за минимальное время T.*

Управление получено в виде рядов по априори построенным функциям.

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ОПЕРАТОРЫ ДИРАКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

Хромов А.П. (Саратов), Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж)
KhromovAP@info.sgu.ru, bmsh2001@mail.ru

Рассмотрим операторы

$$L^{\pm}y = y'(x) \pm q(x)y(1-x), \quad y(0) = y(1), \quad x \in [0,1],$$

и связанный с ними оператор Дирака:

$$(Lz)(x) = Bz'(x) + Q(x)z(x), \quad z(0) = z(1), \quad x \in [0,1],$$

где $y(x)$ — скалярная функция, $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, T — знак транспонирования, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(1-x) & 0 \end{pmatrix}$, $q(x) \in C[0,1]$ — комплекснозначная функция.

Теорема 1. *Собственные значения оператора L^+ (L^-) совпадают с собственными значениями оператора Дирака $\widetilde{L}^+$ $(\widetilde{L}^-)$*

$$(\widetilde{L}^{\pm}z)(x) = Bz'(x) \pm Q(x)z(x)$$

с условиями Дирихле $z_1(0) = z_2(0)$, $z_1(1/2) = z_2(1/2)$, рассматриваемого на отрезке $[0, 1/2]$.

Теорема 2. *Собственные значения $\lambda_n^{\pm}$ операторов $L^{\pm}$, достаточно большие по модулю, простые, и для них справедливы асимптотические формулы*

$$\lambda_n^{\pm} = 2n\pi i + o(1), \quad (n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots)$$

Используя теорему 1 и результаты из [2] можно получить и уточненные асимптотические формулы для $\lambda_n^{\pm}$ (фактически полные асимптотические разложения).

Теорема 3. *Собственные значения оператора L образуют две бесконечные последовательности с асимптотикой*

$\lambda_n' = 2n\pi i + \varepsilon_n', \quad \lambda_n'' = 2n\pi i + \varepsilon_n'', \quad (n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots),$ *где $\varepsilon_n', \varepsilon_n'' \to 0$ при $n \to \pm\infty$. В случае $\varepsilon_n' \neq \varepsilon_n''$ они простые, а при $\varepsilon_n' = \varepsilon_n''$ — двукратные. При больших $|n|$ $\lambda_n' = \lambda_n^+$, $\lambda_n'' = \lambda_n^-$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270)

Обозначим через P_n проекторы Рисса оператора L

$$P_n = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} R_\lambda d\lambda,$$

где $\gamma_n = \{\lambda|\,|\lambda - 2n\pi i| = \delta\}$, $\delta > 0$ достаточно мало, $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор).

Теорема 4. *При $|n|$ больших имеют место формулы*

$$P_n\widetilde{f} = (\widetilde{f}, w_n^+)v_n^+(x) + (\widetilde{f}, w_n^-)v_n^-(x),$$

где $\widetilde{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_i(x) \in L_2[0,1]$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2^2[0,1]$, $v_n^\pm(x) = (\varphi_n^\pm(x), \pm\varphi_n^\pm(1-x))^T$,
$w_n^\pm(x) = \frac{1}{2}(\psi_n^\pm(x), \pm\psi_n^\pm(1-x))^T$, $\varphi_n^\pm(x)$ ($\psi_n^\pm(x)$) есть собственные функции операторов $L^\pm$ ($(L^\pm))^*$) для собственных чисел $\lambda_n^\pm$ ($\overline{\lambda}_n^\pm$), $(\varphi_n^\pm(x), \psi_n^\pm(x)) = 1$.

Функции $v_n^+(x)$ ($v_n^-(x)$) являются собственными функциями оператора L для собственных чисел λ_n' (λ_n'').

Теорема 5. *Системы $G = \{v_n^+(x)\}\bigcup\{v_n^-(x)\}$ и*
$G^* = \{w_n^+(x)\}\bigcup\{w_n^-(x)\}$ биортогональны и образуют базисы Рисса в $L_2^2[0,1]$. Считаем, что в группу $\{v_n^+(x)\}$ входят все $v_n^+(x)$ с номерами $n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots$, и еще оставшееся конечное число, не получивших номеров собственных и присоединенных функций оператора L, полученных из соответствующих собственных и присоединенных функций оператора L^+, и это относится к остальным группам в G и G^*.

Обозначим через $H_2[0,1]$ ($H_2^\perp[0,1]$) подпространства в $L_2^2[0,1]$ определяемые следующим образом:
$H_2[0,1] = \{\widetilde{f}(x)\big|\widetilde{f}(x) = (f(x), f(1-x))^T, f(x) \in L_2[0,1]\}$,
$H_2^\perp[0,1] = \{\widetilde{g}(x)\big|\widetilde{g}(x) = (g(x), -g(1-x))^T, g(x) \in L_2[0,1]\}$.
$H_2^\perp[0,1]$ есть ортогональное дополнение $H_2[0,1]$ до $L_2[0,1]$.

Теорема 6. *Системы $\{v_n^+(x)\}$ и $\{w_n^+(x)\}$ ($\{v_n^-(x)\}$ и $\{w_n^-(x)\}$) биортогональны в $H_2[0,1]$ ($H_2^\perp[0,1]$) и образуют базисы Рисса в $H_2[0,1]$ ($H_2^\perp[0,1]$).*

Замечание. Потенциал $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$ общего вида представим в виде $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x)$, где

$$Q_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & g(x) \\ g(1-x) & 0 \end{pmatrix},\ Q_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ -q(1-x) & 0 \end{pmatrix},$$

$g(x) = \frac{1}{2}(q_2(x) + q_1(1-x))$, $q(x) = \frac{1}{2}(q_2(x) - q_1(1-x))$.

Покажем, что система Дирака с потенциалом $Q_2(x)$ сводится к рассмотренному случаю. В самом деле, в системе Дирака

$$Bz'(x) + Q_2(x)z(x) = \lambda z(x) + \widetilde{f}(x), \quad z(0) = z(1), \tag{1}$$

перейдем к новой неизвестной вектор-функции $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$, где $u_1(x) = z_1(x)$, $u_2(x) = -iz_2(x)$. Тогда (1) перейдет в

$$Bu'(x) + i \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(1-x) & 0 \end{pmatrix} u(x) = \lambda u(x) + \widehat{f}(x), \quad u(0) = u(1),$$

где $\widehat{f}(x) = (f_1(x), -if_2(x))^T$.

Эти результаты уточняют некоторые факты работ [1]–[3].

Литература

1. *P.Djakov, B.Mityagin* Bari-Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators // Math. Nachr. 283:3 (2010). P. 443-462.

2. *Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Хромов А.П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака// Докл. РАН. - 2012. - Т. 443, № 4. - С. 414-417.

3. *Бурлуцкая М.Ш., Корнев В.В., Хромов А.П.* Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012, том 52, № 9. С. 1621-1632.

ОЦЕНКА СНИЗУ КОЛМОГОРОВСКОГО ПОПЕРЕЧНИКА В НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Царьков И.Г. (Москва)

tsar@mech.math.msu.su

Пусть X – банахово пространство размерности N, B – выпуклое тело в X, порождающее непрерывный функционал Минковского $p : X \to \mathbb{R}_+$, который определяет на X несимметричную норму. Наша цель: получить оценку снизу для колмогоровского поперечника $d_k(K, X) = \inf\limits_{x \in X, L \in \mathcal{L}_k} E_+(K, L + x)$ для некоторого ком-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00442-а)

пакта $K \subset X$. Здесь $\mathcal{L}_k$ – класс всех подпространств размерности $\leqslant k$; $E_+(K, L+x)$ – правое уклонение компакта K от плоскости $L+x$, т.е. величина $\inf\{\varepsilon > 0 \mid x \in X, L \in \mathcal{L}_k; \varepsilon \cdot B + L + x \supset K\} = \sup\limits_{z\in K} \inf\limits_{y\in L+x} p(z-y)$. Через $\mathring{d}_k(K,X)$ обозначим величину $\inf\limits_{L\in\mathcal{L}_k} E_+(K,L)$. Для оценки снизу будем использовать следующую величину $\Phi_m(K,X) = \sup\{\varepsilon \geqslant 0 \mid l \in X/L, L \in \mathcal{L}_{N-m-1}; K/L \supset \varepsilon \cdot B/L + l\}$. Здесь M/L – результат факторизации множества M по плоскости L. Через $b_k(K,X)$ обозначим бернштейновский поперечник, т.е. величину $\sup\{\varepsilon \geqslant 0 \mid x \in X, L \in \mathcal{L}_{k+1}; \varepsilon \cdot B \cap (x+L) \subset K\}$. Для всякого выпуклого компакта $M \subset X$ рассмотрим множество $M^\circ = \{[x^*/\sup\limits_K x^*, x^*/\inf\limits_K x^*] \mid x^* \in X^* \setminus \{0\}\}$.

Теорема 1. *Имеют место соотношения:*

$$d_m(K,X) \geqslant \Phi_m(K,X) \quad (m = \overline{0, N-1}).$$

Теорема 2. *Пусть $x_0 \in X$ и $L_0 \in \mathcal{L}_m$ таковы, что $d_m(K,X) = E_+(K, L_0+x_0) = E_+(K-x_0, L_0)$ $(m = \overline{0, N-1})$. Тогда $d_m(K,X) = E_+(K, L_0+x_0) = E_+(K-x_0, L_0) = \mathring{d}_k(K-x_0, X) \geqslant b_m(B^\circ, X^\circ)$, где X° – пространство X^* с несимметричной нормой, определяемой как функционал Минковского тела $(K-x_0)^\circ$.*

СТРУКТУРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВ СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ В КЛАССАХ ОРЛИЧА[1]

Цукарева З.Н. (Москва)

zoyatsukareva@gmail.com

Пусть $M = \{1, \ldots, N\}, N \geqslant 2$, $J_k = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset M, j_1 < \cdots < j_k$, при $1 \leqslant k \leqslant N$ или $J_k = \varnothing$ при $k = 0$. Обозначим $\mathbb{R}[J_k] = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \colon x_j = 0$ при $j \in M \setminus J_k\}$, $\mathbb{T}[J_k] = \{x \in \mathbb{R}[J_k] \colon -\pi \leqslant x_j \leqslant \pi$ при $j \in J_k\}$, и, в частности, $\mathbb{T}[J_N] \equiv \mathbb{T}^N = [-\pi, \pi]^N$.

Пусть $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}^k_+$, $j_v \in J_k$, $v = 1, \ldots, k$. Символом $n^{(\lambda)}[J_k] = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}^N_+$ обозначим N-мерный вектор,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00321)

у которого компоненты n_j, $j \in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей ($n_j = n_j^{(\lambda_j)}$, $n_j^{(\lambda_j+1)}/n_j^{(\lambda_j)} \geqslant q > 1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$).

Далее, пусть $\Omega \subset \mathbb{T}^N$ — произвольное (непустое) открытое множество. Положим $W[J_s] = \Omega[J_s] \times \mathbb{T}[M \setminus J_s]$, $s = 1, 2$, где $\Omega[J_s] = pr_{(J_s)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция множества Ω на пространство $\mathbb{R}[J_s]$. Определим множества $W_s = W_s(J_k) = \bigcup\limits_{J_s \subset M \setminus J_k} W[J_s]$ и $W_s^0 = W_s^0(J_k) = \bigcap\limits_{J_s \subset M \setminus J_k} W[J_s]$.

Пусть $E \subset \mathbb{T}^N$, $0 < \mu E < (2\pi)^N$ (μ — мера Лебега). Как известно (см. [1]), для сходимости почти всюду (п.в.) к нулю кратного ряда Фурье (суммируемого по прямоугольникам) функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$ на E достаточно равенства нулю функции $f(x)$ на следующем множестве: при $p > 1$ — на $W_2(J_0)$ (таком, что $\mu(E \setminus W_2^0(J_0)) = 0$) и при $p = 1$ — на $W_1(J_0)$ (таком, что $\mu(E \setminus W_1^0(J_0)) = 0$).

С другой стороны (см. [2]), если "номер" частичной суммы $S_n(x; f)$, $n = n^{(\lambda)}[J_k]$, $1 \leqslant k \leqslant N-2, N \geqslant 3$, то для сходимости п.в. к нулю на множестве E такой "J_k-лакунарной последовательности частичных сумм" $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$ при $n^{(\lambda)}[J_k] \to \infty$ (т.е. $n_j \to \infty$ при $j \in M \setminus J_k$ и $\lambda_j \to \infty$ при $j \in J_k$) в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, достаточно, чтобы $f(x) = 0$ на множестве $W_2(J_k)$ (таком, что $\mu(E \setminus W_2^0(J_k)) = 0$), вообще говоря, "меньшем", чем $W_2(J_0)$. И аналогичный результат не справедлив в классах $L_1(\mathbb{T}^N)$ (см. [3]) и $\varphi(L)(\mathbb{T}^N)$ (где φ: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ и $\varphi(u) = o(u \ln \ln u)$) (см. [4]).

Таким образом, возникает вопрос, существуют ли классы Орлича, в которых лакунарность последовательности частичных сумм позволяет ослабить условия, накладываемые на множество для сходимости п.в. на нем $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$?

Теорема 1. *Для любого $J_k \subset M$, $1 \leqslant k \leqslant N-2$, $N \geqslant 3$, и для любой функции $f \in L(\log^+ L)^{3k+2}(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $W(J_k)$, "J_k-лакунарная последовательность частичных сумм" ряда Фурье функции f сходится п.в. к нулю на множестве $W^0(J_k)$, точнее,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ n_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = 0 \ \textit{для почти всех } x \in W^0(J_k).$$

Литература

1. *Блошанский И. Л.*// Изв. АН СССР. Серия матем. 1985. Т.

49(2). С. 243-282.

2. *Блошанский И. Л., Лифанцева О. В.*// Мат. заметки. 2008. Т. 84(3). С. 334-347.

3. *Блошанский И. Л., Лифанцева О. В.*// Совр. проблемы теории функций и их прил. Труды 15-ой Сарат. зимней шк. Саратов. 2010. С. 29-30.

4. *Цукарева З. Н.*// Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Серия Физика-математика. 2012. №1. С. 18-22.

О ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИОНАЛОВ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Чернов А.В. (Нижний Новгород)

chavnn@mail.ru

Пусть $n, m, \ell, s, \kappa \in \mathbf{N}$ – заданы; $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ – измеримо и ограничено, $\Pi = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\kappa} \Pi_j$, $w = \big\{w_{11}, \ldots, w_{1,\kappa}; \ldots; w_{s1}, \ldots, w_{s,\kappa}\big\} \in \mathbf{R}^\mu$, $\mu = s\,\kappa$, $W = \Big\{w \,:\, w_{ij} \in [\alpha_i; \beta_i],\, i = \overline{1,s},\, j = \overline{1,\kappa}\Big\}$; $\mathcal{D} = \Big\{u \in L_\infty^s(\Pi) : u_i(t) \equiv w_{ij} \in [\alpha_i; \beta_i],\, t \in \Pi_j,\, i = \overline{1,s},\, j = \overline{1,\kappa}\Big\}$; $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$, $q > p$; $\mathcal{Z} = L_p(\Pi)$, $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z}_\mathcal{X} = L_\sigma(\Pi)$, $q^{-1} + \sigma^{-1} = p^{-1}$; $\mathcal{U} = L_\infty(\Pi)$, $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ – ЛОО. Рассмотрим уравнение [1]

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f\big(., x(.), u(.)\big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell. \qquad (1)$$

Здесь $u \in \mathcal{D}$ – управление, $\theta \in \mathcal{X}^\ell$; $f : \Pi \times \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ – функция, дифференцируемая по $y \in \mathbf{R}^\ell$, $u \in \mathbf{R}^s$ и вместе с f'_y, f'_u измеримая по $t \in \Pi$ и непрерывная по $\{y; u\}$. Предположения: $\mathbf{F}_1$) $f\big(., y, u\big) \in \mathcal{Z}^m$ $\forall y \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{U}^s$; $\mathbf{F}_2$) $f'_y(., y, u) \in \mathcal{Z}_\mathcal{X}^{m\times\ell}$, $f'_u(., y, u) \in \mathcal{Z}^{m\times s}$ $\forall \{y, u\} \in \mathcal{X}^\ell \times \mathcal{U}^s$; $\mathbf{A}_1$) $\forall y \in \mathcal{Z}_\mathcal{X}^{m\times\ell}$ ЛОО $A_{\sim y} : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{X}^\ell$ и $A_{y\sim} : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{Z}^m$, определяемые формулами: $A_{\sim y}[x] = A[yx]$, $x \in \mathcal{X}^\ell$, $A_{y\sim}[z] = yA[z]$, $z \in \mathcal{Z}^m$, квазинильпотентны; $\mathbf{A}_2$) ЛОО $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ имеет положительную мажоранту $B : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$, причем $\forall y \in \mathcal{Z}_\mathcal{X}$ ЛОО $B_y : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ определяемый как $B_y[x] = B[yx]$, $x \in \mathcal{X}$, квазинильпотентен; $\mathbf{H}$) Уравнение (1) $\forall u \in \mathcal{D}$ имеет единственное решение x_u, причем $\exists\, x_* \in \mathcal{X}$: $|x_u| \leqslant x_*$ $\forall u \in \mathcal{D}$. Рассмотрим функционал $J[u] = \Phi\Big[F(., x_u, u)\Big]$, где $\Phi \in \Big(\widehat{\mathcal{Z}}^{\hat m}\Big)^*$, $\widehat{\mathcal{Z}} = L_{\hat p}(\Pi)$,

[1]Поддержка Минобрнауки РФ в рамках гос. задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными вузами (шифр заявки 1.1907.2011)

$\hat{p} \in [1;q]$, $\hat{p} < \infty$; $F(t,x,v)$ удовлетворяет $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) при $m = \hat{m}$, $\mathcal{Z} = \widehat{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}} = \widehat{\mathcal{Z}}_{\mathcal{X}}$. На $\mathcal{D}\ J[u]$ можно считать функцией $J\{w\}$, $w \in W$.

Теорема 1. *Градиент* $\nabla J\{w\}$ *существует и непрерывен на* W.

Формулу для $\nabla J\{w\}$ нетрудно получить из [1].

Литература

1. *Чернов А. В.* О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Ж. выч. матем. и матем. физ. 2011. Т.51, № 9. С.1616–1629.

МУЛЬТИВСПЛЕСКИ[1]

Черных Н.И. (Екатеринбург)

chernykh@imm.uran.ru

Известно, что для задания классического кратно-масштабного анализа (КМА) Мейера – Малла достаточно знать ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x)$, его порождающую, и в этом случае нет проблем с построением соответствующего всплеска $\psi(x)$, порождающего базисы $\{\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k) : \ k \in \mathbb{Z}\}$ подпространств W_j всплесков и, в совокупности ($j \in \mathbb{Z}$), базис всего пространства $L^2(R)$. В случае КМА, порожденного системой $\{\varphi^s(x) : \ s = \overline{1,n}\}$ нескольких ($n > 1$) масштабирующих функций ситуация сложнее. Автору известны только фрагменты теории таких мульти-КМА и примеры искусно построенных мультивсплесков (см., например, [1], [2, стр. 341]), а также их конструкции для масштабирующих функций с компактным носителем и специальными свойствами с привлечением метода ортогонализации Шмидта (см. [3]).

В докладе будет представлен простой алгоритм, разработанный совместно с Е.А.Плещевой, конструирования множества систем мультивсплесков при известном наборе ортогональных (вместе с целочисленными сдвигами) в $L^2(R)$ масштабирующих функций при любом $n \geqslant 2$. Простота достигается за счет изменения операции векторного произведения $(n-1)$ векторов в n-мерном комплексном пространстве $l^2(\mathbb{C}^n)$.

Литература

1. *Geronimo J., Hardy D. and Massupust P.R.* Fractal functions and wavelet expantions based on several functions. J. of Approx. Theory, 1994. – Vol. 78. – P. 373–401.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00004)

2. *Малла С.* Вейвелеты в обработке сигналов. Москва, “Мир”, 2005. – 671 с.

3. *Lawton W., Lee S.L. and Shen Z.W.* An algorithm for matrix extension and wavelet construction. Math. Comp, 1996. – Vol. 65, No 214. – P. 723–337.

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НАИПРОСТЕЙШИМИ ДРОБЯМИ[1]

Чунаев П.В. (Владимир)

chunayev@mail.ru

Задача простой интерполяции *наипростейшими дробями* (н.д.)

$$R_n(z) = Q'(z)/Q(z), \qquad Q(z) = z^n + q_{n-1}z^{n-1} + \ldots + q_0. \tag{1}$$

не всегда разрешима [1]. Таблицу $T_n = \{(z_k, w_k)\}$, $k = \overline{1,n}$, для которой существует и единственна интерполяционная н.д. (1), назовем *корректной.* В [1] получены некоторые критерии корректности таблиц. Пусть $\overline{G}$ — замкнутая односвязная область на $\mathbb{C}$, внутренность которой содержит простые узлы интерполяции z_k, $k = \overline{1,n}$, и начало координат. Далее, пусть функция

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots$$

является голоморфной в $\overline{G}$, а таблица $T_n = \{(z_k, f(z_k))\}$ является корректной, так что существует единственная интерполяционная н.д. вида (1). Положим $P(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$. С применением интеграла Эрмита получена

Теорема. *Остаточный член интерполяции имеет вид:*

$$f(z) - J_n(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\sum_{p=k+1}^{\infty} \left(t_m^p \sum_{l=0}^{\min\{p,n\}} q_l f_{p-l} \right)}{t_m^{k+1} P'(t_m)} \right) z^k.$$

Этот результат дополняет соответствуюший результат из работы [2] об остаточном члене n-кратной интерполяции Паде.

Литература

[1] *Данченко В.И., Кондакова Е.Н.* Критерий возникновения особых узлов при интерполяции наипростейшими дробями // Труды МИАН. Т. 278. 2012. С. 49–58.

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (согл. №14.B37.21.0369) и при финансовой поддержке РФФИ (проекты №12-01-31471 и 11-01-00952)

[2] *Danchenko V.I. and Chunaev P.V.* Approximation by simple partial fractions and their generalizations // J. of Math. Sci. Vol. 176 (6). 2011. Pp. 844–859.

О НЕПРЕРЫВНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ВЕТВИ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Шабров С.А., Голованева Ф.В. (Воронеж)

Доклад посвящен анализу нелинейной модели четвертого порядка, реализуемой в виде краевой задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_{\sigma} = \lambda F(x,u), \\ u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

получаемой при описании деформаций стержневой системы, возникающих под воздействием силы, зависящей как от самой точки x, так и от отклонения $u(x)$ точки x стержня от положения равновесия. В точках ξ, принадлежащих множеству $S(\sigma)$ (см. далее), уравнение в (1) понимается как равенство $\Delta\left(pu'_x\right)(\xi)+u(\xi)\Delta Q(\xi) = \lambda F(\xi,u(\xi))$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ; $\lambda > 0$ — спектральный параметр. Через Λ обозначим множество положительных значений λ, при каждом из которых (1) имеет хотя бы одно решение. Будем считать действительное число собственным значением задачи (1), если при этом λ (1) имеет нетривиальное решение.

Уравнение в (1) задано почти всюду (в смысле меры σ) на множестве $\overline{[0;\ell]}_S$, которое строится следующим образом. Строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция $\sigma(x)$ определяет неполное метрическое пространство $J_S = [0;\ell]\setminus S(\sigma)$, где $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$ с метрикой $\varrho(x,y) = |\sigma(x)-\sigma(y)|$. Стандартное пополнение, при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную пару $\{\xi-0,\xi+0\}$, обозначим через $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$. Объединение $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$ и $S(\sigma)$ нам даёт $\overline{[0;\ell]}_S$.

Будем предполагать, что функции $p(x)$ и $Q(x)$ σ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$, $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает, а $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: 1) $F(x,u)$ при почти всех x (относительно σ-меры) определена и непрерывна по u; 2) функция $F(x,u)$ измерима по x при каждом u; 3) $|F(x,u)| \leqslant m(x)$, где $m(x)$ — σ-суммируемая функция на $\overline{[0;\ell]}_S$.

Решение (1) будем искать в классе E абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых σ-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$.

Будем говорить, что однородное уравнение $(pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = 0$ не осциллирует на $[0;\ell]$, если любое нетривиальное решение имеет не более трех нулей с учетом кратностей.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и $F(x,0) \equiv 0$; $F(x,u)$ строго возрастает по $u > 0$ и каждом x, $F(x,u)$ допускает представление $F(x,u) = f(x,u) \cdot u$, где $f(x,u)$ не возрастает по u при $u > 0$ и каждом x; однородное уравнение не осциллирует на $[0;\ell]$. Тогда множество Λ собственных значений задачи (1), отвечающих неотрицательным на $[0;\ell]$ собственным функциям, обладает следующими свойствами: 1) Λ связно; 2) при каждом $\lambda \in \Lambda$ задача (1) имеет единственное положительное в $(0;\ell)$ решение $u(x,\lambda)$; 3) $u(x,\lambda)$ строго возрастает по λ; при каждом $\lambda^* \in \Lambda$ соответствующее решение $u(x,\lambda^*)$ задачи (1) является равномерным пределом последовательности $u_n(x)$, определяемой итерационными равенствами:*

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = \lambda^* F(x, u_{k-1}(x)), \\ u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases}$$

$(k = 1, 2, \dots)$ *при любой начальной непрерывной неотрицательной функции $u_0(x)$.*

АДАПТАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Шабров С.А., Лылов Е.В. (Воронеж)

Пусть Γ геометрическая сеть из $\mathbb{R}^n$, реализованная в виде открытого связного геометрического графа. Мы считаем, что ребра сети допускают достаточно гладкую параметризацию и не имеют самопересечений, поэтому ребра графа будем предполагать прямолинейными непересекающимися интервалами γ_i (не включая в них внутренние узлы). Таким образом, граф Γ состоит из некоторого набора ребер и совокупности их концов. Множество этих концов обозначим через $J(\Gamma)$, каждую его точку назовем внутренней вершиной Γ. Концы ребер γ_i, не включенных в $J(\Gamma)$, будем называть граничными вершинами, их множество обозначим через $\partial\Gamma$. Объединение всех ребер обозначим через $R(\Gamma)$. (Более подробно терминологию и обозначения см., например, в [1].)

Рассмотрим на Γ математическую модель

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{d\Gamma}(pu'_x) + qu = f, \\ u\big|_{\partial\Gamma} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\frac{d}{d\Gamma}(pu'_x) = \begin{cases} (pu')', & x \in R(\Gamma), \\ \sum\limits_{\gamma_i \subset \Gamma(x)} p_i(x)\dfrac{du}{d\gamma_i}(x), & x \in J(\Gamma) \end{cases}$$

(запись $\gamma_i \subset \Gamma(x)$ означает, что γ_i примыкает к x, $p_i(x)$ — сужение $p(x)$ на ребро γ_i; все производные, если $x \in J(\Gamma)$, берутся «от x»). Дифференциальная модель (1) возникает при моделировании малых деформаций струнной системы, растянутой вдоль графа Γ. Заданные на Γ функции $p(x), q(x)$ и $f(x)$ предполагаются лежащими в $C[R(\Gamma)]$, т.е. равномерно непрерывными на каждом ребре; для $p(x)$ предполагается дополнительно сильная положительность; для $q(x)$ неотрицательность. В [1] доказана однозначная разрешимость (1).

В этой работе мы адаптируем метод конечных элементов для нахождения приближенного решения. Для этого каждое ребро мы разбиваем на N равных частей, и строим базисные функции $\varphi_i(x)$ так, что $\varphi_i(x)$ равна 1 только в одной точке x_k, отлична от нуля только на двух интервалах, примыкающих к x_k, линейна на каждом из них, если x_k не совпадает с внутренней вершиной, если же $x_k \in J(\Gamma)$, то линейна на каждом из примыкающем к x интервале разбиения, и равна нулю на остальных подинтервалах. Приближенное решение $v(x)$ будем искать в виде линейной комбинации этих функций: $v(x) = \sum\limits_i v_i\varphi_i(x)$, где v_i — значения в узловой точке. Для нахождения v_i мы получаем систему $AV = F$, здесь

$$A_{ij} = \int\limits_\Gamma p(x)\frac{d\varphi_i}{d\gamma}(x)\frac{d\varphi_j}{d\gamma}(x)\,d\Gamma + \int\limits_\Gamma q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,d\Gamma,$$

V — вектор-столбец, составленный из неизвестных v_i; $F_j = \int\limits_{\Gamma} f(x)\varphi_j(x)\, d\Gamma$. Система $AV = F$ имеет единственное решение, и справедлива теорема

Теорема. *Пусть $u(x)$ — точное решение модели (1), $v(x)$ — решение системы $AV = F$. Тогда*

$$\langle u-v, u-v\rangle \leqslant C\cdot \frac{1}{N},$$

где константа C зависит только от коэффициентов модели, $\langle u,v\rangle = \int\limits_{\Gamma} p(x)\frac{du}{d\gamma}\frac{dv}{d\gamma}\, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma} q(x)u(x)v(x)\, d\Gamma$ — энергетическое скалярное произведение в $H_0^1(\Gamma)$.

Литература

[1] Покорный и др. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 192с.

О НЕКОТОРЫХ УТОЧНЕНИЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАВЕНСТВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЛЕБЕГА ПОЛИНОМА ЛАГРАНЖА

Шакиров И.А.

iskander@tatngpi.ru

При приближении заданной 2π - периодической функции тригонометрическими интерполяционными полиномами Лагранжа, определенными по нечетному ($N = 2n+1$) либо четному (N=2n) числу узлов, для соответствующих им функций Лебега верны (см., например, [1, с. 66]) асимптотические равенства

$$\begin{array}{l} \lambda_n(t) \cong \frac{2}{\pi}\ln n \sin\frac{2n+1}{2}t + O(1)\ \left(t\in[0,\frac{2\pi}{2n+1}]\right); \\ \lambda_n^*(t) \cong \frac{2}{\pi}\ln n \sin nt + O(1)\ \left(t\in[0,\frac{\pi}{n}]\right). \end{array} \tag{1}$$

Они справедливы при $n\to\infty$ равномерно относительно аргумента t и были получены, используя известные модульные представления функций Лебега $\lambda_n(t)$ и $\lambda_n^*(t)$ (их безмодульные виды оставались неизвестными [2]). Поэтому в (1) входят неопределенные константы вида $O(1)$, которые не позволяют определить погрешность этих формул для конкретных значений параметра n.

В случае, когда число узлов интерполирования кратно четырем ($N = 2n = 4m$, $m\in\mathbf{N}$), в работе установлено, что вторая из формул (1) остается справедливой при замене $O(1)$ на единицу ($\lambda_n^*(t) \cong 1+\frac{2}{\pi}\ln n \sin nt,\ n\to\infty;\ t\in[0,\frac{\pi}{n}]$). Оценена также погрешность приближенного представления

$$\lambda_n^*(t) \approx 1 + \frac{2}{\pi}\ln n \sin nt,\ t\in[0,\frac{\pi}{n}]$$

при любых четных значениях параметра n. При этом существенно использованы явные (безмодульные) виды функции $\lambda_n^*(t)$ [2].

Теорема. *В случае интерполяции заданной непрерывной 2π периодической функции $x(t)$ полиномами Лагранжа по равномерно распределенным на периоде узлам, число которых кратно четырем ($n = 2m,\ m\in \boldsymbol{N}$), для соответствующей функции Лебега имеет место асимптотически точное приближенное представление*

$$\lambda_n^*(t) \cong \mu_n^*(t),$$

где

$$\mu_n^*(t) \equiv 1 + (\frac{2}{\pi}\ln n)\sin nt,\ t\in[0,\frac{\pi}{n}],$$

а для погрешности

$$\varepsilon_n(t) \equiv \lambda_n^*(t) - \mu_n^*(t)$$

равномерно относительно параметра n и аргумента t справедлива следующая оценка:

$$\varepsilon = \sup_{n\geqslant 2}\|\varepsilon_n(t)\|_C =$$
$$= \sup_{n\geqslant 2}\|\lambda_n^*(t) - \mu_n^*(t)\|_C < 0.5\ \forall n = 2m,\ m\geqslant 1,\ \forall t\in[0,\frac{\pi}{n}].$$

Литература

[1] Н.П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М.,1987.

[2] И.А. Шакиров, "Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам *Известия вузов. Математика*, 2011, №10 , 80-88.

ОБЗОР СЛУЧАЕВ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ[1]

Шамолин М.В. (Москва)
shamolin@imec.msu.ru

Работа представляет собой обзор по полученным ранее, а также новым случаям интегрируемости в динамике двумерного (в $\mathbf{R}^2 \times \mathrm{so}(2)$), трехмерного (в $\mathbf{R}^3 \times \mathrm{so}(3)$) и четырехмерного (в $\mathbf{R}^4 \times \mathrm{so}(4)$) твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним [1–3].

Введен в рассмотрение новый класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Благодаря наличию в таких системах нетривиальных групп симметрий, показано, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координаты диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии извне, так и ее рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил. В результате обнаружен ряд случаев интегрируемости уравнений движения на касательных расслоениях сфер различной размерности ($\mathrm{T}\mathbf{S}^n, n = 1, 2, 3$) в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Литература

[1] *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. — 352 с.

[2] *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. матем., **14**:3 (2008), 3—237.

[3] *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. матем., **16**:4 (2010), 3—229.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00020-а)

L^p-ОЦЕНКИ В КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКУ Р. НЕВАНЛИННЫ

Шамоян Ф.А., Родикова Е.Г. (Брянск)

shamoyanfa@yandex.ru, evheny@yandex.ru

Пусть D - единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, Ω - множество всех суммируемых положительных функций на $(0,1]$, для которых существуют числа M_ω, m_ω, q_ω, причем $q_\omega \in (0,1]$, такие что

$$m_\omega \leqslant \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leqslant M_\omega, r \in (0,1], \lambda \in [q_\omega, 1].$$

Для всех $0 < p < +\infty$ и $\omega \in \Omega$ введем в рассмотрение класс S^p_ω аналитических в D функций(см. [1]), для которых

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r) T^p(r,f) dr < +\infty,$$

где $T(r,f)$ - характеристика Р. Неванлинны функции f.

Во многих задачах комплексного анализа часто возникает вопрос вложения одного класса аналитических функций в другой (см. [2], [3]).

Для формулировки основного результата введем также следующие обозначения. Пусть $l \in [0,1)$, $\theta \in [-\pi,\pi]$, положим

$$\Delta_l(\theta) = \left\{ z \in D : 1-l < |z| < l, |\arg z - \theta| \leqslant \frac{l}{2} \right\}.$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть μ - конечная неотрицательная борелевская мера, заданная на подмножествах единичного круга D, $1 \leqslant p < +\infty$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

$$\int\limits_D (\ln^+ |f(\zeta)|)^p d\mu(\zeta) \leqslant C \int\limits_0^1 \omega(1-r) T^p(r,f) dr < +\infty,$$

$$\mu(\Delta_l(\theta)) \leqslant C_1 \cdot \omega(l) \cdot l^{p+1},$$

при всех $\theta \in [-\pi,\pi]$, $0 < l < 1$, где C и C_1 - некоторые положительные числа, не зависящие от f и l.

При $0 < p < 1$ характеризация мер имеет другой вид.

Зададим диадическое разбиение $\Delta_{k,l}$ единичного круга D. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \mathbb{Z}$, причем $-2^k \leqslant l \leqslant 2^k - 1$,

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z \in D : 1 - \frac{1}{2^k} \leqslant |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{\pi l}{2^k} \leqslant \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\}.$$

Ясно, что система диадических прямоугольников покрывает единичный круг однократно, причем $\Delta_{k,l}$ и $\Delta_{m,n}$ могут пересекаться только по границам, если $(k,l) \neq (m,n)$.

Теорема 2. *Пусть μ - конечная неотрицательная борелевская мера, заданная на подмножествах единичного круга D, $0 < p < 1$, $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

$$\int_D (\ln^+ |f(\zeta)|)^p d\mu(\zeta) \leqslant C \int_0^1 \omega(1-r) T^p(r,f) dr < +\infty,$$

$$\sum_{l=-2^k}^{2^k-1} |\mu(\Delta_{k,l})|^{\frac{1}{1-p}} \leqslant c(1-r_k)^{\frac{1+p}{1-p}} \omega^{\frac{1}{1-p}}(1-r_k).$$

Литература

1. *Шамоян Ф.А.* Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций // Сиб. матем. журн., 40 (6), 1999. - С. 1422-1440.

2. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции - М.: Мир, 1984. - 469 с.

3. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 368 с.

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ МНОЖЕСТВА ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА НАВЬЕ-СТОКСА

Шананин Н. (Москва)

nashananin@inbox.ru

Подмножество множества обобщенных векторнозначных функций переменных $(t,x) \in \Omega \subseteq \mathcal{R}^{n+1}$ назовем *x-квазианалитическим классом*, если из равенства двух его элементов в окрестности точки (t^0, x^0) следует их равенство в окрестности связной компоненты слоя $\{t = t^0\} \cap \Omega$, содержащей точку (t^0, x^0). Через $\mathcal{CF}(\Omega \times \mathcal{R}^n)$ обозначим совокупность вещественнозначных функций $f(x, u)$, определенных для почти всех $(t, x) \in \Omega$ и всех $u \in \mathcal{R}^n$ и обладающих на $\Omega \times \mathcal{R}^n$ свойством Каратеодори, таких, что $f(t, x, 0) \in L_2(\Omega)$ и для любых компактов $K_1 \subset \Omega$ и $K_2 \subset \mathcal{R}^n$ найдется константа $C = C(K_1, K_2)$, с которой для всех u^1 и $u^2 \in K_2$ и почти всех $(t, x) \in K_1$ выполняется липшицева оценка: $|f(x, u^1) - f(x, u^2)| \leqslant C|u^1 - u^2|$.

Предположим, что функции $f_l(t, x, u)$, определяющие нелинейные члены в системе Навье-Стокса

$$\begin{cases} \partial_t v_l + \sum_{j=1}^n v_j \partial_{x_j} v_l - \nu \triangle v_l + \partial_{x_l} p & = & f_l(t, x, v) + a_l(t, x)p, \\ \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} v_j & = & g(t, x), \end{cases}$$

где $l = 1, 2, \ldots, n$, $\triangle = \sum_{j=1}^n (\partial_{x_j})^2$ и ν - положительное число, вместе со своими первыми обобщёнными производными $\partial_{x_m} f_l(t, x, u)$ и $\partial_{u_m} f_l(t, x, u)$ принадлежат классу $\mathcal{CF}(\Omega \times \mathcal{R}^n)$, коэффициенты g и a_l вместе с первыми производными по пространственным переменным $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежат пространству $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Теорема. *Множество решений системы Навье-Стокса, удовлетворящих условиям $v_j(t, x)$, $\partial_{x_l} v_j(t, x)$ и $p(t, x) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $\partial_{x_l} p(t, x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $j, l = 1, \ldots, n$, образует $(x_1, \ldots, x_n)$-квазианалитический класс.*

ОБОБЩЕННЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЯКОБИ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА[1]

Шарапудинов И.И. (Махачкала)

sharapud@mail.ru

Ранее автором были рассмотрены [1] новые ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{-1} \hat{P}_k^{-1}(x), \tag{1}$$

в которых общий член $f_k^{-1} \hat{P}_k^{-1}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ получен в результате предельного перехода при $\alpha \to -1$ из общего члена $\hat{f}_k^{\alpha} \hat{P}_k^{\alpha,\alpha}(x)$ ряда Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha} \hat{P}_k^{\alpha,\alpha}(x)$ по ультрасферическим полиномам Якоби $\hat{P}_k^{\alpha,\alpha}(x)$, образующим при $\alpha > -1$ ортонормированную систему с весом $(1 - x^2)^{\alpha}$ на $[-1, 1]$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00191-а)

Пользуясь явным видом предельных ультрасферических рядов вида (1), установленным в [1], в настоящей работе рассмотрены новые обобщенные предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства. Показано, что обобщенные предельные ультрасферические ряды, как аппарат приближения непрерывных функций, выгодно отличается от рядов Фурье по полиномам Якоби, обладая в тоже время простой конструкцией, как и у рядов Фурье-Якоби.

Литература

1. *Шарапудинов И.И.* Современные проблемы теории функций и их приложения// Материалы 16-й Саратовской зимней школы. Саратов, 27 января – 3 февраля 2012 года. стр. 196-197. Издательство "Научная Книга". 2012.

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ [1]

Шарапудинов Т.И. (Махачкала)

sharapudinov@gmail.ru

Рассмотрена задача о приближении дискретной функции $f(x)$, заданной на сетке $\Omega_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$, частичными суммами предельного ряда

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{N-1} f_k^{-1} \tau_k^{-1}(x), \quad x \in \Omega_N, \tag{1}$$

введенного в работе [1], который получается в результате почленного предельного перехода при $\alpha \to -1$ из конечного ряда Фурье $f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^\alpha \tau_k^\alpha(x)$ по полиномам Чебышева $\tau_k^\alpha(x)$, ортонормированным на сетке Ω_N. Изучено поведение функции Лебега $\Lambda_{n,N}(x)$ частичных сумм ряда (1) вида

$$S_{n,N}^{-1}(f) = S_{n,N}^{-1}(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{-1} \tau_k^{-1}(x).$$

В частности, получена следующая оценка

$$\Lambda_{n,N}(x+1) \leqslant c(a) \ln \left(1 + \frac{n}{N-1} \sqrt{2x(N-3-x)} \right)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00191-а)

$$(0 \leqslant x \leqslant N-3, \quad n \leqslant a\sqrt{N}),$$

где $c(a)$ – положительное число, зависящее только от параметра a.

Литература

1.*Шарапудинов Т.И.* Предельные дискретные ряды Чебышева и их аппроксимативные свойства// Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 16-й Сарат. Зимней школы. - Саратов: ООО "Издательство "Научная книга 2012. - с. 197

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДОИСПАРИТЕЛЬНОГО ПРИНЦИПА ОХЛАЖДЕНИЯ

Шацкий В.П., Федулова Л.И. (Воронеж)

mathem@agroeng.vsau.ru

Основным приемом в вопросе повышения эффективности работы прямых и косвенных водоохладителей является моделирование процессов тепломассопереноса, протекающих в теплообменных насадках охладителей. Для косвенного охлаждения каналы теплообменной насадки делятся на две разные группы: "мокрые" каналы, по которым проходит вспомогательный поток воздуха, контактирующий с влажными поверхностями капиллярно-пористых пластин, и "сухие"каналы, по которым проходит основной поток воздуха, не контактируя с водой. Модель тепломассопереноса для косвенных воздухоохладителей имеет следующий вид.

Уравнения энергии и массообмена во вспомогательном канале:

$$\rho V(y) C \frac{\partial t}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) + (C_{\text{в}} - C_{\text{п}}) \left(\frac{\partial}{\partial y}(Jt) \right),$$

$$V(y) \frac{\partial \rho_{\text{п}}}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 \rho_{\text{п}}}{\partial y^2} \right);$$

уравнение энергии в основных каналах: $C_{\text{в}} \rho_{\text{в}} V^c(y) \frac{\partial t^c}{\partial x} = \lambda_{\text{в}} \left(\frac{\partial^2 t^c}{\partial y^2} \right)$; диффузионные потоки, определяемые законом Фика: $J = -D \left(\frac{\partial \rho_{\text{п}}}{\partial y} \right)$; кинематика в основных и вспомогательных каналах:

$$V(y) = 1.5 V_{\text{вх}} \left(1 - \frac{(y-h)^2}{h^2} \right), \; V^c(y) = 1.5 V_{\text{вх}} \left(1 - \frac{(y+\delta+h^c)^2}{(h^c)^2} \right);$$

на "мокрой"поверхности пластин вспомогательных каналов (y=0) задан тепловой поток: $RJ = \lambda \frac{\partial t}{\partial y}|_{y=0} - \lambda_{\text{в}} \frac{\partial t^c}{\partial y}|_{y=-\delta} + C_{\text{ж}} J (t_{\text{ж}} - t_{\text{пл}})$, и плотность пара, равная плотности насыщения: $\rho_{\text{п}}|_{y=0} = \rho_{\text{пн}}$, на "сухой"поверхности пластин основных каналов ($y = -\delta$) задано условие непрерывности теплового потока в поперечном направлении:

$$\lambda_{\text{в}} \frac{\partial t^c}{\partial y}|_{y=-\delta} = \frac{\lambda_{\text{пл}}}{\delta}(t^c_{\text{пл}} - t_{\text{пл}}),$$

где $\lambda_{\text{пл}}$ - теплопроводность влажной пластины, условия на входе в каналы: $t|_{x=0} = t_{\text{вх}}, \quad t^c|_{x=0} = t_{\text{вх}}$, условия четности на осях симметрии каналов: $\frac{\partial t}{\partial y}|_{y=h} = 0, \quad \frac{\partial t^c}{\partial y}|_{y=-\delta-h^c} = 0$.

СТУДЕНЧЕСКИЕ СОРЕВНОВАНИЯ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ В РАМКАХ МЕЖДУНАРОДНЫХ НАУЧНЫХ КОНФЕРЕНЦИЙ ПО СОВРЕМЕННЫМ ПРОБЛЕМАМ НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

Шашкин А.И., Ускова О.Ф. (Воронеж)
dean@amm.vsu.ru

В Воронежском государственном университете накоплен большой опыт организации и проведения соревнований студентов по информатике и программированию, которые являсь одной из форм внеучебной деятельности, способствуют повышению качества учебного процесса.

В течение нескольких лет Воронежский государственный университет выигрывал гранты администрации Воронежской области [3], Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции науки и высшего образования» [2]. Девять лет подряд ВГУ является базовым вузом организации и проведения третьего (основного) тура Всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Программирование. Информационные технологии» [1, 4].

С целью привлечения возможно большего количества студентов к такой форме внеучебной деятелности на базе факультета прикладной математики, информатики и меаники в ВГУ организовывались межвузовские городские олимпиады и студенческие соревнования по информатике и программированию, проводимые в рамках международных научных конференций по современным проблемам науки и образованию. В качестве примеров приведем некоторые из таких олимпиад.

В рамках Международных научных конференций «Математика. Компьютер. Образование», которые проводились в г.Воронеже межрегиональной ассоциацией «Женщины в науке и образовании» в 2000 году и в 2003 году были организованы региональные студенческие интернет-олимпиады. Победители олимпиады 2000 года – студенты факультета ПММ ВГУ Якубенко Андрей (1 место), Гладышев Олег и Колбешкин Дмитрий (2 место), Поляков Андрей и Клинских Антон (3 место), закончив с отличием факультет ПММ ВГУ, успешно работают по специальности. В числе победителей олимпиады 2003 года помимо студентов факультета ПММ ВГУ (Мухоедов Дмитрий, Гайдай Виктор, Мамедов Эмин) были студенты г.Белгорода (Андриянов Дмитрий, Пузанок Алексей), Украины (Черниенко Василий).

Начиная с 2007 года факультет ПММ ВГУ выигрывает гранты (в 2012 году проект 12-01-06103 – г.) Российского фонда фундаментальны исследований на проведение Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», в рамках которых ежегодно проводятся в телекоммуникационном режиме школы олимпиады по программированию и компьютерному моделированию студентов вузов Центрально – Черноземного региона. Студенты факультета ПММ принимают в них активное участие не только как соревнующиеся, но и помогают в их организации и проведении, работая в студенческих общественных организациях (студенческий секретариат, студенческий директорат).

Впервые в 2012 году в рамках Пятой Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» грант РФФИ на организацию и проведение которой выиграл математический факультет ВГУ (проект 12-01-06827-моб_г) были организованы открытые соревнования по программированию студентов вузов Черноземья, в которых приняли участие 78 студентов [5]. Помимо студентов Воронежских вузов (ВГУ, Воронежского государственного университета инженерных тенологий, ВГПУ, ВУНЦ ВВС ВВА) своими силами в разработке программ померялись студенты Тамбовского государственного тенического университета государственного университета, Юго-Западного и Санкт-Петербургского государственного университета. Убедительную победу одержал Сальников Иван – студент факультета информационных технологий Тамбовского государственного технического университета.

Постоянную поддержку соревнованиям студентов оказывают ведущие компьютерные организации г.Воронежа: РЕТ, DataArt, Релкс, MuranoSoft, Информсвязь-Черноземье, Открытые системы (Мир ПК).

Студенческие соревнования по программированию повышают интерес студентов к своей профессии, активизируют учебный процесс, способствуют востребованности будущих специалистов.

Литература

1. Горбенко О.Д. Воронежский государственный университет – базовый вуз всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Прграммирование.Информационные технологии»/ О.Д.Горбенко, О.Ф.Ускова, А.И.Шашкин)// Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Проблемы высшего образования. – 2012.- №2.- 85 с. С.51-56.

2. Ускова О.Ф.Открытая региональная студенческая школа-олимпиада по программированию и компьютерному моделированию как компонент системы непрерывного математического образования студентов / О.Ф.Ускова, О.Д.Горбенко, А.И.Шашкин// Непрерывное математическое образование студентов: цели, тенологии, управление. Сб.трудов Международной конференции 20-21 ноября 2001 г., Воронеж-Воронеж: Воронежский государственный университет, 2001 – 220 с. С. 8-9.

3. Ускова О.Ф. Системное моделирование в проектировании структуры содержания региональных открытых студенческих олимпиад по программированию/О.Ф. Ускова, О.Д.Горбенко, В.В.Сысоев. Теория конфликта и ее приложения // Материалы Второй Всероссийской научно-технической конференции. Воронеж: Воронежская государственная технологическая академия, 2002- 263 с. С.251.

4. Информатика. Программирование. Информационные технологии: Всероссийские студенческие олимпиады. Воронеж. 11-12 ноября 2011 г. (отв. редактор О.Ф.Ускова, Воронеж: ВГУ, 2011-48 с.).

5. Горбенко О.Д. Студенческие соревнования по программированию в рамках V Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования»/ О.Д. Горбенко, Д.С.Мамонов, В.В.Провоторов, О.Ф.Ускова, А.И.Шашкин. Сб.трудов Международной конференции «Актуальные проблимы прикладной математики, информатики и механики» Воронеж 26-28 ноября 2012 г. Часть 2. Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2012.- 311 с. С. 9-83.

ВЕСОВЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ

Шишкина Э.Л. (Воронеж)
ilina_ dico@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}_n^+ = \{x{=}(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_n{:}x_1{>}0, ..., x_n{>}0\}$. Через Ω^+ будем обозначать часть сферы единичного радиуса с центром в начале координат, расположенную в $\mathbb{R}_n^+$, через $d\omega$ обозначим элемент ее поверхности. Пусть $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ - мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел.

Следуя Ф. Йону (см. [1]) введем весовое сферическое среднее

$$N_\gamma^r[f](x) = \frac{1}{\omega_n^\gamma} \int\limits_{\Omega^+} T_x^{ry} f(x) \prod_{i=1}^n y_i^{\gamma_i} d\omega. \tag{1}$$

В формуле (1) ω_n^γ - это площадь части нагруженной сферы, которая находится по формуле из [2] (стр. 20) для обобщённых эйлеровых функций, $T_x^y = T_{x_1}^{y_1} ... T_{x_n}^{y_n}$, $T_{x_i}^{y_i}$ - обобщённый сдвиг, который приведен на стр. 5 книги [2] (см. также стр. 121 статьи [3]).

Получена формула

$$N_\gamma^\lambda[N_\gamma^\mu[f]](x) = \frac{2^{-n}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{1}{(2\lambda\mu)^{n+|\gamma|-2}} \times$$

$$\times \int\limits_{|t-\mu|}^{t+\mu} \left((t^2 - (r-\mu)^2)((r+\mu)^2 - t^2)\right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} N_\gamma^r[f](x) r dr. \tag{2}$$

В случае обычного сферического среднего формула (2) получена в [1] (см. формулу 4.9с на стр. 75 книги [1]).

Литература

Йон Ф. Плоские волны и сферические средние. М., Изд.-во иностр. лит. 1958, 158 с.

Ляхов Л. Н. B-гиперсингулярные интегралы. Липецк: ЛГПУ, 2007. — 232 с.

Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье, Успехи матем. наук, т. VI, в.2 (42), 1951. С. 102-143.

ОКРЕСТНОСТНЫЙ ПОДХОД К МУЛЬТИАГЕНТНЫМ СИСТЕМАМ

Шмырин А.М., Седых И.А. (Липецк)
amsh@lipetsk.ru, sedykh-irina@yandex.ru

Организационная система - это совокупность внутренне взаимосвязанных частей, взаимодействующая с окружающей средой, выполняющая определенные функции и имеющая заданную структуру. Сложность организационной системы определяется количеством входящих в нее элементов и многообразием внутренних связей.

Успешным средством для моделирования сложных организационных систем являются окрестностные модели [1-4], обобщающие классические дискретные модели, позволяющие адекватно изучать объекты распределенной структуры, отличающиеся гибкостью описания с помощью окрестностей (шаблонов соседства) связей между узлами системы.

Перспективной областью применения теории окрестностных систем является разработка мультиагентных окрестностных моделей, особенностью которых является наличие взаимосвязанных агентов, принадлежащих различным классам дискретных моделей. Например, в рамках одной мультиагентной окрестностной модели в качестве агентов могут присутствовать сети Петри, нейронные сети, транспортные системы и другие дискретные модели, выполняющие различные функции и дополняющие друг друга.

Литература

Блюмин С.Л., Шмырин А.М. Окрестностные системы. - Липецк: Липецкий эколого-гуманитарный институт, 2005. - 132 с.

Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Шмырина О.А. Билинейные окрестностные системы- Липецк: ЛГТУ, 2006. - 130 с.

Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Седых И.А., Филоненко В.Ю. Окрестностное моделирование сетей Петри. - Липецк: ЛЭГИ, 2010. - 124 с.

Шмырин А.М., Седых И.А. Дискретные модели в классе окрестностных систем. Вестник ТГУ. Сер. Естественные и технические науки. - Тамбов, 2012. - Т. 17, вып. 3. - С. 867 - 871.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ ДВУМЕРНОЙ O(3) ВЕКТОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

Шокиров Ф.Ш. (Душанбе)
farhod0475@gmail.com

Изучена динамика проекции изоспинов топологических солитонов (ТС) вида

$$\theta_s(r,R) = 2arctg(r/R)^m, \varphi_s = m\chi - \omega t \tag{1}$$

$$r^2 = x^2 + y^2, cos\chi = x/r, sin\chi = y/r$$

двумерной O(3) векторной нелинейной сигма-модели (ВНСМ) [1]

$$\partial_\mu \partial^\mu s_i + (\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a)s_i - s_3(\delta_{i3} - s_i s_3) = 0, i = 1,2,3 \tag{2}$$

(анизотропная O(3) ВНСМ в эйлеровой параметризации, где $s_1 = sin\theta cos\varphi$, $s_2 = sin\theta sin\varphi$, $s_3 = cos\theta$ на комплексную плоскость $z(x,y)$ в изотропном ($\omega = 0$) и анизотропном ($\omega^2 = 1$) случаях.

На основе разностных схем второго порядка точности [2], применением свойств стереографической проекции и современных матричных лабораторий получены 3D-модели проекции изоспинов ТС (1) модели (2) на плоскость $z(x,y)$.

Разработаны программные коды для управления динамики численных моделей изоспинов ТС (1). Изучены свойства вихреобразных структур образующихся когерентно вращающимися изоспинами, количество которых равно индексу Хопфа (топологическому заряду солитонов (1)) [3]. Предложен численный метод определения топологического заряда локализованных солитоноподобных структур, образовавшихся при распаде ТС вида (1) модели (2) вследствие их столкновения.

Литература

1. *Gell-Mann M., Levy M.* The axial vector current in beta decay // Nuovo Cimento 16 (1960) 705-726.

2. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. - М.: Нау/-ка, 1971, 553 с.

3. *Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш.* Взаимодействие и распад двумерных топологических солитонов O(3) векторной нелинейной сигма-модели // Докл. АН Республики Таджикистан, 2011, т.54, №2, с. 110 - 114.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД ЗАХАРЮТЫ–КАДАМПАТТЫ[1]

Шубарин М.А. (Ростов-на-Дону)

mas102@mail.ru

1. Пусть $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — регулярная интерполяционная пара пространств Фреше. Через $\mathcal{G}(\overline{X})$ и $\mathcal{H}(\overline{X})$ обозначим множество регулярных интерполяционных пар банаховых пространств $\overline{E} = [E_0, E_1]$ для которых соответственно выполняется условие (I) или (II):

(I) оператор вложения X_j в E_j непрерывен и образ этого оператора всюду плотен в E_j;

(II) оператор вложения E_j в X_j непрерывен и образ этого оператора всюду плотен в X_j;

Пусть $\tau \in (0,1)$, $p \in [1, +\infty]$. Положим

$$\overline{X}^{(\tau,p)} = (X_0, X_1)^{(\tau,p)} := \lim_{\overline{G}\in\mathcal{G}(\overline{X})} \text{proj } (G_0, G_1)_{\tau,p},$$

$$\overline{X}_{(\tau,p)} = (X_0, X_1)_{(\tau,p)} := \lim_{\overline{H}\in\mathcal{H}(\overline{X})} \text{ind } (H_0, H_1)_{\tau,p}$$

Теорема 1. *При сделанных предположениях отображения $\overline{X} \mapsto \overline{X}^{(\tau,p)}$, $\overline{X} \mapsto \overline{X}_{(\tau,p)}$ задают интерполяционные функторы в категории регулярных интерполяционных пар пространств Фреше. На множестве регулярных интерполяционных пар банаховых пространств эти отображения совпадают с функтором вещественной интерполяции.*

Теорема 2. *При сделанных предположениях имеются непрерывные вложения $X_0 \cap X_1 \subset \overline{X}_{(\tau,p)} \subset \overline{X}^{(\tau,p)} \subset X_0 + X_1$. Если, кроме того, $p < +\infty$, то $X_0 \cap X_1$ есть всюду плотное векторное подпространство в $\overline{X}_{(\tau,p)}$ и $\overline{X}^{(\tau,p)}$.*

2. *Пусть $A = (a_{p,n})$ — бесконечная матрица с положительными элементами такая, что $a_{p,n} \leqslant a_{p+1,n}$ для произвольных p, n. Если $s \in [1, +\infty)$, то пространство Кёте $K_s(A)$ состоит из числовых последовательностей $x = (x_n)$ для которых конечны все*

[1]Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0356 "Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них".

нормы $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} [|x_n| a_{p,n}]^s\right)^{1/s}$. *Известно, что набор норм* $(\|\cdot\|_p)$ *задаёт в* $K_s(A)$ *топологию пространства Фреше.*

Теорема 3. *Пусть* $s \in [1, +\infty)$ *дана пара пространств Кёте* $\overline{X} = [K_s(A^{(0)}), K_s(A^{(1)})]$ *такая, что* $K_s(A^{(1)}) \subset K_s(A^{(0)})$. *Если* $\tau \in (0,1)$, *то* $\overline{X}_{(\tau,s)} = \overline{X}^{(\tau,s)} = K_s(A^{(\tau)})$, *где* $A^{(\tau)} = ((a_{p,n}^{(0)})^{1-\tau}(a_{p,n}^{(1)})^{\tau})$.

3. *Пусть даны область* $D \in \mathbb{R}^n$ *и семейство* $\mathcal{F} = (F_p)$, *состоящее из непрерывных функций* $F_p : D \to \mathbb{R}$ *(подобные семейств называют весовыми). Через* $C(D, \mathcal{F})$ *обозначим множество функций, непрерывных в области* D *и для которых конечны все нормы* $\|f\|_p := \sup\limits_{x \in D} |f(x)| e^{-F_p(x)}$. *Известно, что определяемое таким образом пространство будет пространством Фреше относительно топологии, задаваемой набором норм* $(\|\cdot\|_p)$.

Теорема 4. *Пусть дана пара весовых семейств* $\mathcal{F}_j = (F_{j,p})$, $j = 0, 1$. *Если* $\tau \in (0,1)$, *то имеют место непрерывные вложения*

$$\lim_{\varepsilon>0, \tau+\varepsilon<1} \operatorname{ind} C(D, \mathcal{F}_{\tau+\varepsilon}) \subset \overline{X}^{(\tau,\infty)} \subset C(D, \mathcal{F}_\tau),$$

где $\mathcal{F}_\alpha := ((1-\alpha)F_{0,p} + \alpha F_{1,p})$, $\alpha \in (0,1)$.

Литература

[1.] Кадампатта С. Н. Шкалы пространств аналитических функций // Изв. СКНЦ ВШ, сер. естеств. наук.- №4.- 1975.- с. 64–68.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИЗЛОЖЕНИИ ТЕМЫ «ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ»

Щелкунова Л.И., Посылаева Р.В., Бабаева Е.В.
(Харьков)
lena-babaeva@yandex.ru

Тема «Интегрирование функции» традиционно сложно усваивается студентами. Причиной этого факта является отсутствие универсальных правил интегрирования и, как следствие, обширность и порой громоздкость информации, связанной с техникой интегрирования.

В последние годы наблюдается тенденция уменьшения учебных часов, как по общим курсам математики, так и по её специальным разделам. Поэтому изложение материала и процесс обучения необходимо строить таким образом, чтобы побуждать студентов к самостоятельному изучению темы.

При изучении данной темы эффективность обучения усиливается, если в его процессе использовать создание проблемных ситуаций и составление справочных материалов (блок-схем).

Справочные материалы можно представить в виде схемы, в которую в блочной форме включены основные методы интегрирования и введён блок дополнительных преобразований. В этот блок полезно поместить дополнительную информацию, связанную с теорией интегрирования рациональных дробей, тригонометрических и иррациональных выражений. Между всеми блоками необходимо установить взаимосвязь, что в дальнейшем поможет студентам при выборе способа интегрирования. Таким образом, составленные справочные материалы будут представлять логически упорядоченный и систематизированный минимум сведений по теме «Интегрирование функции». Такая деятельность прививает у студентов необходимость систематизации и обобщения знаний и умений.

В теме «Интегрирование функции» проблемную ситуацию можно создавать с помощью так называемых «контрпримеров». Если решается задача вычисления интеграла вида $\int x \sin x dx$, то после её решения полезно рассмотреть интеграл $\int x \sin x^2 dx$, а далее появляется возможность и необходимость введения понятия интегрального синуса и интегрального косинуса.

На практических занятиях также полезно демонстрировать разные способы вычисления одного интеграла с последующим обсуждением выбора наиболее рационального способа. Такая работа приучает будущих управленцев к многовариантности мышления и принятию правильных решений. Изложенный подход к изучению данной темы требует дополнительных усилий со стороны преподавателя и студента, но опыт показывает, что эти усилия оправдываются.

Литература

Загвязинский В.И. Теория обучения: Современная интерпретация: Учеб. пособие.- М.: «Академия», 2001.- 192 с.

К СПЕКТРАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Щербаков А.О. (Воронеж)
a.o.shcherbakov@gmail.com

Рассмотрим несамосопряженный операторов Шредингера с сингулярным комплекснозначным периодическим потенциалом $v = q'$,

$q \in L^4_{loc,\pi}(\mathbb{R})$, где $q_0 = 0$ и квазипериодическими граничными условиями:

$$S_\theta y = -(y^{[1]})' - qy^{[1]} - q^2 y, \quad y \in D(S_\theta), \quad \theta \in [0, \pi],$$

$D(S_\theta) = \{y, y^{[1]} \in W_1^1([0,\pi]) : l(y) \in L^2[0,\pi],\, y(\pi) = e^{i\theta} y(0),\, y^{[1]}(\pi) = e^{i\theta} y^{[1]}(0)\}$, где $y^{[1]} = y' - qy$ — квазипроизводная. Если $q = 0$, то оператор S_θ будем называть свободным оператором Шредингера S^0_θ. Собственные значения оператора S^0_θ имеют вид $\lambda_n = (2n + \frac{\theta}{\pi})$, $n \in \mathbb{J}$, где $\mathbb{J} = \mathbb{Z}_+$ при $\theta = 0$, $\mathbb{J} = \mathbb{N}$ при $\theta = \pi$ и $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$ при $\theta \in (0, \pi)$.

Теорема 1. *Найдется такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что спектр оператора S_θ представим в виде объединения взаимно непересекающихся множеств $\sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{J}, |n| \geqslant m+1} \sigma_n\right)$, где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество. Элементы множества σ_n имеют вид $\left(2n + \frac{\theta}{\pi}\right)^2 + n\alpha_n$, где $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$.*

Пусть $m \in \mathbb{N}$ — число из условия Теоремы 1 и $\widetilde{P}_{(m)}$, $\widetilde{P}_n$, $|n| \geqslant m+1$, — спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору S_θ, и множествам $\sigma_{(m_0)}$, σ_n, а $P_{(m)}$, P_n — проекторы, построенные по операторам S^0_θ и множествам $\sigma^0_{m_0} = \{\lambda_n : |n| \leqslant m_0\}$ и $\{\lambda_n\}$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \sigma^0_m$. Тогда $P(\Omega) = \sum_{k \in \Omega} P_k$, $\widetilde{P}(\Omega) = \sum_{k \in \Omega} \widetilde{P}_k$.

Теорема 2. *Имеет место равномерная сходимость спектральных разложений операторов S_θ и S^0_θ:* $\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^n \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^n P_k\|_2 = 0.$

Литература

А. М. Савчук, А. А. Шкаликов Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки 1999 – Т.66 – №6 – с.897-912.

А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Известия РАН, серия математическая 2011 – Т. 75 – №3 – с.4-28.

О РЯДАХ ФУРЬЕ ПО ОБОБЩЕННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА И УОЛША

Щербаков В.И. (Москва)

albatros-07@mail.ru

Пусть $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ - целочисленная последовательность с $p_0 = 1$ и $p_n \geqslant 2$. Рассматриваются частные суммы рядов Фурье по обобщенным системам Хаара (см., напр. [1]) и Уолша (системам Прайса или

Н.Я.Виленкина на модифицированном отрезке [0;1] (см., напр. [2] или [4])) Показана взаимосвязь частных сумм Фурье по этим системам, а также взаимосвязь между их сходимостями. Показаны также идентичность мажорант ядер Дирихле по этим системам, полученных Н.Я.Виленкиным [2] и В.И.Щербаковым [3; функция $q(x)$]. Показана, что полученное в [1] С.Ф.Лукомским условие равномерной сходимости рядов Фурье по обобщенным системам Хаара можно улучшить, однако существует непрерывная (в смысле топологии модифицированного отрезка) монотонная функция, ряд Фурье которой по обобщенным системам Хаара (в случае $\sup_n p_n = \infty$) расходится в некоторой точке. Найдены также аналоги других классических признаков сходимости рядов Фурье по обобщенным системам Хаара для любых $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Литература

С.Ф.Лукомский:"О рядах Хаара на компактных нульмерных группах Изв. Сарат. Ун., серия:Матем., мех, инф., вып.1, т.9, 2009 г.. стр. 24 - 29. *Н.Я.Виленкин*: "Об одном классе полных ортонормальных систем Изв. АН СССР, серия математика, т.11, 1947 г., стр. 373 -400. *В.И.Щербаков*:"О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам Вестник МГУ, серия матем., мех., №2, 1983 г., стр. 37 - 42. *J.J.Prise*: "Certain groups of orthonormal step functions Canad. J. Math., v.9, №3, 1957 j., p.413 - 425.

ОБ ИНВАРИАНТАХ НА СОВОКУПНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ ЛАМБЕРТА, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ЦЕПНЫМИ ЭКСПОНЕНТАМИ[1]

Буланов А.П. (Обнинск)
bulanov@iate.obninsk.ru

Рассмотрим две бесконечные цепные экспоненты

$$B(z) = e^{b_1 \cdot z \cdot e^{b_2 \cdot z \cdot e^{\cdots}}} = \langle e^z;\ b_1,\ b_2,\ \ldots\rangle\,, \tag{1}$$

$$A(w) = e^{a_1 \cdot w \cdot e^{a_2 \cdot w \cdot e^{\cdots}}} = \langle e^w;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\rangle\,, \tag{2}$$

где в последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ показатели $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $b_1 \neq b_2$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|b_n| = \overline{b} < \infty$, а показатели $a_1,\ a_2, \ldots$ определяются

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000)

рекуррентной формулой посредством $b_1,\ b_2,\ldots$ (в работе [1] на стр. 30 см. формулу (5), здесь см. ниже формулу (5)). Эти две цепные экспоненты образуют две функции Ламберта

$$L_b(z) = z \cdot B(z) \qquad L_a(w) = w \cdot A(w), \tag{3}$$

которые могут быть взаимно обратными функциями по отношению друг к другу. Первоначальная функция Ламберта

$$w = z \cdot \langle e^z;\ -b,\ -b,\ \ldots\rangle \tag{4}$$

(обратная ей $z = w \cdot e^{bw} = w \cdot \langle e^w;\ b,\ 0,\ 0,\ \ldots\rangle$) есть частный случай, когда в формулах (1) и (3) $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b$. Здесь, мы видим, $b_1 = b_2$. Включая неравенство $b_1 \neq b_2$, мы приходим к обобщению понятия первоначальной функции Ламберта.

Заметим, что это обобщение является промежуточным между первоначальной функцией Ламберта (4) и гиперфункциями Ламберта (Lambert's W function), которые ввел И. Н. Галидакис в 2004 году. W-функции Ламберта являются более широким обобщением; они используются при решении некоторых функциональных уравнений, возникающих, в частности, в гравитационной механике (см. [2], [3] и [4]).

Здесь задача заключается в том, чтобы по заданной функции $w = L_b(z) = z \cdot B(z)$ найти обратную к ней функцию $z = L_a(w) = w \cdot A(w)$, аналитическую в окрестности т. $w = 0$ (или наоборот: по заданной функции $z = L_a(w)$ найти обратную к ней функцию $w = L_b(z)$), то есть по заданным показателям $b_1, b_2, \ldots$ найти показатели $a_1, a_2, \ldots$.

В общем случае легко определяются первые три показателя

$$a_1 = -b_1, \quad a_2 = b_2 - b_1, a_3 = \frac{1}{b_2 - b_1} \cdot (b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2b_3).$$

Показатели $a_4, a_5, \ldots, a_n$ определяются по упомянутой рекуррентной формуле

$$a_n = \frac{-1}{a_1a_2\cdots a_{n-1}} \cdot \Bigg\{ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{k_1^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!} \times$$

$$\times \big[(-(n+1))^{k_1-1} b_1^{k_1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} + a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\big] +$$

$$+ b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n \Bigg\} =$$

$$= \frac{-1}{n!a_1a_2\cdots a_{n-1}}\cdot\Bigg\{\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n}\frac{n!k_1^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!}\times$$

$$\times\big[(-(n+1))^{k_1-1}b_1^{k_1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}}+a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\big]+$$

$$+n!b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n\Bigg\}. \qquad (5)$$

В работе [1] в развернутом виде представлены две формулы для определения «обратного» показателя a_4 посредством b_1, b_2, b_3, b_4 и показателя a_5 посредством b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и a_1, a_2, a_3, a_4.

Если развернуть правую часть формулы (5), то напишем слагаемые в количестве $2^n - 1$. В работе [5] представлена в развернутом виде формула для определения a_6 посредством $b_1, \ldots, b_6$ и $a_1, \ldots, a_5$. В правой части этой формулы в фигурной скобке имеем 63 слагаемых. Если же в тех слагаемых, в которых множителями являются a_k, заменить каждый множитель a_k его выражением, вычисленном по данной рекуррентной формуле (5) посредством $b_1, b_2, \ldots, b_k$, то количество слагаемых во много раз увеличится, но среди них окажутся подобные. В этом сообщении делается попытка сократить количество слагаемых путем выявления инвариантов. Некоторые слагаемые оставляем в обозначениях «a» и с обратным знаком переставляем в левую часть уравнения, полученного из основной формулы (5). Тогда основное равенство может оказаться инвариантом.

Далее используем обозначения: $\Delta_{k,s}(a) = \Delta_{k,s}(b)$ — инвариант (или уравнение «равновесия») являющийся формой k-го порядка от показателей $\{b\}$ или $\{a\}$, полученный из основной рекуррентной формулы (5) для $n = k + 1$; где s— номер варианта в процессе сокращения числа слагаемых в инварианте $\Delta_{k,s}$.

При этом если индекса s нет, то будем понимать, что для $n = k+1$ либо найден минимальный инвариант (самое легкое «равновесие»), например, для $n = 2$ имеем $\Delta_1 = 2a_2 - a_1 = 2b_2 - b_1$, а для $n = 3$ имеем $\Delta_2 = a_2a_3 - a_2^2 = b_2b_3 - b_2^2$, либо обнаружен из совокупности $\{\Delta_{k,s}\}$ инвариант, имеющий наименьшее количество слагаемых.

При построении очередного минимального инварианта (уравнения «равновесия») в формуле (5) будем брать правую часть равенства, где коэффициенты перед квадратными скобками (дабы они были целыми числами) имеют множитель $n!$.

Вот первые шаги. Так как $b_1 = -a_1$, то можно вынести из каждой квадратной скобки множитель b_1 и сократить на него внешний множитель перед фигурной скобкой, одновременно устраняя минус перед правой частью формулы (5).

Умножим левую и правую части формулы (5) на $n!a_2a_3\dots a_{n-1}$ и поставим в правой части последнее слагаемое первым, тогда получим уравнение

$$n!a_2a_3\dots a_{n-1}a_n = n!b_2b_3\dots b_{n-1}b_n +$$
$$+\Bigg\{ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{n!k_1^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!}\times$$
$$\times\big[(-(n+1))^{k_1-1}b_1^{k_1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{k_1-1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\big]\Bigg\}. \tag{6}$$

Сумму в правой части в фигурной скобке этого равенства запишем в виде

$$\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{n!k_1^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!}\times$$
$$\times\big[(-(n+1))^{k_1-1}b_1^{k_1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{k_1-1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\big] =$$
$$= \sum_{j=n}^{2}\Bigg\{\frac{n!}{j!} \sum_{k_2+k_3+\ldots+k_{n-1}=n-j} \frac{j^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_2!\cdots k_{n-1}!}\times$$
$$\times\big[(-(n+1))^{j-1}b_1^{j-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{j-1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\big]\Bigg\}+$$
$$+n! \sum_{k_2+k_3+\ldots+k_{n-1}=n-1} \frac{k_2^{k_3}k_3^{k_4}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_2!\cdots k_{n-1}!}\times$$
$$\times\big[(b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_2^{k_2}a_3^{k_3}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\big]. \tag{7}$$

Видно, что последняя сумма распадается на две суммы, в одной из которых слагаемые являются типа «b», а другая сумма имеет точно такие же слагаемые, только буквы b заменяются буквами a. Но не будем спешить переставлять сумму с буквами a в левую часть уравнения (6) для получения инварианта, потому что в первой сумме,где $k_1 = j \geqslant 2$, могут оказаться подобные пары.

Последующие шаги заключаются в том, что содержимое в каждой квадратной [ ] скобке, где $k_1 = j \geqslant 2$, мы помещаем в две квадратные скобки (т. е. $[\ ] = [\ ]_{(a,b)} + [\ ]_a$) в виде

$$[\ ]_{(a,b)} = [(-(n+1))^{j-1}(b_1^{j-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{j-1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}})] \tag{8}$$

$$[\ ]_a = [((-(n+1))^{j-1} - 1)a_1^{j-1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}] \tag{9}$$

Если слагаемое «a» в квадратной скобке (8) (с коэффициентом, стоящим перед квадратной скобкой) переставить в левую часть равенства (6), то мы имеем слагаемое в одном из инвариантов. Слагаемое же в квадратной скобке (9) подлежит преобразованиям вместе с другими «a»– слагаемыми с целью получения инвариантов для фиксированного n, используя инварианты, полученные для меньших n.

Рассмотрим конкретный вариант уравнения (6) при $n = 4$. Имеем

$$4!a_2a_3a_4 =$$
$$= 4!b_2b_3b_4 - 1\cdot[5^3b_1^3 + a_1^3] + 4\cdot 3[5^2(b_1^2b_2 - a_1^2a_2) + (5^2-1)a_1^2a_2] +$$
$$+\frac{4\cdot 3\cdot 2^2}{2}\cdot[-5(b_1b_2^2 - a_1a_2^2) - (5+1)a_1a_2^2] +$$
$$+4\cdot 3\cdot 2[-5(b_1b_2b_3 - a_1a_2a_3) - (5+1)a_1a_2a_3] + 4[b_2^3 - a_2^3] +$$
$$+4![b_2^2b_3 - a_2^2a_3] + 4\cdot 3[b_2b_3^2 - a_2a_3^2]. \tag{6a}$$

В первой квадратной скобке сумму представим в виде «равновесной» разности

$$5^3b_1^3 + a_1^3 = 5^3b_1^3 - b_1a_1^2 = (5^3-1)b_1^3 = 124\cdot\frac{1}{2}(b_1^3 + b_1^3) = 62(b_1^3 - a_1^3),$$

разделим все слагаемые уравнения (6а) на 2 и запишем полученное уравнение в виде

$$12a_2a_3a_4 = 12b_2b_3b_4 + \{-31(b_1^3 - a_1^3) + 150(b_1^2b_2 - a_1^2a_2) -$$
$$-60(b_1b_2^2 - a_1a_2^2) - 60(b_1b_2b_3 - a_1a_2a_3)\} + [144a_1^2a_2 - 72a_1a_2^2 - 72a_1a_2a_3] +$$
$$+\{2(b_2^3 - a_2^3) + 12(b_2^2b_3 - a_2^2a_3) + 6(b_2b_3^2 - a_2a_3^2)\}. \tag{10}$$

В двух фигурных скобках имеем семь пар, дающих «равновесие». Следует убедиться, что слагаемые в квадратных скобках после преобразования тоже дадут «равновесные» пары. Здесь понадобится вспомогательный инвариант

$$\varkappa_1(a) = a_2^2 - 2a_1a_2 + a_2a_3 =$$

$$\{\text{так как } a_2 = b_2 - b_1, a_2a_3 = b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2b_3\}$$

$$= (b_2 - b_1)^2 + 2b_1(b_2 - b_1) + (b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2b_3) =$$

$$= b_2^2 - 2b_1b_2 + b_2b_3 = \varkappa_1(b). \tag{11}$$

В квадратных скобках в уравнении (10) имеем

$$-72a_1(a_2^2 - 2a_1a_2 + a_2a_3) = -72a_1\varkappa_1(a) = -36a_1\varkappa_1(a) + 36b_1\varkappa_1(b) =$$

$$= 36(b_1b_2^2 - a_1a_2^2) - 72(b_1^2b_2 - a_1^2a_2) + 36(b_{!}b_2b_3 - a_1a_2a_3).$$

Таким образом, после приведения подобных, мы получили из основной формулы (6) инвариант $\Delta_{3,1}(a) = \Delta_{3,1}(b)$, где

$$\Delta_{3,1}(b) = 12b_2b_3b_4 - 31b_1^3 + 78b_1^2b_2 - 24b_1b_2^2 - 24b_1b_2b_3+$$

$$+2b_2^3 + 12b_2^2b_3 + 6b_2b_3^2 \tag{12}$$

из восьми слагаемых.

Будем сокращать количество слагаемых и выявлять инварианты с меньшим количеством слагаемых. В правой части равенства $\Delta_{3,1}(a) = \Delta_{3,1}(b)$ возьмем два слагаемых $-31b_1^3 + 78b_1^2b_2 = -31b_1^2(b_1 - 2b_2) + 16b_1^2b_2$, тогда в левой части аналогичные слагаемые предстанут в виде $-31a_1^2(a_1 - 2a_2) + 16a_1^2a_2$. В связи с тем, что $b_1^2(b_1 - 2b_2)$ инвариант, то можно из равенства (12) слагаемое $-31b_1^2(b_1 - 2b_2)$ убрать, (а слагаемое $16b_1^2b_2$ оставить) и полученный инвариант из (12) (разделив его на 2) обозначим через $\Delta_{3,2}(b)$. Тогда $\Delta_{3,2}(b) = 6b_2b_3b_4 + 3b_2b_3^2 + 8b_1^2b_2 - 12b_1b_2^2 - 12b_1b_2b_3 + b_2^3 + 6b_2^2b_3$. Этот инвариант можно сократить, используя произведение двух исходных первых инвариантов (с коэффициентом 3) $3\Delta_1(b) \cdot \Delta_2(b) = 3(2b_2 - b_1)(b_2b_3 - b_2^2) = 6b_2^2b_3 - 3b_1b_2b_3 - 6b_2^3 + 3b_1b_2^2$.

Запишем инвариант $\Delta_{3,2}(b)$ в виде $\Delta_{3,2}(b) = 6b_2b_3b_4 + 3b_2b_3^2 + 8b_1^2b_2 + (6b_2^2b_3 - 3b_1b_2b_3 - 6b_2^3 + 3b_1b_2^2) - (9b_1b_2b_3 - 7b_2^3 + 15b_1b_2^2)$. В правой части первая круглая скобка есть инвариант $3\Delta_1(b) \cdot \Delta_2(b)$ и его можно убрать. Тогда получаем

$$\Delta_{3,3}(b) = 6b_2b_3b_4 + 3b_2b_3^2 + 8b_1^2b_2 - 9b_1b_2b_3 + 7b_2^3 - 15b_1b_2^2. \tag{13}$$

Возьмем в правой части равенства (13) сначала два слагаемых $8b_1^2b_2 - 15b_1b_2^2$, которые представим в виде

$$8b_1^2b_2 - 16b_1b_2^2 + b_1b_2^2 = -8b_1b_2(2b_2 - b_1) + b_1b_2^2 = -8b_1b_2 \cdot \Delta_1(b) + b_1b_2^2; \tag{14}$$

а потом одно слагаемое $7b_2^3$, которое представим в виде

$$7b_2^3 = 9b_2^3 - 2b_2^3 + b_1b_2^2 - b_1b_2^2 = 9b_2^3 - b_2^2 \cdot \Delta_1(b) - b_1b_2^2, \tag{15}$$

тогда (имея в виду (14) и (15)) равенство (13) предстанет в виде

$$\Delta_{3,3}(b) = 6b_2b_3b_4 + 3b_2b_3^2 - 9b_1b_2b_3 + 9b_2^3 - \Delta_1 \cdot (8b_1b_2 + b_2^2). \tag{16}$$

Из левой части равенства (16) ($\Delta_{3,3}(a) = \Delta_{3,3}(b)$) слагаемое $-\Delta_1 \cdot (8a_1a_2 + a_2^2)$ переставим в правую часть и там, используя равенство $a_2 = b_2 - b_1$, образуется разность

$$-\Delta_1 \cdot (8b_1b_2 + b_2^2 - 8a_1a_2 - a_2^2) =$$

$$= -\Delta_1 \cdot [b_2^2 - (b_2^2 - 2b_2b_1 + b_1^2) + 8b_1b_2 + 8b_1(b_2 - b_1)] =$$

$$= -\Delta_1 \cdot [b_1(2b_2 - b_1) + 8b_1(2b_2 - b_1)] =$$

$$-9b_1 \cdot \Delta_1^2(b) = 9a_1 \cdot \Delta_1^2(a) = -\frac{9}{2}b_1 \cdot \Delta_1^2(b) - (-\frac{9}{2}a_1 \cdot \Delta_1^2(a)). \tag{17}$$

Отправляя содержимое в последней скобки в левую часть измененного равенства (16), тем самым восстановили «равновесие»:

$$\frac{3}{2}\Delta_{3,4}(a) = \frac{3}{2}\Delta_{3,4}(b) = 6b_2b_3b_4 + 3b_2b_3^2 - 9b_1b_2b_3 + 9b_2^3 - \frac{9}{2}b_1\Delta_1^2,$$

или

$$\Delta_{3,4}(a) = \Delta_{3,4}(b) = 4b_2b_3b_4 + 2b_2b_3^2 - 6b_1b_2b_3 + 6b_2^3 - 3b_1\Delta_1^2. \tag{18}$$

Из левой части этого равенства слагаемое $(-6a_1a_2a_3 + 6a_2^3)$ переставим в правую часть и там, используя равенства $a_2 = b_2 - b_1$ и $a_2a_3 = b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2b_3$, получим разность

$$(-6b_1b_2b_3 + 6b_2^3) + (6a_1a_2a_3 - 6a_2^3) = -12b_1b_2b_3 - 6b_1^2b_2 + 18b_1b_2^2 =$$

$$= -6b_1[2(b_2b_3 - b_2^2) + b_2(b_1 - b_2)]. \tag{19}$$

Здесь заметим, что $a_2(a_2 - a_1) = \varkappa_2(a) = \varkappa_2(b) = b_2(b_2 - b_1)$ и $\Delta_2(b) = b_2b_3 - b_2^2$ – инварианты, поэтому в правой части (19) (имея в виду равенство $2b_1 = b_1 - a_1$), получим слагаемые $-3b_1[2\Delta_2(b) - \varkappa_2(b)] + 3a_1[2\Delta_2(a) - \varkappa_2(a)]$. Переставляя второе слагаемое $3a_1[2\Delta_2(a) - \varkappa_2(a)]$ в левую часть измененного равенства (18), получим пятый вариант «равновесия»:

$$\Delta_{3,5}(a) = \Delta_{3,5}(b) = 4b_2b_3b_4 + 2b_2b_3^2 - 3b_1[2\Delta_2 + \Delta_1^2 - \varkappa_2(b)]. \quad (20)$$

Имея в виду равенства

$$\frac{3}{4}\Delta_1^2 + \frac{1}{4}b_1^2 = \frac{3}{4}(4b_2^2 - 4b_1b_2 + b_1^2) + \frac{1}{4}b_1^2 =$$

$$= 3b_2^2 - 3b_1b_2 + b_1^2 = 4b_2^2 - 4b_1b_2 - b_2^2 + b_1b_2 + b_1^2 = \Delta_1^2 - \varkappa_2(b)$$

формулу (20) можно записать в виде

$$\Delta_{3,5}(a) = \Delta_{3,5}(b) = 4b_2b_3b_4 + 2b_2b_3^2 - 3b_1[2\Delta_2 + \frac{3}{4}\Delta_1^2 + \frac{1}{4}b_1^2]. \quad (21)$$

Из (20) и (21) видно, как Δ_3 зависит от Δ_1 и Δ_2.

Вот пример, по которому можно судить о надежности приведенных преобразований.

Циклическая последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ с периодом два: $b_{2k-1} = \beta$, $b_{2k} = 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ имеет обратные показатели $a_1 = -\beta$; $a_2 = 1 - \beta$; $a_3 = -\beta$; $a_4 = 1/2 - \beta$; …, вычисленные по рекуррентной формуле (5). По формуле (21) имеем

$$\Delta_3(b) = 4\beta + 2\beta^2 - 3\beta\left[2(\beta - 1) + \frac{3}{4}(4 - 4\beta + \beta^2) + \frac{1}{4}\beta^2\right] = \beta + 5\beta^2 - 3\beta^3.$$

$$\Delta_3(a) = 4(1-\beta)(-\beta)(\frac{1}{2} - \beta) + 2(1-\beta)(-\beta)^2 + 3\beta\times$$

$$\times\left[2(-(1-\beta)\beta - (1-\beta)^2) + \frac{3}{4}(4(1-\beta)^2 + 4(1-\beta)^2 + 4(1-\beta)\beta + \beta^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\beta^2\right] = \beta + 5\beta^2 - 3\beta^3.$$

Этот пример и другие подтверждают равенство $\Delta_3(b) = \Delta_3(a)$.

Литература

1. Буланов А. П. *О рекуррентной формуле определения показателей обратной функции Ламберта* // Материалы 16-ой Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» Саратов, 27 января – 3 февраля 2012 г. С. 29-32.

2. Дубинов А. Е., Галидакис И. Н. *Явное решение уравнения Кеплера* // Письма в ЭЧАЯ, 2007. т. 4 Н.3(139), с. 365–370

3. Galidakis I. N. *On an application of Lambert's W function to infinite exponentials* // Complex Var. Theory Appl. 49 (2004), No. 11, P. 759–780.

4. Galidacis I. N. *On Solving the p-th Complex Auxiliary Equation* $f^{(p)}(z) = z$ //Complex Variables. 2005. V.50. No.13. P. 977–997.

5. Буланов А. П. *Шестой показатель обратной функции Ламберта, представленной цепной экспонентой* //Материалы VI Петрозаводской международной конференции «Комплексный анализ и приложения» (1-7 июля 2012 г.) г. Петрозаводск, 2012. С.5–10.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ДВУХФАКТОРНОГО ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА В ПСИХОЛОГО-АКМЕОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Малютина О.П. (Воронеж)

maloxdub@land.ru

С помощью модели двухфакторного дисперсионного анализа решается задача о влиянии на уровень квалификационной категории учителя следующих факторов: A — уровня самоценки, B — стажа работы, как по отдельности, так и во взаимодействии, т.е.

$$x = \mu + A + B + AB + \varepsilon,$$

где x — конкретное значение переменной (результатирующий признак — уровень квалификационной категории), μ — генеральное среднее, A — доля отклонения переменной, обусловленная влиянием фактора A — уровня самооценки, B — доля отклонения переменной, обусловленная влиянием фактора B — стажа работы, AB — доля отклонения переменной, обусловленная взаимодействием факторов A и B, ε — ошибка наблюдения (случайное отклонение).

Выборка составила 422 учителя. Проверка нормальности распределения осуществлялась с помощью критерия χ^2. Для доказательства отсутствия корреляционной связи между факторами использовался коэффициент линейной корреляции Пирсона.

Были получены следующие результаты

1. H_0 отклоняется по комплекту гипотез A, принимается H_1 — различия в уровне квалификационной категории между учителями с разным уровнем самооценки являются более выраженными, чем

различия, обусловленные случайными причинами внутри каждой группы учителей с одинаковым уровнем самооценки.

2. H_0 не отклоняется по комплекту гипотез B — различия в уровне квалификационной категории между учителями с разным стажем работы являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами внутри каждой группы с одинаковым стажем работы.

3. H_0 отклоняется по комплекту гипотез AB, принимается H_1 — различия в уровне квалификационной категории между учителями с разным уровнем самооценки и разным стажем работы являются более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

Литература

1. *Г. В. Горелова, И. А. Кацко* Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel. -Ростов-на-Дону.: "Феникс 2006. - 476с.

2. *Абдалина Л.В., Малютина О.П.* // Вестник Тамбовского университета. Серия "Гуманитарные науки". - Тамбов: Изд-во ТГУ им. Г.Р. Державина, 2010. - Вып. 6. - С. 155-161.

Именной указатель

Щ

Верстка и подготовка оригинал-макета:

Шабров С.А.

Издательство Воронежского государственного университета,
394053, г. Воронеж, Университетская пл., 1.
Тир. 500 экз. Подписано к печати 31.12.2012