

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА РАН
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ “МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. В.А. СТЕКЛОВА РАН” (МЦМУ МИАН)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Материалы Международной конференции,
посвященной 100-летию со дня рождения
академика Евгения Фроловича Мищенко,
Москва, 7–9 июня 2022 г.

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

Materials of the International Conference
dedicated to the centenary of the birth
of Academician Evgenii Frolovich Mishchenko,
Moscow, June 7–9, 2022

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Москва 2022

УДК 517.9
ББК 22.16
Д50

Д50 Дифференциальные уравнения и оптимальное управление: Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Москва, 7–9 июня 2022 г. / Отв. ред. К.О. Бесов. — М.: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2022. — 148 с.

ISBN 978-5-98419-086-2

Программный комитет:

В.В. Козлов (председатель), А.А. Давыдов (зам. председателя),
В. Вельов, В.З. Гринес, Л.В. Локуцкий, Н.Ю. Лукоянов

Организационный комитет:

Д.В. Трещёв (председатель), С.М. Асеев (зам. председателя),
К.О. Бесов, А.А. Давыдов, А.В. Клименко, С.П. Коновалов,
В.А. Мырикова, В.А. Тимофеева

Ответственный редактор К.О. Бесов

Конференция проводится при финансовой поддержке Фонда Саймонса и Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265)



SIMONS FOUNDATION

ISBN 978-5-98419-086-2

©Математический институт
им. В.А. Стеклова РАН, 2022

©МЦМУ МИАН, 2022

СОДЕРЖАНИЕ • CONTENTS

Asymptotic homology in sub-Riemannian geometry <i>Andrei Agrachev</i>	9
Оптимальность эйлеровых эластик в нильпотентных субримановых задачах <i>А. А. Ардентов</i>	9
О нелокальных теоремах об обратной функции и их приложениях <i>А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский</i>	10
Об одной задаче оптимального управления с асимптотическим конечным ограничением <i>С. М. Асеев</i>	12
Необходимые условия первого и второго порядков для траектории локального инфимума в оптимальном управлении <i>Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев</i>	15
Mean field type control systems <i>Yurii Averboukh</i>	17
Time-optimal problem for the heat equation <i>Abdulla Azamov, Mansur Bekimov</i>	19
Некоторые теоретико-множественные операции с множеством достижимости линейной управляемой системы <i>М. В. Балаишов, А. А. Тремба</i>	20
О задачах оптимального граничного управления колебаниями струны с условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени <i>В. Р. Барсегян</i>	22
Об одной задаче оптимального граничного управления неоднородной колебательной системой с заданной скоростью точек в промежуточный момент времени <i>В. Р. Барсегян, С. В. Солодуша</i>	25
Об интегральном тождестве для бигармонической задачи с препятствием <i>К. О. Бесов</i>	27
Оптимальное управление гибридной моделью Маркова–Дубинса <i>А. С. Бортаковский</i>	29
Дифференциальные уравнения С.П. Новикова и полиномиальные гамильтоновы динамические системы <i>В. М. Бухштабер</i>	31

Generalized solutions of boundary value problems for general quasi-linear PDEs <i>Vladimir Burskii</i>	31
Дифференциальная игра сближения–уклонения: альтернативная разрешимость и проблема релаксации <i>А. Г. Ченцов</i>	33
Существование оптимального смешанного отбора распределенного ресурса <i>А. А. Давыдов, Е. В. Винников</i>	35
Метод v -замены времени в задачах оптимального управления <i>А. В. Дмитриук, Н. П. Осмоловский</i>	37
О вариационных необходимых условиях оптимальности с позиционными управлениями спуска, усиливающих принцип максимума <i>В. А. Дыхта</i>	40
Multistability and limit cycles in polynomial dynamical systems <i>Valery A. Gaiko</i>	43
Системы связанных сингулярно возмущенных уравнений с запаздыванием <i>С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов</i>	46
Задачи оптимального управления системами с дробными производными: принцип динамического программирования и уравнения Гамильтона–Якоби <i>М. И. Гомоюнов</i>	48
О разложении несущих поверхностей для A -диффеоморфизмов с нетривиальными аттракторами и репеллерами <i>В. З. Гринес, Д. И. Мину</i>	50
Возмущения негиперболических автоморфизмов двумерного тора <i>В. З. Гринес, Д. И. Мину, Е. Е. Чилина</i>	52
Устойчивость аневризмы в мембранной трубке с локализованной неоднородностью стенки с протекающей внутри жидкостью, имеющей непостоянный профиль скорости <i>А. Т. Ильичев, В. А. Шаргатов</i>	55
Π -strategy for inertially moving objects under integral-geometric constraints <i>Bahodirjon Juraev, Adahambek Akbarov</i>	57
Kowalewski top and complex Lie algebras <i>V. Jurdjevic</i>	60
Метод возмущений в задаче оптимизации переходного процесса в квазилинейной динамической системе <i>А. И. Калинин, Л. И. Лавринович</i>	61

Иерархия квазистационарных приближений для системы уравнений Максвелла в неоднородных средах	
<i>А. В. Калинин, А. А. Тютютина</i>	63
Stability of linear control systems with frequent switches	
<i>Rinat Kamalov, Vladimir Yu. Protasov</i>	63
Построение множеств разрешимости в линейных дифференциальных играх сближения “к моменту” с вогнутым целевым множеством	
<i>Л. В. Камнева</i>	65
Нелокальная динамика модели связанных осцилляторов с большим параметром и запаздыванием	
<i>А. А. Кащенко</i>	67
Локальная динамика уравнения второго порядка с запаздыванием	
<i>И. С. Кащенко</i>	68
Релаксационные колебания в уравнении второго порядка с запаздывающей обратной связью	
<i>С. А. Кащенко</i>	69
Нерегулярные решения в цепочке связанных уравнений Ван-дер-Поля	
<i>С. А. Кащенко, А. О. Толбей</i>	71
Оптимальные стратегии сочетания лекарственной и онколитической вирусной терапий в модели лечения рака	
<i>Е. Н. Хайлов, Э. В. Григорьева</i>	73
О необходимости краевых условий принципа максимума на бесконечности	
<i>Д. В. Хлопин</i>	75
ВИЧ-процесс — дифференциальная игра	
<i>А. В. Ким, Г. А. Бочаров</i>	77
A limit theorem for the stochastic Lorenz model	
<i>Yulia Klevtsova</i>	79
Об интегрируемости уравнений динамики в непотенциальном силовом поле	
<i>В. В. Козлов</i>	80
On complete controllability of a highly degenerate four-level quantum system with a “chained” coupling Hamiltonian	
<i>Sergey Kuznetsov, Alexander N. Pechen</i>	81
Parametric smooth variational principles and probabilistic dynamic optimization problems	
<i>Yuri S. Ledyayev</i>	82

Системы Шлезингера с базисом гипергеометрических решений <i>В. П. Лексин</i>	84
Hamiltonian homoclinic dynamics <i>Lev Lerman</i>	85
Application of the Kantorovich–Galerkin method for the analysis of resonant systems <i>V. L. Litvinov</i>	88
Derivative of sub-Riemannian geodesics is L_p -Hölder continuous <i>Lev Lokutsievskiy</i>	89
Singularity of Fuller type in a control problem of a rocket <i>Larisa Manita, Mariya Ronzhina</i>	90
Задача быстрогодействия на группе Гейзенберга с управлением в полукруге <i>А. П. Маштаков</i>	92
Optimal control problems and methods for some open quantum systems <i>Oleg V. Morzhin, Alexander N. Pechen</i>	94
Построение норм Ляпунова для двумерных динамических систем с переключениями <i>Асият Мусаева</i>	97
Verification of controllability of some degenerate four-level quantum systems <i>А. А. Мышкова, А. Н. Печен</i>	98
On an isoperimetric problem on the Lobachevsky hyperbolic plane with left-invariant Finsler structure <i>Victoria Myrikova</i>	99
Асимптотическое приближение решений с переходными слоями периодических краевых задач для уравнений типа уравнения Бюргера и применение в задачах граничного управления <i>Н. Н. Нефедов, В. Т. Волков</i>	101
Некоторые задачи минимаксного управления <i>М. С. Никольский</i>	102
Симметрия и аналитика при описании множества достижимости машины Дубинса <i>В. С. Пацко, А. А. Федотов</i>	104
Cooperative differential games on networks <i>Leon Petrosyan, David Yeung, Yaroslava Pankratova</i>	106

Об одной задаче преследования двух жестко скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх	
<i>Н. Н. Петров</i>	108
GRAPE method for open quantum systems driven by coherent and incoherent controls	
<i>Vadim Petruhanov, Alexander Pechen</i>	110
Dynamics of a voting process based on the bounded confidence principle	
<i>Sergei Yu. Pilyugin</i>	111
Вязкостные решения уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана для систем нейтрального типа	
<i>А. Р. Плаксин</i>	113
Узел Хопфа как полный инвариант диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-сфере	
<i>О. В. Починка</i>	116
Attainable sets for control systems on a free Carnot group with positive controls	
<i>Alexey Podobryaev</i>	117
Поведение решений математической модели движения транспортного потока	
<i>М. А. Погребняк</i>	119
Аномальные траектории в субримановой (2, 3, 5, 8)-задаче	
<i>Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова</i>	120
A nonlinear differential game of l -capture	
<i>Bahrom Samatov, Ulmasjon Soyibboev</i>	121
The l -catch and evasion differential games for inertial motions	
<i>Bahrom Samatov, Mohisanam Turgunboeva</i>	124
Linear differential games with Langenhop type constraints on controls	
<i>Bahrom Samatov, Saboxat Uralova</i>	127
Численное решение линейных задач оптимального управления с различными функционалами качества	
<i>С. П. Самсонов</i>	130
Невыпуклый и выпуклый вариационные подходы к решению задачи реконструкции управлений	
<i>Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников</i>	130
Asymptotic regimes in near-Hamiltonian systems with damped oscillatory perturbations	
<i>Oskar Sultanov</i>	133

Теорема Боголюбова для управляемой системы с максимально монотонными операторами	
<i>А. А. Толстоногов</i>	133
Линеаризация с помощью функционального параметра	
<i>Д. В. Трещев</i>	136
Вариационные задачи нелинейной теории упругости и операторы композиции в пространствах Соболева	
<i>С. К. Водопьянов</i>	136
Higher order traps in quantum control landscapes	
<i>Boris Volkov</i>	138
Об оптимальном сборе ресурса из структурированной популяции	
<i>М. С. Волдеаб, Л. И. Родина</i>	139
Locally inertial controls in differential evasion games with integral restrictions	
<i>L. P. Yugay</i>	141
Impulsive differential equations with nonlinear mixed maxima	
<i>Tursun Yuldashev</i>	143
Явное решение задачи Ньютона при отказе от требования осевой симметрии	
<i>М. И. Зеликин, Л. В. Локуцевский</i>	146
Принятие решения на основе паретовского объединения принципов минимаксного сожаления и гарантированного результата	
<i>В. И. Жуковский, Л. В. Жуковская, Ю. С. Мухина</i>	147

ASYMPTOTIC HOMOLOGY IN SUB-RIEMANNIAN GEOMETRY

Andrei Agrachev

SISSA, Trieste, Italy & MIAN, Moscow, Russia

`agrachev@sisssa.it`

Sub-Riemannian manifold is a connected Riemannian manifold equipped with a nonholonomic vector distribution $\Delta \subset TM$. Admissible curves are integral curves of the distribution: $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ is admissible if $\dot{\gamma} \in \Delta_{\gamma(t)}$, $0 \leq t \leq 1$. Any two points of M are connected by an admissible curve.

Moreover, given $q_0, q_1 \in M$, the embedding of the space of admissible curves $\Omega_{\Delta}(q_0, q_1)$ connecting q_0 with q_1 in the space of all curves $\Omega(q_0, q_1)$ connecting the same points is a homotopy equivalence (both spaces are endowed with the topology of $W^{1,p}$, where $1 \leq p < \infty$).

In other words, any continuous family of curves connecting q_0 with q_1 is homotopic to a family of admissible curves, where the boundary points q_0, q_1 are kept fixed during the homotopy.

This picture changes drastically if we restrict the length of the curves. The homotopy types of the spaces $\Omega^r(q_0, q_1) = \{\gamma \in \Omega(q_0, q_1) : \text{length}(\gamma) \leq r\}$ and $\Omega_{\Delta}^r(q_0, q_1) = \{\gamma \in \Omega_{\Delta}(q_0, q_1) : \text{length}(\gamma) \leq r\}$ are very different for arbitrarily large finite r , where the difference is detected in large dimensions. Actually, any continuous map $\phi: S^n \rightarrow \Omega(q_0, q_1)$ is homotopic to a map $\phi_{\Delta}: \Omega_{\Delta}^{R_n}(q_0, q_1)$ for some R_n , where $R_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$.

This is a homotopic analogue of a well-known fact: any curve can be uniformly approximated by an admissible curve but the lengths of the approximating admissible curves go to infinity as they tend to the non-admissible one.

If $M = \mathbb{R}^n$, then $\Omega^r(q_0, q_1)$ is contractible for large enough r , while Ω_{Δ}^r has a rich interesting topology. In this talk, I am going to demonstrate this phenomenon by an explicit computation of the asymptotics of the homology groups of $\Omega_{\Delta}^r(q_0, q_1)$ as $r \rightarrow \infty$ for a class of step 2 distributions Δ .

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ЭЙЛЕРОВЫХ ЭЛАСТИК В НИЛЬПОТЕНТНЫХ СУБРИМАНОВЫХ ЗАДАЧАХ*

А. А. Ардентов

ИИС им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия

`aaa@pereslavl.ru`

Рассматриваются следующие четыре нильпотентные субримановы задачи: три левоинвариантные задачи на группах Гейзенберга, Энгеля, Картана, а также нелевоинвариантная задача в плоском случае Мартине. Все рассматриваемые

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 22-11-00140.

задачи имеют геометрическую интерпретацию в виде обобщения задачи Дидоны. Решения задаются с помощью дуг эластик Эйлера.

Обобщенная субриманова задача для этих случаев формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 X_1 + u_2 X_2, & q &\in M \cong \mathbb{R}^n, \\ q(0) &= q_0, & q(T) &= q_1, \\ l(q(\cdot)) &= \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

В случае Гейзенберга решения суть прямые и окружности (простейшие эластики). Решениями для плоского случая Мартине являются прямые и инфлекссионные эластики. Для групп Энгеля и Картана все семейство эйлеровых эластик дает решения (прямые и окружности, инфлекссионные, неинфлекссионные и критические эластики).

Время разреза известно для каждой из задач. Конечное время разреза удобно описать в терминах периода эластики. Представлено описание времени разреза для каждой из рассмотренных задач в виде функции от формы эластики.

Исследование опирается на ряд работ [1–3].

Список литературы

1. *Agrachev A., Bonnard B., Chyba M., Kupka I.* Sub-Riemannian sphere in Martinet at case // ESAIM: COCV. 1997. V. 2. P. 377–448.
2. *Ardentov A.A., Sachkov Yu.L.* Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group // ESAIM: COCV. 2015. V. 21, No. 4. P. 958–988.
3. *Ardentov A., Hakavuori E.* Cut time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group // ESAIM: COCV. 2022. V. 28, No. 12.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ*

А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
arutyunov@cs.msu.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Пусть X, Y — банаховы пространства, $F: X \rightarrow Y$ — заданное отображение. Рассмотрим уравнение

$$F(x) = y \tag{1}$$

относительно неизвестного $x \in X$ и параметра $y \in Y$. Всюду далее будем предполагать, что отображение F дифференцируемо по Фреше в каждой точке $x \in X$. Производную отображения F в точке $x \in X$ будем обозначать через $F'(x)$.

*Исследование первого автора выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00042). Исследование второго автора выполнено при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-2658.2021.1.1).

Обратной (правой обратной) функцией для уравнения (1) называется отображение $G: Y \rightarrow X$, которое каждому значению параметра $y \in Y$ ставит в соответствие решение $G(y)$ уравнения (1), т.е.

$$F(G(y)) \equiv 0, \quad y \in Y.$$

Классические теоремы об обратной функции носят локальный характер, т.е. гарантируют существование решения $G(y)$ для значений параметра y из некоторой окрестности заданной точки $y_0 \in Y$. Нами получены достаточные условия существования непрерывной неявной функции G , определенной на заданном подмножестве в пространстве Y . Отметим, что аналогичные известные ранее результаты (см., например, [1, 2]) справедливы в предположении, что линейный оператор $F'(x)$ является обратимым или имеет непрерывный линейный правый обратный оператор при любом $x \in X$. Приводимая ниже теорема об обратной функции не содержит таких априорных предположений.

Обозначим через $L(X, Y)$ пространство линейных непрерывных операторов $A: X \rightarrow Y$. Через $\text{cov } A$ обозначим константу Банаха линейного оператора $A \in L(X, Y)$, т.е.

$$\text{cov } A := \sup\{\alpha \geq 0: B_Y(\alpha) \subset AB(1)\}.$$

Здесь $B_Y(\alpha)$ — замкнутый шар в пространстве Y с центром в нуле радиуса α . Из теоремы Банаха об открытом отображении следует, что $\text{cov } A > 0$ тогда и только тогда, когда $AX = Y$.

Положим

$$a(t) := \inf\{\text{cov } F'(x): x \in B_X(t)\}, \quad t \geq 0.$$

Основной результат исследования состоит в следующем. Пусть заданы числа $R \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ и $\varepsilon > 0$ и отображение F является достаточно гладким, $F(0) = 0$. Если

$$(1 + \varepsilon)R \leq \int_0^{+\infty} a(t) dt,$$

то существует непрерывное отображение $G: B_Y(R) \rightarrow X$ такое, что $F(G(y)) \equiv y$, $y \in B_Y(R)$, и имеет место неравенство

$$\int_0^{\|G(y)\|} a(t) dt \leq (1 + \varepsilon)\|y\| \quad \forall y \in Y.$$

Приведенные достаточные условия существования неявной функции применены к исследованию ряда задач. Получены условия существования точки совпадения гладкого накрывающего отображения и вполне непрерывного отображения банаховых пространств. Частично эти результаты опубликованы в [3].

Список литературы

1. Царьков И.Г. О глобальном существовании неявной функции // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 7. С. 79–116.
2. Rheinboldt W. Local mapping relations and global implicit function theorems // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 138. P. 183–198.
3. Арутюнов А.В. Жуковский С.Е. Глобальная и полулокальная теоремы о неявной и об обратной функции в банаховых пространствах // Мат. сб. 2022. Т. 213, № 1. С. 3–45.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С АСИМПТОТИЧЕСКИМ КОНЦЕВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ*

С. М. Асеев

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия
aseev@mi-ras.ru

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления (P):

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

$$u(t) \in U, \quad (3)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{t \geq T} h(x(t)) \geq 0. \quad (4)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, U — непустой выпуклый компакт из \mathbb{R}^m , $\rho \geq 0$ — параметр дисконтирования. Предполагается, что $x_0 \in G$, где G — заданное открытое множество в \mathbb{R}^n . Функции $f: G \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ и $g: G \times U \rightarrow \mathbb{R}^1$ предполагаются непрерывными вместе с производными $f_x(\cdot, \cdot)$, $h_x(\cdot)$ и $g_x(\cdot, \cdot)$ на множествах своего определения. Кроме того, предполагается, что для любого $x \in G$ функция $g(x, \cdot): U \rightarrow \mathbb{R}^1$ вогнута.

В качестве *допустимых управлений* в задаче (P) рассматриваются все измеримые по Лебегу функции $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющие ограничению (3). Для произвольного допустимого управления $u(\cdot)$ соответствующая ему *траектория* $x(\cdot)$ есть локально абсолютно непрерывное решение задачи Коши (2), определенное в G на некотором конечном или бесконечном интервале $[0, \tau)$, $\tau > 0$. Будем считать, что для любого допустимого управления $u(\cdot)$ соответствующая траектория $x(\cdot)$ определена в G на всем интервале $[0, \infty)$. Траекторию $x(\cdot)$ будем называть *допустимой* в задаче (P), если для нее выполняется асимптотическое ограничение (4). В этом случае пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ допустимая. Оптимальность пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ понимается в сильном смысле, т.е. $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — *оптимальная* допустимая пара, если функционал $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ сходится и его величина максимальная на множестве всех допустимых пар.

Будем считать выполненными следующие условия.

(A1) *Правая часть управляемой системы (2) аффинна по управлению, т.е. функция $f(\cdot, \cdot)$ имеет вид*

$$f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x)u^i, \quad x \in G, \quad u \in U,$$

где все функции $f_i: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 19-11-00223).

(A2) Существует такая функция $\omega: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$, что $\omega(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$ и для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ имеем

$$\left| \int_T^{T'} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \right| \leq \omega(T), \quad 0 \leq T \leq T'.$$

Пусть $u(\cdot)$ — допустимое управление, а $x(\cdot)$ — соответствующая ему траектория. Обозначим через $Y_{(x,u)}(\cdot)$ и $Z_{(x,u)}(\cdot)$ нормированные в нулевой момент фундаментальные матричные решения линейных систем

$$\dot{y}(t) = f_x(x(t), u(t))y(t) \quad \text{и} \quad \dot{z}(t) = -[f_x(x(t), u(t))]^* z(t)$$

соответственно.

В силу сделанных предположений существует такая непрерывная функция $M: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, что для любого допустимого управления $u(\cdot)$ и соответствующей ему траектории $x(\cdot)$ имеем $\|Y_{(x,u)}(t)\| \leq M(t)$, $t \geq 0$. Положим

$$m(t) = \min_{s \geq 0: |s-t| \leq 1} \frac{1}{1 + M(s)}, \quad \mu(t) = \frac{\omega(t)}{m(t)}, \quad t \geq 0.$$

Следующие условия характеризуют доминирование дисконтирующего множителя в функционале (1), регулярность асимптотического ограничения (4) и управляемость системы (2) относительно ограничения (4).

(A3) (i) Справедливо равенство $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0$;

(ii) существуют такая функция $\nu: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\nu(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ справедлива оценка

$$\left\| \int_T^{T'} e^{-\rho s} [Z_{(x,u)}(s)]^{-1} g_x(x(s), u(s)) ds \right\| \leq \nu(T), \quad 0 \leq T \leq T'.$$

(A4) Существуют такие постоянные $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$ и $\gamma_1 > 0$, что для любого $x \in G$, удовлетворяющего неравенству $|h(x)| \leq \varepsilon_0$, имеем $\gamma_0 \leq \|h_x(x)\| \leq \gamma_1$.

(A5) Существует такая постоянная $\varepsilon_1 > 0$, что если для соответствующей допустимому управлению $u(\cdot)$ траектории $x(\cdot)$ в момент $\tau \geq 0$ выполняется неравенство $h(x(\tau)) \geq -\varepsilon_1$, то, переопределив в случае необходимости управление $u(\cdot)$ на интервале $[\tau, \infty)$, всегда можно считать, что пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ является допустимой в задаче (P).

Функцию Гамильтона–Понтрягина $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ и гамильтониан $H(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ задачи (P) определим стандартным образом:

$$\mathcal{H}(t, x, u, \psi^0, \psi) = \langle \psi, f(x, u) \rangle + \psi^0 e^{-\rho t} g(x, u),$$

$$H(t, x, \psi^0, \psi) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x, u, \psi^0, \psi),$$

где $t \geq 0$, $x \in G$, $u \in U$, $\psi^0 \in \mathbb{R}^1$, $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство следующего результата дано в работе [1].

Теорема. Пусть выполняются условия (A1)–(A5) и $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — оптимальная допустимая пара в задаче (P). Тогда существуют такие не обращающиеся одновременно в нуль число $\psi^0 \geq 0$ и вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, что выполняются следующие условия.

(i) Функция $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$\psi(t) = Z_*(t)\xi + \psi^0 Z_*(t) \int_t^\infty e^{-\rho t} [Z_*(s)]^{-1} g_x(x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0,$$

является локально абсолютно непрерывным решением системы

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t))$$

и справедливо условие максимума

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)) \stackrel{n.g.}{=} H(t, x_*(t), \psi^0, \psi(t)).$$

(ii) Выполняется условие стационарности гамильтониана

$$H(t, x_*(t), \psi^0, \psi(t)) = \psi^0 \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

(iii) Выполняется включение

$$\xi \in \text{Ls}_{t \rightarrow \infty} \{ [Z_*(t)]^{-1} N_*(t) \}.$$

Здесь $Z_*(\cdot)$ — нормированное в нулевой момент времени фундаментальное матричное решение системы

$$\dot{z}(t) = -f_x^*(t, x_*(t), u_*(t))z(t),$$

многозначное отображение $N_*(\cdot)$ определяется равенством

$$N_*(t) = \bigcup_{\lambda \geq 0} \{ \lambda h_x(x_*(t)) \}, \quad t \geq 0,$$

а множество $\text{Ls}_{t \rightarrow \infty} \{ [Z_*(t)]^{-1} N_*(t) \}$ — верхний топологический предел многозначного отображения $t \mapsto [Z_*(t)]^{-1} N_*(t)$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \text{Ls}_{t \rightarrow \infty} \{ [Z_*(t)]^{-1} N_*(t) \} = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^n : \exists \{t_k\}_{k=1}^\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty, \exists \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty, \lambda_k \geq 0, \right. \\ \left. \zeta = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k [Z_*(t_k)]^{-1} h_x(x_*(t_k)) \right\}. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Асеев С.М. Принцип максимума для задачи оптимального управления с асимптотическим конечным ограничением // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 35–48.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ
ДЛЯ ТРАЕКТОРИИ ЛОКАЛЬНОГО ИНФИМУМА
В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

eramag@mail.ru, georgii.magaril@math.msu.ru

Рассматривается стандартная задача оптимального управления

$$f_0(x(t_0), x(t_1)) \rightarrow \inf, \quad (1)$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u(t)), \quad u(t) \in U \quad \text{для п.в. } t \in [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$f(x(t_0), x(t_1)) \leq 0, \quad g(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad (3)$$

где U — подмножество \mathbb{R}^r , отображение $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$, функция $f_0: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и отображения $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ и $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ удовлетворяют стандартным предположениям гладкости.

Для этой задачи вводится понятие *траектории локального инфимума* (определенное ранее в работе авторов [1]), которое обобщает понятие оптимальной траектории. Напомним это определение.

Функция $x(\cdot) \in AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ — *допустимая траектория* для управляемой системы (2), (3), если найдется такое $u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$, что пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ удовлетворяет условиям (2) и (3).

Рассмотрим множество всех допустимых траекторий для управляемой системы (2), (3) как подмножество пространства $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ с индуцированной из этого пространства метрикой.

Допустимая траектория $\hat{x}(\cdot)$ называется *оптимальной траекторией* в задаче (1)–(3), если она доставляет локальный минимум функционалу f_0 на множестве всех допустимых траекторий для управляемой системы (2), (3).

Стандартное определение того, что пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ доставляет сильный минимум (или является оптимальным процессом) в задаче (1)–(3), равносильно тому, что $\hat{x}(\cdot)$ — оптимальная траектория в этой задаче.

Следующее определение дает обобщение понятия оптимальной траектории.

Определение. Функция $\hat{x}(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ называется *траекторией локального инфимума* в задаче (1)–(3), если она доставляет локальный минимум функционалу f_0 на замыкании в $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ множества допустимых траекторий.

Если минимум глобальный, то говорим о траектории глобального инфимума.

Понятно, что значение f_0 на траектории глобального инфимума совпадает с точной нижней гранью f_0 по всем допустимым траекториям.

Легко видеть, что если $\hat{x}(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (1)–(3), то $\hat{x}(\cdot)$ — траектория локального инфимума в этой задаче. С другой стороны, если функция $\hat{x}(\cdot)$ — траектория локального инфимума в задаче (1)–(3) и допустима, то $\hat{x}(\cdot)$ — оптимальная траектория в данной задаче.

Как видно, траектория локального инфимума не является, вообще говоря, допустимой траекторией, а является лишь равномерным пределом таковых. Оптимальная траектория может не существовать, но существования траектории локального инфимума, очевидно, вполне достаточно для приложений. Кроме того, условия существования траектории локального инфимума существенно слабее стандартных условий, гарантирующих существование оптимальной траектории. Таким образом, класс задач, где существует траектория локального инфимума, значительно шире класса задач, где существует оптимальная траектория.

Для траектории локального инфимума выводятся необходимые условия первого и второго порядков (условия первого порядка получены в [1], условия второго порядка будут опубликованы в [2]). Если траектория локального инфимума является, в частности, оптимальной траекторией, то полученные необходимые условия содержат классический принцип максимума Понтрягина (см. [3]) и известные необходимые условия оптимальности второго порядка (см., например, [4]), но также и другие соотношения, которые (как будет показано на примерах) могут давать дополнительную информацию об оптимальном процессе. В этом смысле доказанные результаты усиливают принцип максимума Понтрягина и известные условия оптимальности второго порядка.

Если траектория локального инфимума не является оптимальной траекторией, то полученные необходимые условия представляют собой инструмент для нахождения траекторий, “подозрительных” на траекторию локального инфимума, который применяется во многом так же, как принцип максимума Понтрягина и условия второго порядка для нахождения процессов, подозрительных на оптимальность.

Отметим также, что полученные результаты усиливают, в частности, и классические необходимые условия сильного минимума в вариационном исчислении (уравнение Эйлера и условие Вейерштрасса).

Список литературы

1. Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г. Локальный инфимум и семейство принципов максимума в оптимальном управлении // Мат. сб. 2020. Т. 211, № 6. С. 3–39.
2. Avakov E.R., Magaril-Ilyayev G.G. Necessary second-order conditions for a local infimum in optimal control // SIAM J. Control Optim. 2022 (in press).
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961.
4. Левитин Е.С., Милотин А.А., Осмоловский Н.П. Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // УМН. 1978. Т. 33, № 6. С. 85–148.

MEAN FIELD TYPE CONTROL SYSTEMS

Yurii Averboukh

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russia

averboukh@gmail.com

A mean field type control system is a mathematical model of a system of many interacting similar agents trying to achieve a common goal. The mean field approach implies the study in the limit case when the number of agents tends to infinity while the agents interact via some external media. This leads to the study of evolution of the probability measure describing the distribution of agents. It can be regarded as a phase variable for the mean field type control system. In the talk we will restrict our attention to the case when the dynamics of each agent is given by an ordinary differential equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), m(t), u(t)). \quad (1)$$

Here t stands for the time, $x(t)$ describes the state of the agent at time t , $u(t)$ is the control of the agent, while $m(t)$ is a current distribution of agents.

Notice that the mean field type control theory finds applications in the control of systems of autonomous vehicles and drones. Recently, the mean field type control theory was used for the analysis of machine learning.

The talk will deal with the survey of modern approaches to the mean field type control theory. Primarily, we will consider only mathematical aspects of this field of science.

The first point we will discuss in the talk is the formal definition of open-loop strategies and the corresponding evolution of distribution of agents. It can be performed in three ways.

First, one can choose a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) with non-atomic measure P and label the agents within the elements of Ω . Assuming that the motion of each agent obeys

$$\frac{d}{dt}x(t, \omega) = f(t, x(t, \omega), m(t), u(t, \omega)),$$

we claim that, for each t and every measurable $Y \subset \mathbb{R}^d$,

$$m(t, Y) = P\{\omega \in \Omega: x(t, \omega) \in Y\}.$$

This definition refers to the so called Lagrangian approach. In many cases it is convenient to choose Ω equal to the product of the space of initial agents' states and the space of controls.

Finally, let us mention the Eulerian approach, which implies that the decision maker chooses a strategy $u(t, x)$, while $m(t)$ satisfies in the sense of distribution the continuity equation

$$\frac{\partial}{\partial t}m(t) + \operatorname{div}(f(t, x, m(t), u(t, x(t)))m(t)) = 0.$$

Based on [5] and [7], we will discuss the equivalence between the aforementioned definitions.

The second point is the feedback formalization. In this case, we assume that the decision maker has information on the current distribution of agents and uses it to form a control. Additionally, we will adopt the Krasovskii–Subbotin approach which assumes stepwise constant controls. The results of [3] show that this feedback formalization is equivalent to the open-loop one.

One of the key questions within control theory is the optimal control problems and characterization of their solutions via dynamic programming. For simplicity, we will consider the case when all agents try to minimize the terminal payoff given by $\sigma(m(T))$, where T is a final time and $m(T)$ stands for the final distribution of agents. Certainly the dynamics is given by (1). We describe the dynamic programming for this mean field type optimal control problem. Additionally, we will discuss a link between the mean field type optimal control problem and the Hamilton–Jacobi equation in the space of probability measures that takes a form

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H(t, m, \nabla_m \varphi) = 0, \quad \varphi(T, m) = \sigma(m).$$

Here φ is a value function, i.e., it assigns to an initial time and a probability corresponding to the initial distribution of agents the optimal outcome. Further, $\nabla_m \varphi$ stands for the derivative w.r.t. the measure variable. Recall [8] that one should understand the solution of the Hamilton–Jacobi equation in the minimax/viscosity sense and define it via tools of nonsmooth analysis such as directional derivatives or sub/superdifferentials. We will use the approaches of [2, 4, 6, 7] to introduce the nonsmooth analysis in the space of probability measures, define a minimax/viscosity solution to the Hamilton–Jacobi equation in the space of probabilities and provide the link between this concept and the solution of the mean field type optimal control problems.

The last part of the talk will deal with the approaches to the numerical scheme for the mean field type optimal control problem. The most promising way relies on the lattice approximations, which reduces the original control problem in the space of probability measures to the finite-dimensional control problem. We will give a short introduction to this technique and discuss the corresponding approximation rate.

References

1. *Averboukh Yu.* Lattice approximations of the first-order mean field type differential games // *Nonlinear Diff. Eqns. Appl.* 2021. V. 28, No. 6. Pap. 65.
2. *Averboukh Yu.* A stability property in mean field type differential games // *J. Math. Anal. Appl.* 2021. V. 498, No. 1. Pap. 124940.
3. *Averboukh Yu., Marigonda A., Quincampoix M.* Extremal shift rule and viability property for mean field-type control systems // *J. Optim. Theory Appl.* 2021. V. 189, No. 1. P. 244–270.
4. *Cardaliaguet P., Delarue F., Lasry J.-M., Lions P.-L.* The master equation and the convergence problem in mean field games. Princeton Univ. Press, 2019.
5. *Cavagnari G., Lisini S., Orrieri C., Savaré G.* Lagrangian, Eulerian and Kantorovich formulations of multi-agent optimal control problems: Equivalence and gamma-convergence // *J. Diff. Eqns.* 2022. V. 322, No. 2. P. 268–364.
6. *Gangbo W., Tudorascu A.* On differentiability in the Wasserstein space and well-posedness for Hamilton–Jacobi equations // *J. math. pures appl.* 2019. V. 125. P. 119–174.

7. *Jimenez C., Marigonda A., Quincampoix M.* Optimal control of multiagent systems in the Wasserstein space // *Calc. Var. Partial Diff. Eqns.* 2020. V. 59. Pap. 58.
8. *Subbotin A.I.* Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical perspective. Birkhäuser, 1995.

TIME-OPTIMAL PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION

Abdulla Azamov, Mansur Bekimov

*V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of Academy of Sciences of Uzbekistan,
Tashkent, Uzbekistan*

abdulla.azamov@gmail.com, mansu@mail.ru

We consider the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + v(t, x) \quad (1)$$

in the region $\Delta = (0, \infty) \times D$, where $D \subset \mathbb{R}^d$ has Lyapunov boundary ∂D and A is a uniformly elliptic differential operator of order $2N$ in the variable x (see [1]). System (1) is studied with the conditions

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad Mu(t, s) = 0, \quad |v(t, x)| \leq v_0, \quad (2)$$

where $\varphi(\cdot) \in L_2([0, T] \times \overline{D})$ and M is a differential operator of order less than $2N$. It is known that the solution of problem (1), (2) exists in the Sobolev space $W_{2,1}(\Delta)$ (see [1]). A function $v(\cdot, \cdot)|_{[0, T]}$ is called an admissible control if $u(T, x) \equiv 0$. An admissible control $\hat{v}(\cdot, \cdot)|_{[0, \hat{T}]}$ is called optimal if $\hat{T} \leq T$ for any admissible control $v(\cdot, \cdot)|_{[0, T]}$. It is known that the optimal control exists [2]. But a problem of finding it remains open, in contrast to optimization problems for fixed time intervals. Using the Fourier method, F.L. Chernous'ko reduced the time-optimal problem (1), (2) to an infinite system of the form

$$\dot{u}_k(t) = -\lambda_k u_k + v_k \quad (3)$$

such that the control parameters satisfy the inequality

$$\sup_x \left| \sum_k v_k \varphi_k(x) \right| \leq v_0, \quad (4)$$

where $\varphi_k(\cdot)$ is the system of eigenfunctions of the operator $A(x)$ ($k = 1, 2, \dots$).

Problem (3), (4) still remains difficult. In this talk we discuss the finite-dimensional approximations of problem (3), (4) ($k = 1, 2, \dots, n$) for the case of the heat equation on a rod, $x \in \mathbb{R}$, $A = \partial^2 / \partial x^2$ (see [3, 4]).

References

1. *Ladyzhenskaya O.A.* The boundary value problems of mathematical physics // *Appl. Math. Sci.* 1977. V. 49. P. 183–187.
2. *Chernousko F.L.* Bounded controls in distributed-parameter systems // *J. Appl. Math. Mech.* 1992. V. 56, No. 5. P. 810–826.

3. Azamov A.A., Ruzibayev M.R. The time-optimal problem for evolutionary partial differential equations // J. Appl. Math. Mech. 2013. V. 77, No. 2. P. 220–224.
4. Azamov A.A., Bahramov J.A., Akhmedov O.S. On the Chernous'ko time-optimal problem for the equation of heat conductivity in a rod // Ural Math. J. 2019. V. 5, No. 1. P. 13–23.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВОМ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

М. В. Балашов, А. А. Тремба

ИПУ РАН, Москва, Россия

balashov73@mail.ru, atremba@ipu.ru

Рассмотрим линейную управляемую автономную систему

$$x' \in Ax + U, \quad x(0) = 0, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт.

Рассматривается множество достижимости системы (1) в момент времени $t > 0$, т.е. множество

$$\mathcal{R}(t) = \{x(t) : x'(s) \in Ax(s) + U \text{ для п.в. } s \in [0, t]\} = \int_0^t e^{As} U ds. \quad (2)$$

Интеграл от многозначной функции в правой части (2) может пониматься в смысле Аумана или Римана [1, гл. IV].

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Решается одна из следующих теоретико-множественных задач.

Задача 1. Пусть $T > 0$ и $\mathcal{R}(T) \cap M \neq \emptyset$. Для момента времени $t \in [0, T]$ выяснить, верно ли, что $\mathcal{R}(t) \cap M \neq \emptyset$?

Задача 2. Пусть $T > 0$ и $\mathcal{R}(T) \not\subset M$. Для момента времени $t \in [0, T]$ выяснить, верно ли, что $\mathcal{R}(t) \subset M$?

Задача 3. Пусть $T > 0$ и $\mathcal{R}(T) \supset M$. Для момента времени $t \in [0, T]$ выяснить, верно ли, что $\mathcal{R}(t) \supset M$?

Основой для работы с множеством достижимости традиционно является аппроксимация множества достижимости, главным образом с помощью опорной функции [2]. Аппроксимировав $\mathcal{R}(t)$ и M на сетке единичных векторов с помощью внешних многогранных аппроксимаций, можно свести решение указанных задач 1–3 к решению задач линейного программирования. Однако указанный подход применим в пространстве небольшой размерности. Так, на современных персональных компьютерах аппроксимировать с удовлетворительной точностью указанные множества получается для размерностей $n \leq 5$.

В докладе планируется обсудить ряд стереотипных условий, которые обеспечивают решение задач 1–3 в пространствах достаточно большой размерности

($n \geq 5$), где удовлетворительная аппроксимация с помощью опорных функций или как-либо еще невозможна.

Приведем результат для задачи 1.

Потребуем, чтобы $\mathcal{R}(t)$ было сильно выпуклым множеством с радиусом R_t (т.е. пересечением замкнутых шаров радиуса R_t). Пусть $M = M_0 + B_r(0)$, где M_0 — сильно выпуклое множество с радиусом R_0 .

Рассмотрим для фиксированного $t \in [0, T]$ множество $Z(t) = \mathcal{R}(t) + (-M_0)$. Множество $Z(t)$ сильно выпукло с радиусом $R = R_t + R_0$, как сумма сильно выпуклых множеств [3, гл. 3]. Очевидно, что равенство $\mathcal{R}(t) \cap M = \emptyset$ можно переформулировать так: расстояние от нуля до $Z(t)$ более $r > 0$. Если это верно, то $0 \notin \mathcal{R}(t) + (-M)$. Напомним, что опорной функцией множества $Z \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \mathbb{R}^n$ называется $f(p) = s(p, Z) = \sup_{z \in Z} \langle p, z \rangle$. На языке опорных функций последний вопрос сводится к решению следующей задачи: для функции $f(p) = s(p, Z(t)) = s(p, \mathcal{R}(t)) + s(p, -M_0)$ найти

$$\min_{\|p\|=1} f(p) = J. \quad (3)$$

Если $J < -r$, то расстояние от нуля до $Z(t)$ более r . Если $J \geq -r$, то расстояние от нуля до $Z(t)$ не более $r > 0$ и, значит, $0 \in M(t) + (-M)$. Заметим, что $f'(p) = \mathcal{R}(t)(p) + (-M_0)(p) = \int_0^t (e^{As}U)(p) ds + (-M_0)(p)$, где для выпуклого компактного множества X и вектора p опорный элемент обозначен через $X(p) = \{z \in X : \langle p, z \rangle = s(p, X)\}$.

Положим $S_1 = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| = 1\}$ и $S = \{p \in S_1 : f(p) \leq 0\}$, где f — функция из (3).

Теорема 1. Пусть в задаче (3) выполнено неравенство $-2r \leq J < 0$ и выбрана точка $p_1 \in S$. Положим $L = \max_{z \in Z(t)} \|z\|$, и пусть число λ выбрано из условия $0 < 2\lambda < \min\{1/R, 1/L\}$. Рассмотрим итерационный процесс

$$p_{k+1} = \frac{p_k - \lambda f'(p_k)}{\|p_k - \lambda f'(p_k)\|}.$$

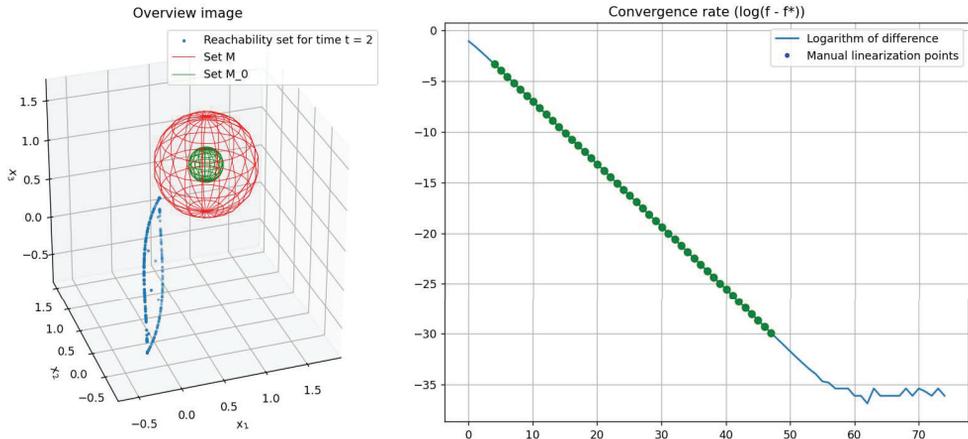
Тогда последовательность $\{p_k\}$ сходится к единственному решению p_* задачи (3) с линейной скоростью (со скоростью геометрической прогрессии):

$$\begin{aligned} f(p_{k+1}) - f(p_*) &\leq q \cdot (f(p_k) - f(p_*)), \\ \|p_{k+1} - p_k\| &\leq \sqrt{2\lambda(f(p_1) - f(p_*))} \cdot q^{k/2}, \\ q &= 1 - \frac{\lambda|J|}{2L\lambda + 2} \in (0, 1). \end{aligned}$$

Пример 1. Рассмотрим для наглядности трехмерный численный пример. Пусть в системе (1) матрица A имеет вид жордановой клетки

$$A = \begin{pmatrix} -1.3 & 1 & 0 \\ 0 & -1.3 & 1 \\ 0 & 0 & -1.3 \end{pmatrix}.$$

Пусть U — отрезок с концами в точках $(0, 0, \pm 1)$, $M = B_{0.6}((0.8, 0.5, 1))$, $M_0 = B_{0.2}((0.8, 0.5, 1))$ т.е. $r = 0.4$. Рассматривается вопрос, верно ли, что $\mathcal{R}(t) \cap M = \emptyset$ в момент времени $t = 2$.



На рисунке слева изображено множество $\mathcal{R}(2)$ и шары M и M_0 . Значение J функционала из (3) равно $J = -0.451648\dots < -r$, т.е. пересечение пусто. Справа показана линейная скорость убывания (по функции) градиентного метода из теоремы 1 для шага $\lambda = 0.5$. По горизонтальной оси отложено количество итераций градиентного метода. Линейная сходимость (правая часть рисунка) практически не зависит от выбора начальной точки итераций $p_1 \in S$.

Список литературы

1. Половинкин Е.С. Многочленный анализ и дифференциальные включения. М.: Физматлит, 2014.
2. Althoff M., Frehse G., Girard A. Set propagation techniques for reachability analysis // Annu. Rev. Control Robot. Auton. Syst. 2021. V. 4, No. 1. P. 369–395.
3. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. 2-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 2007.

О ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С УСЛОВИЯМИ НА ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ В ЗАДАННЫЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

В. Р. Барсегян

*Институт механики НАН Армении, Ереванский государственный
университет, Ереван, Армения*

`barseghyan@sci.am`

Исследованиям задач управления и оптимального управления колебательными процессами (как распределенными, так и граничными воздействиями) посвящены многочисленные работы, в частности [1–4]. Весьма важны краевые задачи управления, в которых наряду с классическими краевыми условиями заданы

также многоточечные промежуточные условия, которые могут быть как локальными, так и нелокальными. Исследованиям таких задач посвящены, в частности, работы [3–5].

В настоящей работе для уравнения колебания струны с заданными начальными и конечными условиями рассматриваются шесть задач оптимального граничного управления с заданными различными промежуточными условиями на значения функции прогиба и скоростей точек струны. Для всех задач по единой схеме предложен конструктивный подход построения оптимального граничного управления колебаниями струны. Проведены вычислительный эксперимент и анализ полученных результатов.

Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т.е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией $Q(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $t > 0$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (1)$$

с начальными и конечными условиями

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad (2)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x) \quad (3)$$

и граничными условиями

$$Q(0, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad (4)$$

$$Q(0, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad (5)$$

где функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — граничные управления. В уравнении (1) $a^2 = T_0/\rho$, где T_0 — натяжение струны, ρ — плотность струны.

Пусть в некоторые моменты времени t_k ($k = 1, \dots, m$),

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T,$$

заданы промежуточные значения функции прогиба и значения скоростей точек струны

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad j = 1, \dots, m, \quad (7)$$

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}. \quad (9)$$

В условиях (8) и (9) предполагается, что m — четное число.

Пусть заданы следующие функционалы:

$$\left[\int_0^T \mu^2(t) dt \right]^{1/2}, \quad (10)$$

$$\left[\int_0^T (\mu^2(t) + \nu^2(t)) dt \right]^{1/2}. \quad (11)$$

Предполагается, что $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x, t): x \in [0, l], t \in [0, T]\}$, и $\varphi_i(x) \in C^2[0, l]$, $\psi_j(x) \in C^1[0, l]$. Предполагается, что все функции таковы, что выполняются соответствующие условия согласования [3, 4].

В работе для уравнения (1) с начальными (2) и конечными (3) условиями на промежутке времени $[0, T]$ рассматриваются следующие задачи.

I. Задача граничного оптимального управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце с заданными значениями:

- функции прогиба в промежуточные моменты времени ((1)–(4), (6), (10));
- скоростей точек струны в промежуточные моменты времени ((1)–(4), (7), (10));
- функции прогиба и скоростей точек струны в разные промежуточные моменты времени ((1)–(4), (8)–(10)).

II. Задача граничного оптимального управления колебаниями струны смещением двух концов с заданными значениями:

- функции прогиба в промежуточные моменты времени ((1)–(3), (5), (6), (11));
- скоростей точек струны в промежуточные моменты времени ((1)–(3), (5), (7), (11));
- функции прогиба и скоростей точек струны в разные промежуточные моменты времени ((1)–(3), (5), (8), (9), (11)).

Для всех шести задач по единой схеме предложен конструктивный подход к построению оптимального граничного управления колебаниями струны. Схема построения граничного управления заключается в следующем: исходные задачи с неоднородными граничными условиями сводятся к задачам управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями. Далее с помощью метода разделения переменных и методов теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями [5, 6] для произвольного числа n первых гармоник построены оптимальные граничные управления, которые представляются в явном аналитическом виде. Полученные результаты иллюстрируются на конкретных примерах.

Список литературы

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
2. Ильин В.А., Мусеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // УМН. 2005. Т. 60, №6. С. 89–114.
3. Barseghyan V.R. Control problem of string vibrations with inseparable multipoint conditions at intermediate points in time // Mech. Solids. 2019. V. 54, No. 8. P. 1216–1226.

4. *Barseghyan V., Solodusha S.* Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time // *Mathematical optimization theory and operations research*. Cham: Springer, 2021. P. 299–313. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 12755).
5. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука. 2016.
6. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАДАННОЙ СКОРОСТЬЮ ТОЧЕК В ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ*

В. Р. Барсегян^a, С. В. Солодуша^{b,c}

^a*Институт механики НАН Армении, Ереванский государственный университет, Ереван, Армения*

^b*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия*

^c*Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия*

`barseghyan@sci.am, solodusha@isem.irk.ru`

Задачи управления и оптимального управления колебательными процессами, описываемые волновыми уравнениями, имеют значительный теоретический интерес и возрастающее практическое значение [1–5]. Моделирование динамических систем с промежуточными условиями и управление ими являются активно развиваемым направлением в современной теории управления [3–6]. Задачам управления и оптимального управления разнородных распределенных систем посвящена, в частности, работа [2]. В этой работе (и других работах того же автора и его учеников) введены и изучены формулы типа Даламбера. Это научное направление пока еще недостаточно исследовано.

В данной работе исследуется задача оптимального граничного управления для одномерного волнового уравнения, состоящего из двух разнородных участков. При этом предполагается, что время прохождения волны по каждому из участков одинаково. Управление осуществляется смещением одного конца при закрепленном другом конце с заданными начальными, конечными условиями и заданным значением скоростей точек системы в промежуточный момент времени. Критерий качества задан на всем промежутке времени. Предложен подход аналитического построения оптимального граничного управления.

Рассмотрена задача оптимального граничного управления кусочно однородной колебательной системой (состоящей из двух участков $-l_1 \leq x \leq 0$ и $0 \leq x \leq l$) с заданной скоростью точек в промежуточный момент времени.

*Исследование С.В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема AAAA-A21-121012090034-3).

Пусть состояние (продольные колебания) стержня (или поперечные колебания струны) описывается функцией $Q(x, t)$, $-l_1 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, а отклонение от состояния равновесия подчиняется следующему волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leq x \leq 0, 0 \leq t \leq T, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1, t) = u(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0+0}, \quad (3)$$

где $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$ — скорость прохождения волны по участкам, $\rho_i = \text{const}$ — плотность, $k_i = \text{const}$ — модуль Юнга, $i = 1, 2$. Предполагается, что длины l_1 и l участков выбраны так, что время прохождения волны по участку $-l_1 \leq x \leq 0$ совпадает с временем прохождения волны по участку $0 \leq x \leq l$, т.е. $a_2 l_1 = a_1 l$.

Пусть заданы начальные (при $t = t_0 = 0$) и конечные (при $t = T$) условия

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x), \quad \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (5)$$

Пусть также в некоторый промежуточный момент времени t_1 ($0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$) задано промежуточное значение скоростей точек в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=t_1} = \psi_1(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (6)$$

В формуле (2) функция $u(t)$ — управляющее воздействие (граничное управление). Предполагается, что $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x, t): x \in [-l_1, l], t \in [0, T]\}$, и $\varphi_0(x), \varphi_T(x) \in C^2[-l_1, l]$, $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_T(x) \in C^1[-l_1, l]$. Предполагается также, что все функции таковы, что выполняются условия согласования [3, 4].

Требуется найти такое оптимальное управление $u^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которого колебательное движение системы (1) из заданного начального состояния (4) переходит в конечное состояние (5) и которое обеспечивает выполнение условия (6) и минимизирует функционал

$$\int_0^T u^2(t) dt. \quad (7)$$

Для решения задачи переходим к новой переменной ξ , что приводит к сжатию или растяжению отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ относительно точки $x = 0$. При этом отрезок $-l_1 \leq x \leq 0$ переходит в отрезок $-l \leq \xi \leq 0$. Для функции $Q(\xi, t)$ получим на отрезках равной длины одинаковые уравнения с соответствующими условиями

для (3)–(6) относительно новой переменной. Решение исходной задачи сведено к задаче оптимального управления колебательным движением, описываемым неоднородным уравнением с нулевыми граничными условиями и минимизируемым функционалом (7).

Используя метод разделения переменных и учитывая промежуточные и конечные условия, применяя подходы, приведенные в работах [3, 4, 6], получаем, что искомая функция управления $u^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, для каждой гармоники должна удовлетворять некоторым интегральным соотношениям и доставлять минимум функционалу (7). Далее на основе метода проблем моментов [6, 7] для произвольного числа первых гармоник построено аналитическое выражение для искомого оптимального граничного управления и соответствующей функции состояния.

Список литературы

1. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
2. *Ильин В.А.* Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // ДАН. 2011. Т. 440, № 2. С. 159–163.
3. *Barseghyan V., Solodusha S.* Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time // Mathematical optimization theory and operations research. Cham: Springer, 2021. P. 299–313. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 12755).
4. *Barseghyan V.R., Solodusha S.V.* On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 1847. Pap. 012016.
5. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 1. С. 62–70.
6. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016.
7. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ТОЖДЕСТВЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

К. О. Бесов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

`kbesov@mi-ras.ru`

В работе [1] рассмотрена задача минимизации функционала

$$J(v) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\Delta v|^2 - f v \right) dx$$

на замкнутом выпуклом множестве

$$K = \left\{ v \in H_0^2(\Omega) : v \geq \phi \text{ п.в. в } \Omega \right\}, \quad H_0^2 = \left\{ v \in H^2(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

где Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^d с липшицевой границей $\partial\Omega$ и единичной внешней нормалью ν , f и ϕ — заданные функции такие, что $f \in L_2(\Omega)$, $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$ и $\phi(x) \leq \text{const} \cdot (\text{dist}(x, \partial\Omega))^2$ для $x \in \Omega$ (последнее условие гарантирует, что множество K непусто).

Введем еще пространство $H(\Omega, \text{div Div}) = \{y \in L_2(\Omega; M_{\text{sym}}^{d \times d}) : \text{div Div } y \in L_2(\Omega)\}$ функций со значениями в пространстве симметричных $(d \times d)$ -матриц.

Для (единственного) решения $u \in K$ сформулированной выше задачи в [1] получено следующее интегральное тождество.

Теорема 1 [1]. *Для любой функции $y^* \in H(\Omega, \text{div Div})$ такой, что*

$$\text{div Div } y^* \geq f, \quad (1)$$

и любой функции $v \in K$ справедливо тождество

$$\mu(v) + \mu^*(y^*) = \frac{1}{2} \|\nabla \nabla v - y^*\|_{L_2}^2 + \int_{\Omega} (\text{div Div } y^* - f)(v - \phi) dx, \quad (2)$$

где

$$\mu(v) = \frac{1}{2} \|\nabla \nabla(u - v)\|_{L_2}^2 + \mu_{\phi}(v)$$

— мера отклонения функции v от точного решения u ,

$$\mu_{\phi}(v) = \int_{\{u=\phi\}} (\text{div Div } \nabla \nabla u - f)(v - u) dx - \int_{\Gamma_u} [\text{Div } \nabla \nabla u \cdot \nu_{\Gamma_u}](v - u) ds,$$

$[\cdot]$ — скачок соответствующей величины на границе Γ_u между областями $\{u = \phi\}$ и $\{u > \phi\}$,

$$\mu^*(y^*) = \frac{1}{2} \|p^* - y^*\|_{L_2}^2 + \mu_{\phi}^*(y^*)$$

— мера отклонения функции y^* от точного решения p^* сопряженной задачи,

$$\mu_{\phi}^*(y^*) = \int_{\{u > \phi\}} (\text{div Div } y^* - f)(u - \phi) dx.$$

Далее с помощью оценки расстояния в $L_2(\Omega)$ от произвольной функции $y^* \in H(\Omega, \text{div Div})$ до множества функций из $H(\Omega, \text{div Div})$, удовлетворяющих условию (1), в работе [1] выводится следующая оценка.

Теорема 2 [1]. *Для любых функций $y^* \in H(\Omega, \text{div Div})$ и $v \in K$ и произвольного числа $\beta \in (0, 1]$ имеем*

$$\frac{1 - \beta}{2} (\|\nabla \nabla(u - v)\|_{L_2}^2 + \|p^* - y^*\|_{L_2}^2) + \mu_{\phi}(v) + \mu_{\phi}^*(y^*) \leq \mathfrak{M}(v, y^*, \beta),$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(v, y^*, \beta) &= \frac{1}{2} (1 + \beta) \|\nabla \nabla v - y^*\|_{L_2}^2 + \frac{3}{2\beta} C_{\mathbb{F}}^2 \|(f - \text{div Div } y^*)_+\|^2 + \\ &+ \int_{\Omega} (\text{div Div } y^* - f)(v - \phi) dx, \end{aligned}$$

$C_{\mathbb{F}}$ — константа из неравенства Фридрихса для области Ω , $(\cdot)_+ = \max\{0, \cdot\}$.

Мы показываем, что на самом деле теорема 1 справедлива для любых функций $y^* \in H(\Omega, \text{div Div})$ (т.е. ограничение (1) можно снять) и любых функций $v \in H^2(\Omega)$ (а не только для $v \in K$). Таким образом, мы получаем усиление обеих теорем 1 и 2.

Список литературы

1. Апушкинская Д.Е., Репин С.И. Бигармоническая задача с препятствием: гарантированные и вычисляемые оценки ошибок для приближенных решений // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 11. С. 1881–1897.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИБРИДНОЙ МОДЕЛЬЮ МАРКОВА–ДУБИНСА

А. С. Бортакровский

МАИ, Москва, Россия

asbortakov@mail.ru

Рассматривается задача быстродействия для управляемой динамической системы, описывающей плоское движение с ограниченным ускорением. Траектории движения предлагаемой модели отличаются от путей Маркова–Дубинса [1, 2], траекторий машин Айзекса, Ридса–Шешпа [3] и других [4, 5] неограниченной кривизной, т.е. допускаются повороты на месте. Такая модель точнее описывает возможности некоторых видов дорожных машин и летательных аппаратов. Другая особенность модели состоит в том, что изменение угловой скорости происходит при постоянной линейной скорости, а изменение линейной скорости — при нулевой угловой. Поэтому в процессе управления происходят переключения модели движения, а размерность системы меняется. Для решения задачи быстродействия применяются необходимые условия оптимальности гибридных систем переменной размерности [6].

Постановка задачи. Пусть на промежутке времени $[0, T]$ прямолинейное движение системы управления описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = v(t) \sin(\gamma), \quad \dot{y}(t) = v(t) \cos(\gamma), \quad \dot{v}(t) = u(t), \quad (1)$$

а повороты — уравнениями

$$\dot{x}(t) = V \sin(\gamma(t)), \quad \dot{y}(t) = V \cos(\gamma(t)), \quad \dot{\gamma}(t) = \omega(t), \quad \dot{\omega}(t) = \varepsilon(t). \quad (2)$$

В этих уравнениях x, y — плоские координаты положения объекта управления; γ — угол направления движения (вперед), отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс; v, u — линейные скорость и ускорение, а ω, ε — угловые скорость и ускорение соответственно. Управление осуществляется выбором ускорений u и ε , удовлетворяющих ограничениям $|u(t)| \leq U, |\varepsilon(t)| \leq \mathcal{E}$, где U и \mathcal{E} — заданные максимальные значения ускорений. В моменты переключений координаты x, y, γ, v непрерывны, а $\omega = 0$.

Начальное состояние системы задано:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \quad v(0) = v_0, \quad \omega(0) = \omega_0.$$

Конечное состояние может задаваться по-разному, в зависимости от постановки задачи. Для задачи попадания в точечную цель фиксировано только конечное положение (x_T, y_T) объекта управления:

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T; \quad (3)$$

для задачи попадания в цель с заданным конечным направлением движения к равенствам (3) добавляется условие $\gamma(T) = \gamma_T$ и, быть может, еще условие $\omega(T) = 0$; для задачи остановки объекта в заданном положении к равенствам (3) добавляется требование $v(T) = 0$. Возможны и другие комбинации конечных условий; в частности, может быть задано конечное состояние $(x(T), y(T), v(T), \gamma(T), \omega(T))$.

Требуется найти наименьшее время T и оптимальный процесс, на котором это время достигается, т.е. решить задачу быстрогодействия.

В постановке задачи возможны дополнительные условия, отражающие особенности прикладных задач. Это естественное ограничение линейной скорости: $v(t) \in [0, V]$ при $t \in [0, T]$, где V — заданная величина максимальной линейной скорости. Менее естественно выглядит ограничение $V_- \leq v(t) \leq V_+$, где $V_- \leq 0$, $V_+ \geq 0$, допускающее отрицательные значения линейной скорости. Такие значения скорости формально следует понимать как движение назад (задний ход).

Метод решения. Количество и моменты переключений допустимых движений (1) и (2) заранее не заданы, а определяются в процессе минимизации. Заметим, что число координат векторов состояния в (1) и (2) разное, поэтому поставленная задача относится к задачам быстрогодействия гибридных систем переменной размерности. Для ее решения применяются соответствующие необходимые условия оптимальности [6], которые позволяют установить типичные оптимальные управления. Оптимальные траектории состояются из типичных участков. Поэтому задача сводится к конечномерной минимизации — нахождению оптимальных моментов переключений движений (1), (2). Затем при помощи необходимых условий проверяется оптимальность полученной траектории.

Список литературы

1. Марков А.А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1889. Т. 1. С. 250–276.
2. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Amer. Math. 1957. V. 79, No. 3. P. 497–516.
3. Reeds J.A., Shepp L.A. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards // Pac. J. Math. 1990. V. 145, No. 2. P. 367–393.
4. Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Темат. обзоры. 2002. Т. 90. С. 5–189.
5. Бердышев Ю.И. Об оптимальном по быстроддействию управлении обобщенной машиной Дубинса // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, №1. С. 26–35.
6. Бортакровский А.С. Необходимые условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 1. С. 28–40.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С.П. НОВИКОВА
И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В. М. Бухштабер

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

buchstab@mi-ras.ru

Классическое уравнение Кортевега–де Фриза оказалось в центре внимания современных исследований благодаря его фундаментальной роли в изучении нелинейных волновых процессов в средах с малой дисперсией.

В периодических задачах теории нелинейных волн и солитонов Новиков (1974) ввел дифференциальные уравнения, ассоциированные с иерархией КдФ, и показал, что они приводят к иерархиям конечномерных динамических систем, интегрируемых в абелевых функциях на якобианах *гиперэллиптических кривых*. После публикации его работы [1] естественно возникла задача о явном построении скобок Пуассона, относительно которых эти системы являются гамильтоновыми.

Известна связь динамических систем Новикова с системами Штеккеля из классической гамильтоновой механики. В наших работах с Михайловым (см. обзор [2]) эта связь была развита.

В докладе будет дано построение иерархии *полиномиальных* гамильтоновых динамических систем в \mathbb{C}^{2N} с канонической скобкой Пуассона для каждого целого числа N и *любого полинома* $F(x, y)$, $\partial_y F(x, y) \neq 0$. Будет описано полиномиальное преобразование пространства \mathbb{C}^{2N} , которое приводит полученные динамические системы к системам Новикова, интегрируемым в гиперэллиптических функциях, ассоциированных с многомерными сигма-функциями, и будет дана явная формула скобки Пуассона, индуцированной этим преобразованием.

Список литературы

1. *Новиков С.П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. I // Функт. анализ и его прил. 1974. Т. 8, №3. С. 54–66.
2. *Бухштабер В.М., Михайлов А.В.* Интегрируемые полиномиальные гамильтоновы системы и симметрические степени плоских алгебраических кривых // УМН. 2021. Т. 76, №4. С. 37–104.

GENERALIZED SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS
FOR GENERAL QUASI-LINEAR PDES

Vladimir Burskii

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

bvp30@mail.ru

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an arbitrary bounded domain with a smooth boundary $\partial\Omega$, $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ be some differential operation with smooth complex $j \times k$ matrix coefficients $a_\alpha(x)$, \mathcal{L}^+ be the formally adjoint differential operation. Let L_0 and L_0^+

be the minimal operators. M. Vishik introduced the following conditions:

$$\text{The operator } L_0: D(L_0) \rightarrow L_2^j(\Omega) \text{ has a continuous left inverse.} \quad (1)$$

$$\text{The operator } L_0^+: D(L_0^+) \rightarrow L_2^j(\Omega) \text{ has a continuous left inverse.} \quad (2)$$

He proved that these conditions are necessary and sufficient for the existence of a solvable expansion $L_B: D(L_B) \rightarrow L_2^j(\Omega)$ (i.e., $D(L_0) \subset D(L_B)$, $\exists L_B^{-1}: L_2^j(\Omega) \rightarrow D(L_B)$). L. Hörmander proved these conditions for any scalar operator with constant coefficients in a bounded domain; for the case of scalar operators

$$L(x, D) = P^0(D) + \sum_i C_i(x)P^i(D), \quad C_i \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad P^i \in \mathbb{C}[\xi], \quad (3)$$

of the real principal type with order $P^i \leq m - 1$, $|\nabla P^0(\xi)| \neq 0$ if $\xi \neq 0$, and also for the case of operators of constant strength of the form (3) with $P^i \prec P^0$ and analytical C^i , conditions (1), (2) follow from the results of G. Gudmundsdottir.

We shall consider the equation

$$\mathcal{L}^+ A \mathcal{L} u = f \quad (4)$$

with some continuous (linear or nonlinear) operator $A: L_2^j(\Omega) \rightarrow L_2^j(\Omega)$.

The function $u \in D(L_0)$ satisfying the integral identity $\langle AL_0 u, \mathcal{L} v \rangle = \langle f, v \rangle$ for every function $v \in (C_0^\infty(\Omega))^k$ will be called a generalized solution of the Dirichlet problem in the domain Ω for equation (4) with $f \in D'(L_0)$. This is equivalent to the equation $L_0^+ A L_0 u = f$. The Dirichlet problem will be called well-posed if there exists a continuous inverse operator $M: D'(L_0) \rightarrow D(L_0)$ to the operator $L_0^+ A L_0$. Let $P: L_2^j(\Omega) \rightarrow \text{Im } L_0$ be the orthoprojector.

Statement. *The generalized Dirichlet problem for equation (4) is well-posed if and only if condition (1) is fulfilled and the operator $PA: \text{Im } L_0 \rightarrow \text{Im } L_0$ is a homeomorphism.*

Example. Let $\mathcal{L} = \square = \partial^2 / \partial x_1 \partial x_2$ and A be the Nemytsky operator given by means of a function $(Au)(x) = \varphi(x, |u|)u$, where the function φ is bounded, satisfies the Carathéodory condition and $\varphi(x, t)t - \varphi(x, s)s \geq m(t - s)$ for $t \geq s$, $m > 0$. Then condition (1) is fulfilled in every bounded domain and the Dirichlet problem for the equation $\square A \square u = f$ is well-posed in such a domain. If the smooth boundary does not contain segments of characteristics, then the inclusion $u \in D(L_0)$ means that $u|_{\partial\Omega} = u'_\nu|_{\partial\Omega} = 0$ almost everywhere on $\partial\Omega$. Instead of \square one could consider any other scalar operator with property (1) and obtain the same conclusion.

The statements of other boundary value problems are analogous. For references see [1].

References

1. *Burskii V.P.* Investigation methods of boundary value problems for general differential equations. Kyiv: Naukova dumka, 2002 (in Russian).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ–УКЛОНЕНИЯ:
АЛЬТЕРНАТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И ПРОБЛЕМА РЕЛАКСАЦИИ*

А. Г. Ченцов

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Россия*

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

`chentsov@imm.uran.ru`

Рассматривается нелинейная дифференциальная игра (ДИ) на конечном промежутке времени с заданными целевым множеством (ЦМ) и множеством, определяющим фазовые ограничения (ФО) игрока I, заинтересованного в сближении с ЦМ. В случае, когда оба упомянутых множества замкнуты в обычной топологии пространства позиций, а функция в правой части управляемого дифференциального уравнения локально липшицева по фазовой переменной, Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным была доказана [1] фундаментальная теорема об альтернативе, позволившая [2] установить существование седловой точки в позиционных стратегиях для типичных функционалов качества. В работе [3] А.В. Кряжимский распространил альтернативу Красовского–Субботина на случай системы, не удовлетворяющей условию Липшица по фазовой переменной. В настоящем исследовании при некоторой коррекции классов стратегий установлена [4] альтернатива в случае, когда множество, определяющее ФО, имеет замкнутые временные сечения (само это множество может не быть замкнутым), а система соответствует [3]. Само получающееся альтернативное разбиение пространства позиций определяется конструктивно с использованием метода программных итераций (МПИ) в реализации [5].

Исследуется вопрос о релаксации игровой задачи сближения. При этом допускается замена ЦМ и множества, определяющего ФО, замкнутыми окрестностями в двух различных топологиях пространства позиций (во втором случае используется произведение дискретной топологии временного промежутка и нормируемой топологии фазового пространства), причем размеры окрестностей могут быть разными (исходная постановка погружается в семейство релаксированных задач). Каждой позиции сопоставляется наименьшее значение параметра, имеющего смысл размера окрестности ЦМ, для которого при пропорциональном ослаблении ФО игрок I, заинтересованный в сближении, может еще гарантировать его осуществление. На этой основе реализуется функция позиции, для построения которой указан новый вариант МПИ, действующий в пространстве функций позиции. При этом искомая основная функция является неподвижной точкой оператора, реализующего итерационную процедуру, экстремальной в порядковом смысле. Кроме того, показано, что для каждой позиции значение основной функции является ценой ДИ на минимакс-максимин специального функционала, учитывающего как эффекты, связанные с приближенным осуществлением наведения на ЦМ, так и эффекты, связанные с приближенным соблюдением ФО. Указано свойство, гарантирующее стабилизацию итерационной процедуры как для конкретной позиции игры, так и в целом, т.е. как элемента функционального

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 20-08-00873

пространства. Установлено свойство непрерывной зависимости основной функции при изменении параметра приоритетности в вопросах наведения на ЦМ и соблюдения ФО.

В рассматриваемом общем случае ДИ существенно использование обобщенных управлений, определяемых в виде борелевских мер на произведении конечномерных компактов, одним из которых является промежуток времени, и имеющих лебеговскую проекцию (маргинальное распределение в виде сужения меры Лебега) на σ -алгебру борелевских подмножеств упомянутого промежутка. В качестве управляющих процедур игрока, заинтересованного в сближении (игрок I), использовались многозначные квазистратегии (неупреждающие стратегии) [4, 5], которые могут быть реализованы [6] в схеме управления с поводырем. Управляющие процедуры игрока-уклониста (игрок II) определялись [7] в виде триплетов, компонентами каждого из которых являлись чистая позиционная стратегия, стратегия коррекции, отвечающая за управление моментами коррекции формируемых управлений, и натуральное число, определяющее ограничение на число возможных коррекций. В ДИ сближения–уклонения квазистратегия, разрешающая задачу сближения, определяется конструктивно (см. [5, разд. 10]) в терминах предела процедуры на основе МПИ [5, разд. 6]. Структура стратегии-тройки, разрешающей задачу уклонения, указана в [7, 8] (см. [8, § 7]).

Список литературы

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для игровой задачи сближения // ПММ. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры, М.: Наука, 1974.
3. Кряжисмский А.В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения–уклонения // ДАН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
4. Ченцов А.Г. Дифференциальная игра сближения–уклонения: альтернативная разрешимость и построение релаксаций // Диф. уравнения. 2021. Т. 57, № 8. С. 1116–1141.
5. Ченцов А.Г. Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 304–321.
6. Кряжисмский А.В., Ченцов А.Г. О структуре игрового управления в задачах сближения и уклонения. Деп. в ВИНТИ, № 1729-80, Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1979.
7. Ченцов А.Г. Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 285–302.
8. Ченцов А.Г. Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений формируемого управления // Изв. ИМИ УдГУ. 2017. Т. 49. С. 17–54.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СМЕШАННОГО ОТБОРА
РАСПРЕДЕЛЕННОГО РЕСУРСА*

А. А. Давыдов, Е. В. Винников

МГУ им. М.В. Ломоносова & НИТУ “МИСИС”, Москва, Россия
davydov@mi-ras.ru, evinnikov@gmail.com

Модели типа уравнения Колмогорова–Пискунова–Петровского–Фишера появились в первой половине прошлого века в связи с возникшими потребностями анализа эволюции распределенных популяций или любого распределенного возобновляемого ресурса, в динамике которых следует учитывать диффузию [6, 7]. Задачи анализа влияния на эту динамику эксплуатации ресурса в контексте или извлечения максимального дохода, или сохранения биоразнообразия в случае популяций только усилили интерес к этой тематике.

Мы рассматриваем это уравнение в дивергентной форме

$$p_t = (\alpha(x)p_x)_x + a(x)p - b(x)p^2, \quad (1)$$

где $p = p(x, t)$ — плотность ресурса в точке x области его распределения в момент времени t , а функции α , a и b характеризуют диффузию ресурса, показатели его возобновления и насыщения им среды соответственно. Эти показатели непрерывно зависят от точки этой области, но не зависят от времени. Область распределения ресурса будем считать n -мерным тором, показатель насыщения b положительным и отделенным от нуля некоторой константой $b_0 > 0$, а матрицу α положительно определенной с элементами, имеющими производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с некоторым положительным показателем. Такие условия наложены на показатели насыщения и диффузии в работе [4], некоторые утверждения из которой используются при доказательстве результатов.

Эксплуатация ресурса состоит в постоянном и импульсном отборе его плотности. Первый из них добавляет в правую часть уравнения (1) слагаемое $-u(x)p$ с измеримым управлением u , удовлетворяющим ограничению $0 \leq U_1(x) \leq u(x) \leq U_2(x)$ с некоторыми измеримыми ограниченными функциями U_1 и U_2 , $U_1 \neq U_2$, — *ограничениями* на управление. Импульсный отбор происходит периодически, при нем в ареале распределяется имеющееся усилие E для отбора ресурса или его часть с измеримой плотностью $r = r(x)$ (= *плотность усилия*), которая всюду на торе удовлетворяет условию $R_1(x) \leq r(x) \leq R_2(x)$ с некоторыми неотрицательными ограниченными измеримыми функциями R_1, R_2 , $R_1 \neq R_2$. Такие плотности усилия (или управления выше) называются *допустимыми*. Отметим, что $\int_{\mathbb{T}^n} r(x) dx \leq E$. После выбора допустимой плотности усилия r с периодом $T > 0$ отбирается доля ресурса $q(x) = 1 - e^{-\gamma(x)r(x)}$, где неотрицательная непрерывная (или измеримая) функция γ отвечает за возможную сложность обнаружения или извлечения ресурса в точке.

После очередного импульсного отбора эволюция плотности ресурса до следующего отбора доставляется решением задачи Коши для изучаемого уравнения (1) при постоянном отборе с начальными данными — оставшейся частью плотности

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 19-11-00223)

ресурса после импульсного отбора. Учитывая, что эти начальные данные, вообще говоря, лишь измеримы, как и коэффициенты a , b и управление u , возникает естественный вопрос определения этого решения и его связи с начальными условиями. Под таким решением будем понимать функцию, лежащую в $W_2^{1,0}(\mathbb{T}^n \times (0, \tau))$ при любом конечном $\tau > 0$ и удовлетворяющую равенству

$$\int_{Q_\infty} (-p\eta_t + \alpha_{i,j} p_{x_i} \eta_{x_j}) dx dt - \int_{\mathbb{T}^n} p\eta|_{t=0} dx = \int_{Q_\infty} [(a-u)p - bp^2]\eta dx dt, \quad (2)$$

где $Q_T = \mathbb{T}^n \times (0, \infty)$, для любой дифференцируемой функции η с ограниченным носителем (см. [3, гл. I, формула (3.2₃)]).

Целью непрерывного и импульсного отборов является получение максимального среднего временного дохода в натуральном виде, т.е. если к моменту τ эти отборы дали такой доход объемов соответственно $P_u(\tau)$ и $P_r(\tau)$, то нужно решить задачу оптимизации

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} (P_u(\tau) + P_r(\tau)) \rightarrow \max, \quad (3)$$

выбирая *допустимую стратегию отбора* — пару из допустимых управления и плотности усилия. Решение такой задачи доставляет оптимальную эксплуатацию ресурса в долгосрочной перспективе.

Мы показываем, что существует допустимая стратегия отбора, доставляющая решение задачи (3) при подходящей начальной плотности популяции. Такую стратегию будем называть *оптимальной*. Этот результат аналогичен полученным в [1, 2, 5], но отличается от них смешанной формой отбора и, как следствие этого, постановкой задачи.

В условиях, наложенных на коэффициенты уравнения (1), любое решение этого уравнения с ненулевыми неотрицательными начальными данными ограничено и при $t \rightarrow \infty$ равномерно по тору стремится к предельному стационарному распределению $p_\infty = p_\infty(x)$, либо нулевому, либо положительному [4]. Появление постоянного допустимого отбора сохраняет это свойство решений [5], только предельное стационарное распределение будет зависеть от выбора допустимого управления u , т.е. $p_\infty = p_{\infty,u}(x)$. Учитывая, что в силу неотрицательности рассматриваемых решений и неотрицательности допустимого управления решения для уравнения без постоянного отбора являются суперрешениями для уравнения с таким отбором, всюду на торе имеем $p_{\infty,u}(x) \leq p_\infty(x)$.

Предложение 1. *Для любой допустимой стратегии отбора и любого неотрицательного начального распределения ресурса значение функционала в (3) корректно определено и не превосходит $\int_{\mathbb{T}^n} p_\infty(x)[u(x) + q(x)/T] dx$.*

Замечание 1. В последней оценке функцию p_∞ можно заменить на константу $M = \max_{x \in \mathbb{T}^n} p_\infty(x)$, которую несложно оценить. Действительно, распределение p_∞ почти всюду должно иметь вторую производную и удовлетворять уравнению $(\alpha(x)p_x)_x = -a(x)p + b(x)p^2$, правая часть которого положительна для достаточно больших значений p . Следовательно, максимумы распределения p_∞ не могут принимать таких значений в силу положительной определенности α . Таким образом, для оценки значения M достаточно потребовать положительности правой части этого уравнения при $p = M$, что дает следующее подходящее M :

$$M := \max_{x \in \mathbb{T}^n} \frac{|a(x) - U_1(x)|}{b_0}.$$

В силу предложения 1 и замечания 1 множество значений функционала в (3) по всем допустим стратегиям отбора ограничено. Следовательно, есть точная верхняя грань F_{\max} этих значений.

Теорема. *Существует допустимая стратегия отбора, доставляющая значение F_{\max} функционала в (3), если начальное распределение ресурса не меньше его предельного распределения p_{∞} без постоянного и импульсного отборов.*

Список литературы

1. *Беляков А.О., Давыдов А.А.* Оптимальный циклический сбор распределенного возобновляемого ресурса с диффузией // Тр. МИАН. 2021. Т. 315. С. 64–73.
2. *Давыдов А.А., Мельник Д.А.* Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с импульсным отбором // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 99–107.
3. *Ладыженская О.А., Уралцева Н.Н., Солонников В.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. 1967
4. *Berestycki H., Francois H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model. I: Species persistence // J. Math. Biol. 2005. V. 51, No. 1. P. 75–113.
5. *Davydov A.A.* Optimal steady state of distributed population in periodic environment // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2333. Pap. 120007.
6. *Fisher R. A.* The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. 1937. V. 7, No. 4. P. 353–369.
7. *Kolmogorov A.N., Petrovskii I.G., Piskunov N.S.* A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem // Bull. Moscow Univ., Math. Mech. 1937. V. 1. P. 1–25.

МЕТОД v -ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А. В. Дмитрук^{a,b}, Н. П. Осмоловский^c

^aЦентральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия

^bМГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^cИнститут системных исследований ПАН, Варшава, Польша

optcon@mail.ru, Nikolai.Osmolovskii@ibspan.waw.pl

Задачи с фазовыми ограничениями привлекали внимание специалистов с самого начала развития теории оптимального управления (см., например, [1]). При этом, как хорошо известно, обобщение принципа максимума Понтрягина на эти задачи было сопряжено со значительными трудностями, поскольку здесь мы имеем дело с бесконечным (континуальным) числом ограничений неравенства, а необходимые условия экстремума в них содержат меру. Известные способы доказательства принципа максимума (ПМ) технически довольно сложны и вряд ли доступны широкому кругу читателей. Поэтому вопрос о более простом и ясном доказательстве остается актуальным.

Стандартный способ получения ПМ состоит во введении так называемых *игольчатых вариаций* управления, предложенных Э. Макшейном и применявшихся В.Г. Болтянским и Л.С. Понтрягиным [1] для доказательства ПМ в так называемой *понтрягинской* задаче, не содержащей фазовых ограничений. Однако в случае наличия таких ограничений аппарат обычных игольчатых вариаций вряд ли возможно использовать, ибо уже производная соответствующей траектории $x(t)$ по ширине иголки будет разрывной функцией. Более удобным (и технически простым, но нетривиальным) аналогом игольчатых вариаций являются так называемые *вариации v -замены времени*. Они были предложены А.Я. Дубовицким и А.А. Милютиным еще в 1965 г. [2] и систематически использовались ими для доказательства ПМ в общей задаче оптимального управления, включающей как фазовые, так и смешанные ограничения.

Идея v -замены состоит в переходе от исходного времени t к новому времени τ , при котором исходное время $t = t(\tau)$ становится еще одной фазовой переменной, подчиненной уравнению $dt/d\tau = v(\tau)$, где $v(\tau) \geq 0$ есть произвольная измеримая ограниченная функция, которая трактуется как еще одно управление. Принципиальный момент состоит здесь в том, что эта замена *не взаимно однозначна* (там, где $v(\tau) = 0$), и по этой причине малые вариации управления $v(\tau)$ порождают немалые (так называемые *понтрягинские*) вариации исходного управления $u(t)$. Реализация этого приема в общем случае требует, однако, привлечения глубоких фактов теории функций действительного переменного.

В конце 1990-х годов А.А. Милютин предложил использовать упрощенный вариант v -замены, с *кусочно постоянной* функцией $v(\tau)$. Этим способом он доказал принцип максимума для общей задачи с концевыми ограничениями, но без фазовых. В случае кусочно постоянной функции $v(\tau)$ ее вариации порождают по сути дела те же игольчатые вариации исходного управления $u(t)$, но с некоторым отличием от последних. Оно состоит в том, что мы *не заменяем* оптимальное управление на малом отрезке около базовых точек пакета, а *расширяем* эти точки, вставляя в эти места малые отрезки с произвольными наперед заданными значениями управления. Поскольку этих точек несколько, в итоге получаем пакет игольчатых вариаций. Такие “вставные” иголки имеют следующие два преимущества по сравнению с обычными:

- (а) оптимальное управление может быть произвольной измеримой ограниченной функцией, тогда как в случае игольчатых вариаций надо требовать его кусочной непрерывности (иначе не получим гладкой зависимости траектории от ширины иголки);
- (б) v -замена дает гладкую управляемую систему, определенную по крайней мере в целой окрестности оптимального процесса, тогда как игольчатые вариации приводят к задаче, функции которой определены лишь на неотрицательном органте конечномерного пространства (точнее, на его пересечении с окрестностью нуля), соответствующем ширинам иголок в данном пакете (см. [4]).

Последнее обстоятельство представляется нам весьма существенным.

Применение кусочно постоянной v -замены к задаче с фазовыми ограничениями позволяет свести эту задачу к вспомогательной (так называемой *присоединенной*) задаче в *конечномерном пространстве*, аргументами которой служат

произвольно выбранные значения управления на участках постоянства функции $v(\tau)$, а также начальное значение фазовой переменной x . Наличие фазовых ограничений приводит к тому, что в этой конечномерной задаче имеется бесконечное число ограничений неравенства, т.е. это не есть обычная гладкая конечномерная задача. Однако условия оптимальности (локального минимума) для такой задачи известны (см., например, [5]); их специфика лишь в том, что они содержат меру, сосредоточенную на множестве индексов активных ограничений неравенства (здесь — моментов выхода на фазовую границу). Применяя эти условия к присоединенной v -задаче и переписывая их в терминах исходной задачи, мы получаем множество соответствующих наборов множителей Лагранжа, которое является непустым компактом в некоторой топологии (обычной топологии по конечномерным множителям и слабой-* относительно меры). Каждый элемент этого компакта (т.е. набор множителей Лагранжа) обеспечивает выполнение принципа максимума на конечном множестве выбранных значений управления и времени, соответствующем данной v -замене.

В задачах, где есть и фазовые, и смешанные ограничения, уже недостаточно одних обобщенных игольчатых вариаций, надо добавить еще и *малые вариации управления* (для получения условия стационарности по управлению), поэтому присоединенная задача ставится уже в бесконечномерном пространстве.

Итак, для каждой кусочно постоянной функции $v(\tau)$ мы имеем свою присоединенную задачу и свой компакт, состоящий из наборов множителей Лагранжа. Ясно, что чем “богаче” v -замена (т.е. чем больше моментов времени t , которые расширяются, и больше выбранных значений управления), тем более узкий компакт мы получаем. Таким образом, компакты, порожденные всевозможными кусочно постоянными v -заменами, частично упорядочены по включению, и поэтому в силу их непустоты образуют центрированную систему. Взяв любой элемент из их пересечения, мы получаем единое условие оптимальности — набор множителей Лагранжа, для которого ПМ выполнен при всех значениях управления и времени.

Подробное изложение описанной схемы дано в [6–8]. Для задач с присутствием смешанных ограничений она имеет то преимущество по сравнению с использованием скользящих режимов [3], что в последнем приходится доказывать довольно сложную теорему о корректности расширения (овыпукления) управляемой системы при введении скользящих режимов, тогда как метод v -вариаций этого не требует.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. Дубовицкий А.Я., Милотин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.
3. Милотин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Мехмат МГУ, 2004. <https://kafedra-opu.ru/node/139>.
4. Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. О доказательстве принципа максимума Понтрягина с помощью игольчатых вариаций // Фунд. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 5. С. 49–74.
5. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. A general Lagrange multipliers theorem and related questions // Control Systems and Mathematical Methods in Economics / Ed. by

- Feichtinger et al. Berlin: Springer, 2018. P. 165–194. (Lect. Notes Econ. Math. Syst.; V. 687).
6. *Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.* Вариации типа v -замены времени в задачах с фазовыми ограничениями // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, №1. С. 76–92.
 7. *Dmitruk A. V., Osmolovskii N. P.* Proof of the maximum principle for a problem with state constraints by the v -change of time variable // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2019. V. 24, No. 5. P. 2189–2204.
 8. *Дмитрук А.В.* Вариации v -замены времени в задачах оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями // Изв. РАН. Сер. мат. (представлено в редакцию).

О ВАРИАЦИОННЫХ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ С ПОЗИЦИОННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ СПУСКА, УСИЛИВАЮЩИХ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В. А. Дыхта

*Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова
СО РАН, Иркутск, Россия*

`dykhta@gmail.com`

Общеизвестно, что фундаментальный принцип максимума Понтрягина [1] является наиболее сильным и универсальным необходимым условием оптимальности (в первом порядке) в непрерывных задачах оптимального управления с гладкой зависимостью по фазовым переменным. Да и в более общих негладких задачах принцип максимума Понтрягина (ПМП) остается своеобразным ориентиром (эталон) для оценки качества получаемых результатов.

С этой точки зрения представляют интерес любые усиления ПМП, обладающие конструктивностью, сравнимой с понтягинской. Как отмечал Р.В. Гамкрелидзе [2], на тот момент (1998) “ПМП, сформулированный в 1955 г., не претерпел с тех пор никаких усовершенствований или обобщений”. Несмотря на некоторую категоричность этого суждения (напомним хотя бы задачи со смешанными ограничениями), его во многом можно отнести и к прошедшему периоду.

Но некоторые достижения все же имеются, и в докладе речь пойдет о необходимых условиях оптимальности с позиционными управлениями спуска по целевому функционалу, объединенных термином “позиционный принцип минимума” [3–6]. Эти условия глобальной оптимальности формулируются в рамках конструкций ПМП, но тем не менее существенно усиливают его и некоторые аналоги для негладких задач принципов максимума типа Кларка и Кашкоч–Лоясиевича [7, 8].

Примечательно, что это усиление достигается использованием слабо убывающих решений проксимального неравенства Гамильтона–Якоби, конструируемых в теснейшей связи с допустимым управляемым процессом, исследуемым на оптимальность. Эту связь обеспечивает условие существования в субдифференциале конструируемого полурешения котраектории процесса, т.е. решения сопряженного включения или системы. Более того, эти полурешения, генерирующие

управления спуска, конструируются явно достаточно простым способом, что обуславливает конструктивность условий типа позиционного принципа минимума (кратко — Ф-ПМ).

Таким образом, методы доказательства условий оптимальности с позиционными управлениями спуска связывают развитую теорию неравенств Гамильтона–Якоби [9–11] с неизменным атрибутом необходимых условий оптимальности — котраекториями процесса. Именно из-за отсутствия подобной связи развитая теория долгое время не подкреплялась конструктивными необходимыми условиями оптимальности.

Опишем кратко некоторые результаты доклада для следующей задачи (P):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), & x(t_0) &= x_0, \\ u(t) &\in U, & t \in T &= [t_0, t_1], \\ J(\sigma) &= l(x(t_1)) \rightarrow \inf. \end{aligned}$$

Здесь через σ обозначаются пары функций $(x, u) \in AC(T, \mathbb{R}^n) \times L_\infty(T, U)$, U — компактное множество в \mathbb{R}^m . Вектор-функция $f(t, x, u)$ предполагается непрерывной, липшицевой по x и удовлетворяющей условию сублинейного роста при $(t, x, u) \in T \times \mathbb{R}^n \times U$; функцию $l(x)$ полагаем липшицевой на \mathbb{R}^n .

Пусть Σ — множество всех допустимых пар функций σ и $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ — допустимая пара, исследуемая на оптимальность.

1. Для гладкой по x задачи (P₁) и дважды гладкой (P₂) определяются следующие опорные мажоранты функционала φ и Φ соответственно:

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) &= l(x) - l(\bar{x}(t)) + (\psi(t) - l_x(\bar{x}(t))) \cdot (x - \bar{x}(t)) + r(t), \\ \Phi(t, x) &= \varphi(t, x) + \frac{1}{2}(x - \bar{x}(t))' [\Psi(t) - l_{xx}(\bar{x}(t))] \cdot (x - \bar{x}(t)). \end{aligned}$$

Здесь $\psi(t)$ — котраектория процесса $\bar{\sigma}$ с граничным условием $\psi(t_1) = l_x(\bar{x}(t_1))$ (это соответствует условию минимума функции Понтрягина H в ПМП), а $\Psi(t)$ — матричная функция Габасова

$$\dot{\Psi} = -H_{x\psi}\Psi - \Psi H_{\psi x} - H_{xx}, \quad \Psi(t_1) = l_{xx}(\bar{x}(t_1))$$

с коэффициентами, подсчитанными вдоль $\bar{\sigma}$, $r(t)$ — “поправка”, обеспечивающая свойство монотонности φ .

Через U^φ , U^Φ обозначим множества точек минимума по $u \in U$ полных производных по времени $\dot{\varphi}$, $\dot{\Phi}$, а через \mathcal{V}^φ , \mathcal{V}^Φ — множества селекторов отображений U^φ , U^Φ — управлений потенциального спуска. Решения управляемой системы с позиционными управлениями $\{v\}$ понимаются в смысле конструктивных движений Красовского–Субботина [9, 10] или кривых Эйлера [7]. Пусть $\mathcal{X}(v)$ — множество таких движений, соответствующих управлению v .

Теорема 1 (Ф-ПМ). *Если пара (\bar{x}, \bar{u}) оптимальна в задаче (P₁), то траектория \bar{x} оптимальна в следующей φ -присоединенной задаче:*

$$l(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad x \in \mathcal{X}(v), \quad v \in \mathcal{V}^\varphi.$$

Теорема 2 (Ф-ПМ второго порядка). *Если пара (\bar{x}, \bar{u}) оптимальна в задаче (P₂), то*

$$l(\bar{x}(t_1)) \leq l(x(t_1)) \quad \forall x \in \mathcal{X}(v), \quad v \in \mathcal{V}^\Phi.$$

Если же управление \bar{u} особое, то траектория \bar{x} оптимальна в Φ -присоединенной задаче (формулируемой по образцу теоремы 1).

2. Обобщая теорему 1, обозначим через $\mathcal{W}(\bar{x})$ множество всех измеримо липшицевых позиционных управлений $w(t, x)$, генерирующих траекторию \bar{x} , а через $\mathcal{K}_w(\bar{x})$ множество решений сопряженного включения Кларка при фиксированном w (с учетом зависимости H от $u = w(t, x)$). Тогда для каждой $\psi \in \mathcal{K}_w(\bar{x})$ определена опорная мажоранта $\varphi = \varphi(\psi)$ (см. п. 1).

Теорема 3 (F-ПМ с множеством генерирующих управлений). *Если пара (\bar{x}, \bar{u}) оптимальна в задаче (P_1) , то при любом $w \in \mathcal{W}(\bar{x})$ и любой $\psi \in \mathcal{K}_w(\bar{x})$*

$$l(\bar{x}(t_1)) \leq \min \left\{ l(x(t_1)) \mid x \in \bigcup_{v \in \mathcal{V}^\varphi(\psi)} \mathcal{X}(v) \right\}.$$

Более того, существует такая $\psi \in \mathcal{K}_w(\bar{x})$, что на траектории \bar{x} реализуется минимум.

Эта теорема усиливает не только ПМП; без каких-либо изменений она распространяется на негладкую задачу (P) , усиливая принципы максимума Кларка и Кашкоч–Лоясиевича.

3. Результаты пп. 1, 2 относились к случаю явно заданных опорных мажорант функционала. Следующая теорема устанавливает, при каких условиях произвольное полурешение уравнения Гамильтона–Якоби является опорной мажорантой в задаче (P) .

Рассмотрим проксимальное неравенство Гамильтона–Якоби для слабо убывающих (u -стабильных [9, 10]) функций (НJI):

$$\begin{aligned} \text{для всех } (t, x) \in (t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n, \quad (\theta, p) \in \partial_P \varphi(t, x) \\ \theta + h(t, x, p) \leq 0, \\ \varphi(t_1, x) \geq l(x). \end{aligned}$$

Здесь $h(t, x, p) = \min\{p \cdot f(t, x, u) \mid u \in U\}$ и l — гладкая функция.

Теорема 4. *Пусть φ — непрерывное решение неравенства (НJI), имеющее проксимальный субградиент (θ, p) с компонентой p , равной котраектории в смысле Кашкоч–Лоясиевича для траектории \bar{x} . Тогда φ порождает вариационное необходимое условие оптимальности типа общего позиционного принципа минимума [3].*

Анонсированные необходимые условия иллюстрируются примерами и схемой доказательства приближенного F-ПМ для гладких задач с терминальными ограничениями.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961.
2. Гамкрелидзе Р.В. Математические работы Л.С. Понтрягина // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 1998. Т. 60. С. 5–23.
3. Дыхта В.А. Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // ДАН. 2015. Т. 462, № 6. С. 653–656.

4. Дыхта В.А. Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, №2. С. 73–86.
5. Дыхта В.А. Квадратичные опорные суперрешения уравнения Гамильтона–Якоби и позиционный принцип минимума второго порядка // Матер. III Междунар. семинара, посвященного 75-летию акад. А.И. Субботина (CGS'2020; Екатеринбург, 26–30 октября 2020 г.). 2020. С. 153–156.
6. Dykhtha V.A. Approximate feedback minimum principle for suboptimal processes in non-smooth optimal control problems // Stability, control and differential games. 2019. P. 127–132.
7. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Nonsmooth analysis and control theory. New York: Springer, 1998.
8. Kaškosz B., Lojasiewicz S. A maximum principle for generalized control // Nonlinear Anal.: Theory, Methods Appl. 1985. V. 9, No. 2. P. 109–130.
9. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974.
10. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исследований, 2003.
11. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhäuser, 1997.

MULTISTABILITY AND LIMIT CYCLES IN POLYNOMIAL DYNAMICAL SYSTEMS

Valery A. Gaiko

National Academy of Sciences of Belarus, UIIP, Minsk, Belarus

valery.gaiko@gmail.com

Introduction. We consider global bifurcations of limit cycles and study multistability in polynomial dynamical systems [1–17]. To control limit cycle bifurcations, especially bifurcations of multiple limit cycles, it is necessary to know properties and combine effects of all field rotation parameters of such systems [1, 2]. It can be done by means of development of new bifurcation geometric methods based on the Wintner–Perko termination principle for planar polynomial dynamical systems [2, 15]. If we do not know the cyclicity of the termination points, then, applying canonical systems with field rotation parameters, we use geometric properties of the spirals filling the interior and exterior domains of limit cycles [3–13].

Applying this approach, we have solved, e.g., Hilbert’s Sixteenth Problem on the maximum number and distribution of limit cycles for the general Liénard polynomial system with an arbitrary number of singular points [3–6, 8], the Kukles cubic-linear system [9], the Euler–Lagrange–Liénard polynomial mechanical system [13], Leslie–Gower systems which model the population dynamics in real ecological or biomedical systems [9], and a reduced planar quartic Topp system which models the dynamics of diabetes [11–13]. Finally, applying a similar approach, we have considered various applications of three-dimensional polynomial dynamical systems and, in particular,

completed the strange attractor bifurcation scenario in Lorenz type systems globally connecting the homoclinic, period-doubling, Andronov–Shilnikov, and period-halving bifurcations of their limit cycles [7, 11]. Here we consider the Euler–Lagrange–Liénard polynomial dynamical system in Section 2 and the Topp rational dynamical system in Section 3.

The Euler–Lagrange–Liénard polynomial dynamical system. Consider the Euler–Lagrange–Liénard polynomial equation [13]

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x}^2 + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (1)$$

and the corresponding dynamical system

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x)y - h(x)y^2. \quad (2)$$

We suppose that system (2), where $g(x)$, $h(x)$ and $f(x)$ are arbitrary polynomials, has an anti-saddle (a node, or a focus, or a center) at the origin and write it in the form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x(1 + a_1x + \dots + a_{2l}x^{2l}) + y(\alpha_0 + \alpha_1x + \dots + \alpha_{2k}x^{2k}) \\ &\quad + y^2(c_0 + c_1x + \dots + c_{2n}x^{2n}). \end{aligned} \quad (3)$$

In [13], we constructed canonical systems containing field rotation parameters [1, 2] and proved the following theorem for studying global limit cycle bifurcations and multistability of (3).

Theorem 1. *The Euler–Lagrange–Liénard polynomial dynamical system (3) with limit cycles can be reduced to one of the canonical forms*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x(1 + a_1x + \dots + a_{2l}x^{2l}) \\ &\quad + y(\alpha_0 - \beta_1 - \dots - \beta_{2k-1} + \beta_1x + \alpha_2x^2 + \dots + \beta_{2k-1}x^{2k-1} + \alpha_{2k}x^{2k}) \\ &\quad + y^2(c_0 + c_1x + \dots + c_{2n}x^{2n}) \end{aligned} \quad (4)$$

or

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1 + b_1x + \dots + b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &\quad + y(\alpha_0 - \beta_1 - \dots - \beta_{2k-1} + \beta_1x + \alpha_2x^2 + \dots + \beta_{2k-1}x^{2k-1} + \alpha_{2k}x^{2k}) \\ &\quad + y^2(c_0 + c_1x + \dots + c_{2n}x^{2n}), \end{aligned} \quad (5)$$

where $1 + a_1x + \dots + a_{2l}x^{2l} \neq 0$, $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ are field rotation parameters and $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2k-1}$ are semi-rotation parameters.

By means of systems (4) and (5), we proved the following theorem [13].

Theorem 2. *The Euler–Lagrange–Liénard polynomial dynamical system (3) can have at most $k + l + 1$ limit cycles, $k + 1$ surrounding the origin and l surrounding one by one the other singularities of (3).*

The Topp rational dynamical system. Consider the Topp three-dimensional rational dynamical system which models the dynamics of diabetes

$$\begin{aligned}\dot{G} &= a - (b + cI)G, \\ \dot{I} &= \frac{\beta G^2}{1 + G^2} - \alpha I, \\ \dot{\beta} &= (-l + mG - nG^2)\beta\end{aligned}\tag{6}$$

with parameters as in [17].

After reducing system (6) and bringing it to a polynomial form, we obtained a planar quartic dynamical system [11–13]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 + x^2)(a - (b + cy)x) \equiv P, \\ \dot{y} &= \beta x^2 - \alpha y(1 + x^2) \equiv Q.\end{aligned}\tag{7}$$

Together with (7), we also considered an auxiliary system (see [1, 2, 15])

$$\dot{x} = P - \gamma Q, \quad \dot{y} = Q + \gamma P,\tag{8}$$

applying to these systems new bifurcation methods and geometric approaches developed in [2–13] and carrying out the qualitative analysis of (7).

Using system (8) and applying Perko's results [15], we proved the following theorem [11–13].

Theorem 3. *The reduced Topp system (7) can have at most two limit cycles.*

References

1. *Bautin N.N., Leontovich E.A.* Methods and examples of the qualitative analysis of dynamical systems in a plane. Moscow: Nauka, 1990 (in Russian).
2. *Gaiko V.A.* Global bifurcation theory and Hilbert's sixteenth problem. Boston: Kluwer, 2003.
3. *Gaiko V.A.* On the geometry of polynomial dynamical systems // J. Math. Sci. 2009. V. 157. P. 400–412.
4. *Gaiko V.A.* On limit cycles surrounding a singular point // Diff. Eqns. Dyn. Syst. 2012. V. 20. P. 329–337.
5. *Gaiko V.A.* The applied geometry of a general Liénard polynomial system // Appl. Math. Lett. 2012. V. 25. P. 2327–2331.
6. *Gaiko V.A.* Limit cycle bifurcations of a general Liénard system with polynomial restoring and damping functions // Int. J. Dyn. Syst. Diff. Eqns. 2012. V. 4. P. 242–254.
7. *Gaiko V.A.* Global bifurcation analysis of the Lorenz system // J. Nonlinear Sci. Appl. 2014. V. 7. P. 429–434.
8. *Gaiko V.A.* Maximum number and distribution of limit cycles in the general Liénard polynomial system // Adv. Dyn. Syst. Appl. 2015. V. 10. P. 177–188.
9. *Gaiko V.A.* Global bifurcation analysis of the Kukles cubic system // Int. J. Dyn. Syst. Diff. Eqns. 2018. V. 8. P. 326–336.
10. *Gaiko V.A., Vuik C.* Global dynamics in the Leslie–Gower model with the Allee effect // Int. J. Bifurcation Chaos. 2018. V. 28. Pap. 1850151.
11. *Gaiko V.A., Broer H.W., Sterk A.E.* Global bifurcation analysis of Topp system // Cybernetics and Physics. 2019. V. 8. P. 244–250.

12. *Gaiko V.A.* Global bifurcations of limit cycles in an endocrine system model // *Adv. Dyn. Syst. Appl.* 2020. V. 15. P. 15–25.
13. *Gaiko V.A.* Limit cycles of multi-parameter polynomial dynamical systems // *J. Math. Sci.* 2022. V. 260. 662–677.
14. *Lins A., de Melo W., Pugh C.C.* On Liénard’s equation // *Lect. Notes Math.* 1977. V. 597. P. 335–357.
15. *Perko L.* Differential equations and dynamical systems. New York: Springer, 2002.
16. *Smale S.* Mathematical problems for the next century // *Math. Intelligencer.* 1998. V. 20. P. 7–15.
17. *Topp B., Promislow K., Devries G., Miuraa R.M., Finegood D.T.* A model of β -cell mass, insulin, and glucose kinetics: pathways to diabetes // *J. Theor. Biol.* 2000. V. 206. P. 605–619.

СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

С. Д. ГЛЫЗИН, А. Ю. КОЛЕСОВ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия*

glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru

Основная часть математических моделей нейронных систем базируется на так называемой гипотезе об эквивалентности. В рамках этой гипотезы биологический нейрон заменяется некоторым генератором с сосредоточенными электрическими параметрами. В свою очередь, этот генератор моделируется нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений или аналогичной системой с запаздыванием. Поскольку колебания мембранного потенциала носят заведомо релаксационный характер, соответствующая система, как правило, является сингулярно возмущенной. В рамках гипотезы об эквивалентности в качестве модели отдельного нейрона мы используем предложенное в [1] скалярное нелинейное дифференциальное уравнение с запаздыванием вида

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u \quad (1)$$

для мембранного потенциала $u = u(t) > 0$. Здесь параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в нейроне, предполагается большим, точка — дифференцирование по t , а функция $f(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, обладает свойствами

$$f(0) = 1, \quad f(u) + a = O(u^{-1}), \quad uf'(u) = O(u^{-1}), \quad u^2 f''(u) = O(u^{-1}) \quad (2)$$

при $u \rightarrow +\infty$, где $a = \text{const} > 0$.

Следует также отметить, что безотносительно к нейродинамическим приложениям уравнение (1) рассматривалось в работе [1] как некоторое обобщение известного уравнения Хатчинсона. В указанной работе установлено, что при всех

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 21-71-30011)

$\lambda \gg 1$ оно допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u(t, \lambda) > 0$, $u(0, \lambda) \equiv 1$, периода $T(\lambda)$, удовлетворяющий предельным соотношениям

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T(\lambda) = T_0, \quad \max_{0 \leq t \leq T(\lambda)} |x(t, \lambda) - x_0(t)| = O(\lambda^{-1}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

где $T_0 = (1 + a)t_0$, $t_0 = 1 + 1/a$, а T_0 -периодическая функция $x_0(t)$ является решением некоторого релейного уравнения, получающегося из (1) в результате замены $x(t, \lambda) = (1/\lambda) \ln(u(t, \lambda))$ и предельного перехода при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Предположим теперь, что имеется сеть из $m \geq 2$ нейронов, взаимодействующих посредством химических синапсов и связанных между собой по принципу “каждый со всеми” (такую сеть принято называть полносвязной). Тогда, опираясь на предложенную в статье [2] методику, в качестве математической модели данной сети можно взять систему уравнений с запаздыванием вида [3]

$$\dot{u}_j = \left[\lambda f(u_j(t-1)) + b \left(\sum_{s=1, s \neq j}^m g(u_s(t-\Delta)) \right) \ln \frac{u_*}{u_j} \right] u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Здесь $b = \text{const} > 0$, $u_* = \exp(\lambda c)$, $c = \text{const} \in \mathbb{R}$, Δ — запаздывание в цепи связи, а функция $g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $g(u) > 0 \forall u > 0$, такова, что

$$g(0) = 0, \quad g(u) = 1 + O(u^{-1}), \quad ug'(u) = O(u^{-1}), \quad u^2g''(u) = O(u^{-1}) \quad (5)$$

при $u \rightarrow +\infty$.

Из полученных нами результатов следует, что при подходящем выборе параметров и при увеличении m количество сосуществующих устойчивых циклов специального вида в системе (4) неограниченно растет; в частности, показано, что их число равно $2^m - 1$. Особенностью рассмотренных нами устойчивых решений является то, что часть осцилляторов находится в неработающем (асимптотически близком к нулевому) состоянии. Отметим, кроме того, что каждому периодическому режиму может быть поставлен в соответствие бинарный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, где $\alpha_j = 1$, если j -й нейрон активен, и $\alpha_j = 0$ в противном случае. Принимая во внимание это обстоятельство, приходим к выводу, что данные режимы могут быть использованы для построения устройств с ассоциативной памятью на основе искусственных нейронных сетей.

Список литературы

1. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Об одной модификации уравнения Хатчинсона // ЖВМиМФ. 2010. Т. 50, № 12. С. 2099–2112.
2. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Об одном способе математического моделирования химических синапсов // Диф. уравнения. 2013. Т. 49, № 10. С. 1227–1244.
3. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Периодические режимы группового доминирования в полносвязных нейронных сетях // Изв. вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 775–798.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ
С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ: ПРИНЦИП ДИНАМИЧЕСКОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ И УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ*

М. И. Гомоюнов

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия

m.i.gomoyunov@gmail.com

Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $T > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Для $t \in [0, T]$ рассмотрим множество $AC^\alpha[0, t]$ всех функций $w: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$, каждая из которых представима в виде $w(\tau) = w(0) + (I_{0+}^\alpha h)(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, для некоторой своей измеримой ограниченной функции $h: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$, где I_{0+}^α — оператор интегрирования Римана–Лиувилля порядка α (см., например, [1]). Обозначим через G множество всех пар $(t, w(\cdot))$ таких, что $t \in [0, T]$ и $w(\cdot) \in AC^\alpha[0, t]$. На множестве G введем метрику

$$\text{dist}((t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot))) = |t - t'| + \max_{\xi \in [0, T]} \|w(\xi \wedge t) - w'(\xi \wedge t')\|,$$

где $(t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot)) \in G$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^n , $a \wedge b = \min\{a, b\}$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$. Положим $G^0 = \{(t, w(\cdot)) \in G: t < T\}$.

Рассмотрим задачу оптимального управления, в которой движение динамической системы описывается дифференциальным уравнением

$$({}^C D_{0+}^\alpha x)(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau)) \quad \text{при п.в. } \tau \in [t, T] \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(\tau) = w(\tau), \quad \tau \in [0, t], \quad (2)$$

а минимизируемый показатель качества имеет вид

$$J(t, w(\cdot), u(\cdot)) = \sigma(x(T)) + \int_t^T \chi(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

Здесь ${}^C D_{0+}^\alpha$ — оператор дифференцирования Капуто порядка α (см., например, [2]), $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $u(\tau) \in P$ — управление, $P \subset \mathbb{R}^r$ — компакт, $r \in \mathbb{N}$, $(t, w(\cdot)) \in G$ — начальные данные.

Отметим, что необходимость задавать в условии (2) значения $x(\tau)$ при всех $\tau \in [0, t]$ вызвана наследственным характером оператора ${}^C D_{0+}^\alpha$.

Предположим, что функции $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times P \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $\chi: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times P \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны; f удовлетворяет условию подлинейного роста по второму аргументу; f и χ локально липшицевы по второму аргументу. Множество допустимых управлений $\mathcal{U}(t)$ состоит из всех измеримых функций $u: [t, T] \rightarrow P$. Каждому управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)$ отвечает единственное движение системы $x(\cdot)$ — функция из $AC^\alpha[0, T]$, удовлетворяющая начальному условию (2) и уравнению (1).

Определим функционал цены (функционал оптимального результата)

$$\rho(t, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)} J(t, w(\cdot), u(\cdot)), \quad (t, w(\cdot)) \in G.$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-10070, <https://rscf.ru/project/21-71-10070/>).

Согласно [3] функционал $\rho: G \rightarrow \mathbb{R}$ характеризуется краевым условием

$$\rho(T, w(\cdot)) = \sigma(w(T)), \quad w(\cdot) \in AC^\alpha[0, T],$$

и следующим свойством (принцип динамического программирования): каковы бы ни были $(t, w(\cdot)) \in G$ и $\tau \in [t, T]$, имеет место равенство

$$\rho(t, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)} \left(\rho(\tau, x_\tau(\cdot)) + \int_t^\tau \chi(\xi, x(\xi), u(\xi)) d\xi \right), \quad (4)$$

где $x(\cdot)$ — движение системы, отвечающее $(t, w(\cdot))$ и $u(\cdot)$, а через $x_\tau(\cdot)$ обозначено сужение функции $x(\cdot)$ на промежуток $[0, \tau]$.

Далее рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби, которое является выражением свойства (4) в инфинитезимальной форме:

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + H(t, w(t), \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))) = 0, \quad (t, w(\cdot)) \in G^0. \quad (5)$$

Здесь искомым является функционал $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$; гамильтониан H определяется равенством

$$H(t, x, s) = \min_{u \in P} (\langle s, f(t, x, u) \rangle + \chi(t, x, u)), \quad t \in [0, T], \quad x, s \in \mathbb{R}^n,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^n ; величины $\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$, $\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ представляют собой коинвариантные (си-) производные порядка α функционала φ в точке $(t, w(\cdot))$. Данные производные определяются соотношением (см., например, [4, 5], а также [3])

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) &= \partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot))(\tau - t) + \\ &+ \int_t^\tau \langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), ({}^C D^\alpha x)(\xi) \rangle d\xi + o(\tau - t), \quad \tau \in (t, T), \quad (6) \end{aligned}$$

которое должно выполняться для всех функции $x(\cdot) \in AC^\alpha[0, T]$, удовлетворяющих условию (2). В соотношении (6) величина $o(\cdot)$ может зависеть от $x(\cdot)$ и $o(\tau - t)/(\tau - t) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow t + 0$.

В [3] доказано, что если функционал цены $\rho: G \rightarrow \mathbb{R}$ является си-гладким порядка α (т.е. ρ непрерывен вместе с его си-производными порядка α), то он удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби (5). С другой стороны, если некоторый си-гладкий порядка α функционал $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению (5) и краевому условию

$$\varphi(T, w(\cdot)) = \sigma(w(T)), \quad w(\cdot) \in AC^\alpha[0, T], \quad (7)$$

то он совпадает с функционалом цены ρ .

Однако, как правило, функционал цены ρ в задаче (1)–(3) не является си-гладким порядка α и не может рассматриваться как решение задачи Коши (5), (7) в классическом смысле, что приводит к необходимости изучения обобщенных решений этой задачи Коши.

В рамках данного направления исследований получены следующие основные результаты. Введено понятие минимаксного (в смысле [6]) решения задачи Коши (5), (7). Доказаны [7] теоремы о существовании и единственности минимаксного решения, о согласованности минимаксного и классического решений. Установлена [8] связь между функционалом цены ρ в задаче оптимального управления (1)–(3) и минимаксным решением соответствующей задачи Коши (5), (7), при

этом указан способ построения оптимальных стратегий управления по принципу обратной связи с памятью истории движения. Кроме того, дано определение вязкостного (в смысле [9]) решения задачи Коши (5), (7). Доказана [10] теорема о единственности вязкостного решения, которая, в частности, позволяет установить совпадение минимаксного и вязкостного решений.

Список литературы

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
2. Diethelm K. The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010.
3. Gotoyunov M.I. Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems // SIAM J. Control Optim. 2020. V. 58, No. 6. P. 3185–3211.
4. Kim A.V. Functional differential equations. Application of i -smooth calculus. Dordrecht: Springer, 1999.
5. Лукоянов Н.Ю. Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011.
6. Subbotin A.I. Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective. Basel: Birkhäuser, 1995.
7. Gotoyunov M.I. Minimax solutions of Hamilton–Jacobi equations with fractional coinvariant derivatives // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2022. V. 28. Pap. 23.
8. Gotoyunov M.I. Differential games for fractional-order systems: Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation and optimal feedback strategies // Mathematics. 2021. V. 9, No. 14. Pap. 1667.
9. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277, No 1. P. 1–42.
10. Gotoyunov M.I. On viscosity solutions of path-dependent Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equations for fractional-order systems. Preprint, arXiv: 2109.02451.

О РАЗЛОЖЕНИИ НЕСУЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЛЯ A -ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С НЕТРИВИАЛЬНЫМИ АТТРАКТОРАМИ И РЕПЕЛЛЕРАМИ*

В. З. Гринес, Д. И. Минц

*Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,
Нижний Новгород, Россия*

vgrines@yandex.ru, dmitriimints@gmail.com

В работе [1] введен класс $\mathbb{G}(M^2)$ A -диффеоморфизмов замкнутых ориентируемых связных поверхностей, неблуждающие множества которых состоят из одномерных базисных множеств, и получены необходимые и достаточные условия су-

*Результаты получены при поддержке гранта РФФ (проект 21-11-00010), поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931), а также в ходе проведения исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы “Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)” в 2021–2022 гг.

существования гомеоморфизма всей поверхности, сопрягающего ограничения этих диффеоморфизмов на их неблуждающие множества. Из результатов работы [2] следует, что на двумерной сфере и двумерном торе не существует диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$. В то же время на любой замкнутой ориентируемой связной поверхности рода $g \geq 2$ можно построить пример диффеоморфизма из класса $\mathbb{G}(M^2)$. Основной целью настоящего доклада является установление взаимосвязей между динамическими свойствами диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$ и топологией несущей поверхности M^2 , а также исследование устойчивости таких диффеоморфизмов.

Пусть M^2 — замкнутая гладкая ориентируемая связная поверхность, $f: M^2 \rightarrow M^2$ — ее A -диффеоморфизм.

Известно, что произвольное одномерное базисное множество диффеоморфизма f является либо аттрактором, либо репеллером и имеет локальную структуру прямого произведения интервала и канторова множества. Периодическая точка p , принадлежащая одномерному аттрактору (репеллеру) Λ , называется s -граничной (и-граничной) периодической точкой, если одна из компонент связности множества $W^s(p) \setminus p$ ($W^u(p) \setminus p$) не пересекается с Λ (мы будем обозначать эту компоненту связности через μ_p^s (μ_p^u)) и обе компоненты связности множества $W^u(p) \setminus p$ ($W^s(p) \setminus p$) пересекаются с Λ . Для одномерного аттрактора (репеллера) множество s -граничных (и-граничных) периодических точек непусто и конечно.

Достижимая изнутри граница множества $M^2 \setminus \Lambda$, где Λ — одномерный аттрактор (репеллер), состоит из конечного числа связок. Связкой b одномерного аттрактора Λ называется объединение максимального числа h_b неустойчивых многообразий $W_{p_1}^u, \dots, W_{p_{h_b}}^u$ s -граничных периодических точек p_1, \dots, p_{h_b} множества Λ , устойчивые сепаратрисы $\mu_{p_1}^s, \dots, \mu_{p_{h_b}}^s$ которых принадлежат одной и той же компоненте связности множества $W_\Lambda^s \setminus \Lambda$. Число h_b называется степенью связки. Аналогично можно определить понятие связки для одномерного репеллера.

Любое базисное множество Λ диффеоморфизма f единственным образом представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся компактных подмножеств: $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_q$ ($q \geq 1$), называемых периодическими компонентами множества Λ , таких, что $f^q(\Lambda_j) = \Lambda_j$, $f(\Lambda_j) = \Lambda_{j+1}$, $j \in \{1, \dots, q\}$ ($\Lambda_{q+1} = \Lambda_1$). Для каждой точки x периодической компоненты Λ_j множество $W_x^s \cap \Lambda_j$ ($W_x^u \cap \Lambda_j$) плотно в Λ_j .

Пусть $f: M^2 \rightarrow M^2$ — диффеоморфизм из класса $\mathbb{G}(M^2)$ такой, что его неблуждающее множество состоит из k_f периодических компонент $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{k_f}$ ($k_f \geq 2$, так как неблуждающее множество диффеоморфизма f всегда содержит один аттрактор и один репеллер). Обозначим через m_{Λ_i} число связок, принадлежащих Λ_i , через h_{Λ_i} сумму степеней этих связок. Обозначим через m_f количество всех связок, принадлежащих периодическим компонентам диффеоморфизма f , через h_f сумму степеней этих связок. Для числа $g \geq 0$ обозначим через M_g^2 замкнутую ориентируемую связную поверхность рода g .

Теорема 1. Пусть $f \in \mathbb{G}(M^2)$. Тогда поверхность M^2 гомеоморфна связной сумме

$$M_{g_1}^2 \# \dots \# M_{g_{k_f}}^2 \# \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_{l_f},$$

где $g_i = 1 + h_{\Lambda_i}/4 - m_{\Lambda_i}/2$ ($i \in \{1, \dots, k_f\}$), $l_f = m_f/2 - k_f + 1$.

Замечание. При доказательстве теоремы 1 установлено, что для каждой поверхности $M_{g_i}^2$, $i \in \{1, \dots, k_f\}$, существует компактное ориентируемое связное подмногообразие $N_{\Lambda_i} \subset M^2$ рода $g_i = 1 + h_{\Lambda_i}/4 - m_{\Lambda_i}/2$ с m_{Λ_i} компонентами края, которое содержит периодическую компоненту Λ_i . При этом $N_{\Lambda_i} \cap N_{\Lambda_j} = \emptyset$ для $i \neq j$.

Следствие. Пусть $f \in \mathbb{G}(M^2)$. Тогда поверхность M^2 имеет род $g = 1 + h_f/4$.

Теорема 2. Пусть $f \in \mathbb{G}(M^2)$. Тогда f является Ω -устойчивым, но не является структурно устойчивым.

Список литературы

1. Гринес В.З., Калай Х.Х. Диффеоморфизмы двумерных многообразий с пространно расположенными базисными множествами // УМН. 1985. Т. 40, № 1. С. 189–190.
2. Плыкин Р.В. Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей // Мат. сб. 1974. Т. 94, № 2. С. 243–264.

ВОЗМУЩЕНИЯ НЕГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ ДВУМЕРНОГО ТОРА*

В. З. Гринес, Д. И. Минц, Е. Е. Чилина

*Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,
Нижний Новгород, Россия*

vgrines@yandex.ru, dmitriimints@gmail.com, k.chilina@yandex.ru

Негиперболические алгебраические автоморфизмы двумерного тора не являются структурно устойчивыми отображениями, поэтому предсказать динамику сколь угодно малых возмущений таких отображений невозможно. В настоящем докладе приведены отображения, которые являются возмущениями негиперболических автоморфизмов двумерного тора посредством их суперпозиции с гомотопными тождественному градиентноподобными диффеоморфизмами. Показано, что полученные отображения являются структурно устойчивыми и их динамические свойства определяются свойствами возмущаемых автоморфизмов.

Пусть M^n — гладкое замкнутое связное ориентируемое n -многообразие ($n \geq 1$) и f — гомеоморфизм (диффеоморфизм) на M^n .

Пусть p — гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма f . Обозначим через W_p^s и W_p^u устойчивое и неустойчивое многообразия точки p . Через Ω_f обозначим неблуждающее множество диффеоморфизма f .

*Работа подготовлена в ходе проведения исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы “Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)” в 2021–2022 гг., а также при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931).

Диффеоморфизм f называется диффеоморфизмом Морса–Смейла, если множество Ω_f конечно и гиперболично и многообразия W_p^s, W_q^u пересекаются трансверсально для любых периодических точек $p, q \in \Omega_f$. Диффеоморфизм Морса–Смейла f называется градиентноподобным, если из условия $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$ для различных точек $p, q \in \Omega_f$ следует, что $\dim W_p^u < \dim W_q^u$.

Если p, q – различные периодические седловые точки диффеоморфизма f , для которых $W_q^s \cap W_p^u \neq \emptyset$, то пересечение $W_q^s \cap W_p^u$ называется гетероклиническим. В случае $\dim W_q^s \cap W_p^u = 0$ пересечение $W_q^s \cap W_p^u$ является счетным множеством и каждая точка этого множества называется гетероклинической точкой, а орбита гетероклинической точки называется гетероклинической орбитой.

Назовем гетероклиническим множеством диффеоморфизма f множество всех его гетероклинических точек.

Пусть $n = 2$, $f: M^2 \rightarrow M^2$ – диффеоморфизм Морса–Смейла и p – его седловая периодическая точка. Обозначим через $W_p^{\nu,i}$, $i \in \{1, 2\}$, $\nu \in \{u, s\}$, компоненту связности множества $W_p^{\nu} \setminus \{p\}$. Гетероклиническое множество диффеоморфизма f называется ориентируемым, если для каждой пары седловых периодических точек p, q и любых $i, j \in \{1, 2\}$, для которых $W_p^{u,j} \cap W_q^{s,i} \neq \emptyset$, индекс пересечения кривых $W_p^{u,j}$ и $W_q^{s,i}$, один и тот же в любой точке $z \in W_p^{u,j} \cap W_q^{s,i}$.

Обозначим через $h_\varepsilon(z): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцию, заданную формулой

$$h_\varepsilon(z) := \begin{cases} k + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg}(\pi z) \right), & z \in \left(k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2} \right) \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ k + \frac{1}{2}, & z = k + \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

где $\varepsilon \in (-1, 1)$.

Рассмотрим диффеоморфизмы M_ε и L_ε двумерного тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, зависящие от параметра $\varepsilon \in (-1, 1)$ и заданные формулами

$$M_\varepsilon: \begin{cases} \bar{x} = h_\varepsilon(x) \pmod{1}, \\ \bar{y} = h_\varepsilon(y) \pmod{1}, \end{cases} \quad L_\varepsilon: \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{2} h_\varepsilon(2x) \pmod{1}, \\ \bar{y} = h_\varepsilon(y) \pmod{1}. \end{cases}$$

При $\varepsilon = 0$ отображения $M_\varepsilon, L_\varepsilon$ являются тождественными, а при $\varepsilon \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ представляют собой градиентноподобные диффеоморфизмы.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Gl}(2, \mathbb{Z})$, т.е. A – целочисленная квадратная матрица второго порядка и $\det A = \pm 1$. Тогда отображение $\hat{A}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$\hat{A}: \begin{cases} \bar{x} = ax + by \pmod{1}, \\ \bar{y} = cx + dy \pmod{1}, \end{cases}$$

называется алгебраическим автоморфизмом двумерного тора.

Если собственные значения матрицы $A \in \operatorname{Gl}(2, \mathbb{Z})$ не равны по модулю единице, то алгебраический автоморфизм \hat{A} называется гиперболическим. В противном случае автоморфизм \hat{A} называется негиперболическим.

Следуя работам [1, Lemma 3] и [2, разд. 2], негиперболические алгебраические автоморфизмы двумерного тора классифицируем следующим образом.

Предложение. *Каждый класс сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора посредством алгебраического автоморфизма задается в точности одной из следующих матриц:*

$$A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Отличный от тождественного гомеоморфизм f замкнутой ориентируемой поверхности называется периодическим, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = \text{id}$. Наименьшее из таких n называется периодом f .

Обозначим через $\text{Per}_f(z)$ период точки $z \in M^2$ относительно f . Пусть f — гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности M^2 периода n . Положим $\mathcal{B}_f = \{z \in M^2 \mid \text{Per}_f(z) < n\}$.

Пусть $f_{\varepsilon, A} = M_\varepsilon \circ \widehat{A}$, $g_{\varepsilon, A} = L_\varepsilon \circ \widehat{A}$, где \widehat{A} — автоморфизм двумерного тора, индуцированный матрицей $A \in \text{Gl}(2, \mathbb{Z})$.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Тогда верны следующие утверждения:*

- (1) *отображения $f_{\varepsilon, A_2(0)}$, f_{ε, A_5} являются сохраняющим ориентацию градиентноподобными диффеоморфизмами и $\Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}} = \mathcal{B}_{\widehat{A}_2(0)}$, $\Omega_{f_{\varepsilon, A_5}} = \mathcal{B}_{\widehat{A}_5}$;*
- (2) *отображение f_{ε, A_3} является меняющим ориентацию градиентноподобным диффеоморфизмом и $\Omega_{f_{\varepsilon, A_3}} \subset \mathcal{B}_{\widehat{A}_3}$;*
- (3) *множество $\Omega_{f_{\varepsilon, A}}$ совпадает с множеством Ω_{M_ε} и $\text{Per}_{f_{\varepsilon, A}}(z) = \text{Per}_{\widehat{A}}(z)$ для любого $z \in \Omega_{f_{\varepsilon, A}}$ и $A \in \{A_2(0), A_3, A_5\}$.*

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Тогда верны следующие утверждения:*

- (1) *при $t = 2l$ ($l \in \mathbb{N}$) диффеоморфизмы $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ и $f_{\varepsilon, A_2(m)}$ являются диффеоморфизмами Морса–Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством, состоящим из t гетероклинических орбит;*
- (2) *при $t = 2l - 1$ ($l \in \mathbb{N}$) диффеоморфизмы $g_{\varepsilon, A_1(m)}$ и $g_{\varepsilon, A_2(m)}$ являются диффеоморфизмами Морса–Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством, состоящим из $4t$ гетероклинических орбит.*

Список литературы

1. *Batterson S.* The dynamics of Morse–Smale diffeomorphisms on the torus // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1979. V. 256. P. 395–403.
2. *Сидоров С.В., Чилина Е.Е.* О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора // *Журн. СВМО.* 2021. Т. 23, № 3. С. 295–307.

УСТОЙЧИВОСТЬ АНЕВРИЗМЫ В МЕМБРАННОЙ ТРУБКЕ
С ЛОКАЛИЗОВАННОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ СТЕНКИ
С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ВНУТРИ ЖИДКОСТЬЮ, ИМЕЮЩЕЙ
НЕПОСТОЯННЫЙ ПРОФИЛЬ СКОРОСТИ*

А. Т. Ильичев, В. А. Шаргатов

*Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
Москва, Россия*

`ilichev@mi-ras.ru, shargatov@mail.ru`

Результаты, представленные в данном докладе, в значительной степени мотивированы анализом, предпринятым в [1, 2].

В отличие от предыдущих исследований на эту тему, в которых были выведены слабонелинейные модельные уравнения, описывающие течение жидкости в мембранных трубках, авторы работы [1] использовали вариационный метод, который приводит к полностью нелинейной формулировке в квазиодномерном и недиссипативном случае в рамках нелинейной системы уравнений в частных производных. Жидкость внутри трубки считалась идеальной. В [1] найдены два первых интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих бегущие волны. Было также показано, что уединенные волны конечной амплитуды, распространяющиеся в системе мембранная трубка-идеальная жидкость, могут быть определены в рамках простой численной процедуры.

Авторы работы [2] рассмотрели задачу (в формулировке [1]) о формировании локализованной выпуклости в “надутой” мембранной трубке в связи с формированием аневризмы на человеческих артериях.

Для того чтобы получить базовую систему уравнений, описывающую движение жидкости внутри трубки, используется осреднение по вертикальному сечению трубки, и, таким образом, все неизвестные функции задачи зависят только от продольного направления вдоль трубки. Сама трубка предполагается осесимметричной в течение всего времени движения. Описание свойств и изучение спектральной устойчивости локализованных (быстроубывающих) выпуклых решений, включая неподвижные (решения типа аневризмы), является предметом изучения в ряде работ. Спектральная устойчивость решений типа аневризмы изучалась в [3] в случае отсутствия жидкости внутри трубки (случай контролируемого давления). Бифуркационным параметром являлось инфляционное давление. Авторы показали, что все семейство решений типа аневризмы спектрально неустойчиво (т.е. инфинитезимальные возмущения аневризмы экспоненциально растут со временем).

В работе [4] изучена устойчивость семейства решений типа аневризмы в присутствии жидкости с нулевым средним потоком (неподвижной на бесконечности). Установлено, что решения типа аневризмы остаются неустойчивыми, хотя присутствие жидкости оказывает сильное стабилизирующее действие.

*Исследование А.Т. Ильичева выполнено при финансовой поддержке РФФ (проект 19-71-30017).

Авторы работы [5] предприняли анализ устойчивости решений типа аневризмы в случае присутствия среднего потока и показали, что, если скорость движения жидкости на бесконечности достаточно велика, эти решения являются спектрально устойчивыми.

В [6] доказано, что для мембранных трубок с локализованной неоднородностью стенки (утоплением) для определенных упругих потенциалов при отсутствии жидкости внутри трубки (случай контролируемого давления) имеют место два семейства стоячих уединенных волн, при этом семейство волн с меньшей амплитудой, которая увеличивается при увеличении давления инфляции, спектрально устойчиво.

В [7] показано, что семейство бегущих уединенных волн устойчиво, если скорость распространения этих волн больше некоторого критического значения. Устойчивость уединенных волн в мембранных трубках конечной длины рассмотрена в [8]. Обзор о спектральной устойчивости слабо и сильно нелинейных неподвижных и бегущих волн предпринят в [9] (см. также ссылки там).

Во всех цитированных работах жидкость считалась идеальной и профиль скоростей оставался постоянным в каждом вертикальном сечении трубки. В то же время более детальное изучение движения крови требует учесть ее неньютоновские свойства. Следовательно, чтобы ожидать более или менее достоверных результатов, характеризующих течение крови в сосудах, следует описывать кровь при помощи модели неньютоновской жидкости. В связи с этим используется полиномиальный закон вязкого трения для неньютоновской жидкости с постоянной вязкостью. Следует отметить, что мы интересуемся только образованием аневризмы, а не ее дальнейшей эволюцией. При этом предполагается, что в процессе формирования аневризмы вязкость жидкости внутри трубки не играет существенной роли, хотя профиль скорости непостоянен вдоль вертикального сечения трубки, так как предполагается выполненным условие прилипания на ее стенках. Вязкость играет существенную роль при дальнейшем развитии аневризмы. В частности, роль сдвигового напряжения на стенке сосуда является определяющей в этом процессе (см., например, [10]). Тем не менее мы здесь не интересуемся процессом дальнейшего развития аневризмы, моделирование которого выходит за рамки теории упругости.

В данном докладе анализируется устойчивость семейства стоячих локализованных волн возвышения уровня (аневризм) в заполненной идеальной жидкостью упругой трубке с локализованным утонением стенки и упругим потенциалом, характерным для биологического материала человеческих сосудов. Задача нахождения неустойчивого дискретного спектра в правой комплексной полуплоскости спектрального параметра Ω^+ эквивалентна определению нулей функции Эванса, локализованных в Ω^+ . Для подсчета числа этих нулей, следуя [11], необходимо вычислить функцию Эванса на некотором контуре, включающем интервал мнимой оси в комплексной плоскости спектрального параметра, и затем использовать принцип аргумента из комплексного анализа.

Список литературы

1. *Epstein M., Jonhston C.* On the exact speed and amplitude of solitary waves in fluid-filled elastic tubes // Proc. R. Soc. Lond. A. 2001. V. 457. P. 1195–1213.
2. *Fu Y.B., Pearce S.P., Liu K.K.* Post-bifurcation analysis of a thin-walled hyperelastic tube under inflation // Int. J. Nonlinear Mech. 2008. V. 43. P. 697–706.

3. *Pearce S.P., Fu Y.B.* Characterisation and stability of localised bulging/necking in inflated membrane tubes // *IMA J. Appl. Math.* 2010. V. 75. P. 581–602.
4. *Il'ichev A.T., Fu Y.B.* Stability of aneurysm solutions in a fluid-filled elastic membrane tube // *Acta mech. Sinica.* 2012. V. 28. P. 1209–1218.
5. *Fu Y.B., Il'ichev A.T.* Localized standing waves in a hyperelastic membrane tube and their stabilization by a mean flow // *Math. Mech. Solids.* 2015. V. 20. P. 1198–1214.
6. *Il'ichev A.T., Fu Y.B.* Stability of an inflated hyperelastic membrane tube with localized wall thinning // *Int. J. Eng. Sci.* 2014. V. 80. P. 53–61.
7. *Il'ichev A.T., Shargatov V.A., Fu Y.B.* Characterization and dynamical stability of fully nonlinear strain solitary waves in a fluid-filled hyperelastic membrane tube // *Acta mech.* 2020. V. 231. P. 4095–4110.
8. *Fu Y.B., Xie Y.X.* Stability of localized bulging in inflated membrane tubes under volume control // *Int. J. Eng. Sci.* 2010. V. 48. P. 1242–1252.
9. *Ильичев А.Т.* Динамика и спектральная устойчивость солитоноподобных структур в мембранных трубках с жидкостью // *УМН.* 2020. Т. 75. С. 59–100.
10. *Martufi G., Gasser T.C., Appoo J.J., Martino E.S.* Mechano-biology in the thoracic aortic aneurysm: a review and case study // *Biomech. Model. Mechanobiol.* 2014. V. 13. P. 917–928.
11. *Pego R.L., Smereka P., Weinstein M.I.* Oscillatory instability of travelling waves for KdV–Burgers equation // *Physica D.* 1993. V. 67. P. 45–65.

II-STRATEGY FOR INERTIALLY MOVING OBJECTS UNDER INTEGRAL-GEOMETRIC CONSTRAINTS

Bahodirjon Juraev, Adahambek Akbarov

Andijon State University, Andijon, Uzbekistan

jbahodirjon@bk.ru, akbarov.adhambek@bk.ru

We have considered the pursuit–evasion problems in a differential game with one pursuer and one evader such that each of them has inertial motion. The control of the pursuer is subject to an integral constraint, and that of the evader is subject to a geometric constraint. In the pursuit problem, we propose the parallel approach strategy, which is known as the II-strategy, for the pursuer, and we define a sufficient solvability condition of pursuit. In the evasion problem, a special admissible strategy is implemented for the evader, and a sufficient solvability condition of evasion is obtained. Besides, the lower boundary of the distance between the pursuer and evader is shown.

Suppose that in \mathbb{R}^n a controlled player P , called the pursuer, chases another player E , called the evader. Denote by x the position of the pursuer and by y the position of the evader in \mathbb{R}^n . In the present work, we consider the pursuit–evasion problems when the players move according to the differential equations with initial values

$$P: \ddot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad (1)$$

$$E: \ddot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad (2)$$

respectively, where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; x_0, y_0 are the initial positions of the players, and x_1, y_1 are their initial velocities, respectively. It is assumed that $x_0 \neq y_0$, $x_1 = y_1$. The control parameter u is the acceleration vector, and it is considered to be a measurable function $u(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ subject to the following integral constraint (in short, the I -constraint) [2, 4, 6, 7]:

$$\int_0^t (t-s)|u(s)|^2 ds \leq \rho_0 \quad \text{for almost every } t \geq 0, \quad (3)$$

where ρ_0 is a given positive number which expresses the amount of the pursuer's energy at time $t = 0$. We denote by \mathbb{U}_I the class of all control functions $u(\cdot)$ that satisfy the constraint (3).

Similarly, the control parameter v is the acceleration vector, and it is a measurable function $v(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ subject to the geometric constraint (in short, the G -constraint) of the form [1, 3]

$$|v(t)| \leq \beta \quad \text{for almost every } t \geq 0, \quad (4)$$

where β is a given positive number which expresses the maximal value of the evader's acceleration. We denote by \mathbb{V}_G the class of all control functions $v(\cdot)$ that satisfy the constraint (4).

Definition 1. By equations (1), (2), any triplets $(x_0, x_1, u(\cdot))$, where $u(\cdot) \in \mathbb{U}_I$, and $(y_0, y_1, v(\cdot))$ with $v(\cdot) \in \mathbb{V}_G$ generate the trajectories

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \int_0^t (t-s)u(s) ds, \quad y(t) = y_0 + y_1 t + \int_0^t (t-s)v(s) ds,$$

respectively. In this case, $x(t)$ is called the pursuer's motion trajectory and $y(t)$ is called the evader's motion trajectory.

Definition 2. For each pair $(\rho_0, u(\cdot))$, $u(\cdot) \in \mathbb{U}_I$, we call the scalar function [5, 6]

$$\rho(t) = \rho_0 - \int_0^t (t-s)|u(s)|^2 ds, \quad \rho(0) = \rho_0,$$

a residual resource of the pursuer at the time t .

Definition 3. In the pursuit game (1)–(4), the function

$$\mathbf{u}(v) = v - \lambda(v)\xi_0 \quad (5)$$

is called the Π_{IG} -strategy of the pursuer, where

$$\lambda(v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \frac{\rho_0}{2|z_0|} + \sqrt{\left(\langle v, \xi_0 \rangle + \frac{\rho_0}{2|z_0|} \right)^2 - |v|^2}, \quad \xi_0 = \frac{z_0}{|z_0|},$$

and $\langle v, \xi_0 \rangle$ denotes the inner product of the vectors v and ξ_0 in \mathbb{R}^n . Here $\lambda_{IG}(v)$ is usually called the resolving function.

Proposition. *If $\rho_0 \geq 4\beta|z_0|$, then the function $\lambda_{IG}(v)$ is defined, continuous and non-negative for all control functions $v(\cdot)$ that satisfy (4).*

Definition 4. We say that the strategy $\mathbf{u}(v)$ guarantees capture at time $T(\mathbf{u})$ if at some time $t_* \in [0, T(\mathbf{u})]$ the equality $x(t_*) = y(t_*)$ is satisfied for any control

$v(\cdot) \in \mathbb{V}_G$ of the evader, where $x(t)$ and $y(t)$ are the solutions of the initial value problems

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \mathbf{u}(v(t)), & x(0) &= x_0, & \dot{x}(0) &= x_1, \\ \ddot{y} &= v(t), & y(0) &= y_0, & \dot{y}(0) &= y_1,\end{aligned}$$

where $t \geq 0$.

Theorem 1. *If $\rho_0 \geq 4\beta|z_0|$ is satisfied in the pursuit game (1)–(4), then the Π_{IG} -strategy (5) guarantees capture in the time interval $[0, T_{IG}]$, where*

$$T_{IG} = \sqrt{\frac{2|z_0|}{\theta}}, \quad \theta = \frac{\rho_0}{2|z_0|} - \beta + \sqrt{\frac{\rho_0^2}{4|z_0|^2} - \frac{\rho_0\beta}{|z_0|}}.$$

Definition 5. In the evasion game (1)–(4), we call the function

$$\mathbf{v}(t) = -\beta\xi_0 \tag{6}$$

the strategy of the evader.

Definition 6. We say that the strategy $\mathbf{v}(t)$ guarantees evasion on $[0, +\infty)$ if for any control $u(\cdot) \in \mathbb{U}_I$ of the pursuer the condition $x(t) \neq y(t)$ holds for all $t \in [0, +\infty)$, where $x(t)$ and $y(t)$ are the solutions of the initial value problems

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= u(t), & x(0) &= x_0, & \dot{x}(0) &= x_1, \\ \ddot{y} &= \mathbf{v}(t), & y(0) &= y_0, & \dot{y}(0) &= y_1,\end{aligned}$$

where $t \geq 0$.

Theorem 2. *If $\rho_0 < 4\beta|z_0|$ is valid in the evasion game (1)–(4), then the strategy (6) guarantees evasion on the time interval $[0, +\infty)$ and the following estimation holds for the distance between the players:*

$$|z(t)| \geq |z_0| - \frac{\rho_0}{4\beta}.$$

References

1. Isaacs R. Differential games. New York: J. Wiley and Sons, 1965.
2. Pontryagin L.S. Selected Works. Moscow: MAKS Press, 2004 (in Russian).
3. Petrosjan L.A. Differential games of pursuit. Singapore: World Scientific, 1993. (Series on optimization).
4. Grigorenko N.L. Mathematical methods of control for several dynamic processes. Moscow: Moscow State Univ., 1990 (in Russian).
5. Azamov A.A., Samatov B.T. The II-strategy: Analogies and applications // Fourth Int. Conf. Game Theory and Management. St. Petersburg, 2010. P. 33–47.
6. Samatov B.T. The pursuit–evasion problem under integral-geometric constraints on pursuer controls // Autom. Remote Control. 2013. V. 74, No. 7. P. 1072–1081.
7. Ibragimov G.I., Salimi M. Pursuit–evasion differential game with many inertial players // Math. Probl. Eng. 2009. V. 65, No. 6. P. 1–15.

KOWALEWSKI TOP AND COMPLEX LIE ALGEBRAS

V. Jurdjević

Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada

`jurdj@math.utoronto.ca`

In the theory of integrable Hamiltonian systems, the work of S. Kowalewski in her seminal paper on the motions of a rigid body around its fixed point under the influence of gravity stands out as the most enigmatic and most original contribution to the theory of integrable systems [6]. Not only was the integral of motion introduced in this paper enigmatic, in the sense that it did not correspond to any apparent symmetries of the body, but also the approach taken in the paper that led to the discovery of this integral, in which all the variables were treated as complex quantities, seemed equally enigmatic, in the sense that it did not lend itself to any physical justifications.

This lecture is based on my recent paper [5], in which it was shown that there is a natural affine-quadratic Hamiltonian \mathcal{H} on $\mathfrak{sp}(4; \mathbb{C})$ that unravels the mysteries encountered in Kowalewski's famous paper. It is a follow-up of my earlier publications in which Kowalewski's top is seen indirectly through the Hamiltonian system associated with Kirchhoff's model for the equilibrium configurations of an elastic rod [3] and the subsequent extensions of this system to $\mathfrak{so}(4; \mathbb{C})$ presented in [2].

We will show that the enigmatic conditions of Kowalewski are both necessary and sufficient for the existence of an isospectral representation $\frac{dL(\lambda)}{dt} = [M(\lambda); L(\lambda)]$ of the above Hamiltonian \mathcal{H} with a spectral parameter λ . This representation then yields a crucial spectral invariant that naturally accounts for all the integrals of motion known as Kowalewski type integrals in the literature on the top [1]. We will also show that the Kowalewski's mysterious complex variables are naturally identified with complex quaternions and the representation of $\mathfrak{so}(4; \mathbb{C})$ as the product $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$.

References

1. *Dragović V., Kukić K.* Systems of Kowalevski type and discriminantly separable polynomials // Regular Chaotic Dyn. 2014. V. 19, No. 2. P. 162–184.
2. *Jurdjević V.* Integrable Hamiltonian systems on complex Lie groups // Mem. Amer. Math. Soc. 2005. V. 178, No. 838.
3. *Jurdjević V.* Integrable Hamiltonian systems on Lie groups: Kowalevski type // Ann. Math. 1999. V. 150. P. 605–644.
4. *Jurdjević V.* Affine-quadratic problems on Lie groups: Tops and integrable systems // J. Lie Theory. 2020. V. 30, No. 2. P. 425–444.
5. *Jurdjević V.* Kowalevski top and complex Lie algebras // Anal. Math. Phys. 2021. V. 11. Pap. 173.
6. *Kowalevski S.* Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixé // Acta math. 1889. V. 12. P. 177–232.

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

А. И. Калинин, Л. И. Лавринович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

kalininai@bsu.by, lavrinovich@bsu.by

В рамках математической теории оптимальных процессов задачам оптимизации квазилинейных динамических систем, содержащих малые параметры при нелинейностях, уделяется значительное внимание. Интерес к ним вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные по существу нелинейные задачи сводятся к сравнительно несложной коррекции решений задач оптимизации линейных динамических систем. Настоящий доклад посвящен построению асимптотических приближений к решению задачи оптимизации переходного процесса в квазилинейной системе. Критерий качества в этой задаче представляет собой линейную комбинацию энергетических затрат и длительности процесса. Заметим, что если учесть только энергетические затраты, то задача, как правило, не будет иметь решения, а на минимизирующей последовательности длительность процесса будет стремиться к бесконечности.

В классе r -мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, с кусочно непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x, t) + B(t)u, x(t_0) = x_0 \neq 0, \quad (1)$$

$$x(t_1) = 0, \quad J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (1 + x^T Q(t)x + u^T P(t)u) dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

где μ — малый (по модулю) параметр, t_0 — заданный момент времени, t_1 — нефиксированный конечный момент времени ($t_1 > t_0$), x есть n -вектор, $f(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$, — нелинейная вектор-функция, $Q(t)$ — неотрицательно определенная симметрическая матрица, а $P(t)$ — положительно определенная симметрическая матрица для всех $t \geq t_0$.

Предположение 1. Элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $\partial f(x, t)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$, принадлежат классу C^p , $p \geq 1$.

Определение. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_0, t_1^{(N)}(\mu)]$, с кусочно непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка ($N = 0, 1, 2, \dots$) в задаче (1), (2), если оно переводит систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества $J(u)$ от оптимального управления на величину того же порядка малости.

В докладе предлагается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N ($N < p$) можно построить асимптотически субоптимальное управление N -го порядка в рассматриваемой задаче. Алгоритм опирается на конструктивное доказательство теоремы о существовании при сделанных предположениях гладкого оптимального управления и его асимптотических свойствах. Его суть состоит в построении полиномов Тейлора определяющих элементов оптимального управления. Такими элементами в данной задаче являются конечный момент времени,

а также начальные значения сопряженных переменных (в момент времени t_0), которые в силу принципа максимума [1] соответствуют оптимальному управлению. Эти определяющие элементы как функции малого параметра принадлежат классу C^p .

Вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений начинаются с решения базовой задачи, которая формально получается из исходной при $\mu = 0$ и в отличие от нее является задачей оптимизации линейной системы.

Предположение 2. Динамическая система в базовой задаче является вполне управляемой [2].

При сделанном предположении в базовой задаче существует единственное оптимальное управление, которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [1] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть t_1^0 — оптимальный конечный момент, $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T^0 = [t_0, t_1^0]$, — оптимальные управление и траектория в базовой задаче; тогда существует такое решение $\psi^0(t)$, $t \in T^0$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi + Q(t)x^0(t),$$

что выполняются условия

$$\psi^{0T}(t)B^T(t)u^0(t) - u^{0T}(t)P(t)u^0(t) = \max_{u \in \mathbb{R}^r} (\psi^{0T}(t)B^T(t)u - u^T P(t)u), \quad t \in T^0, \quad (3)$$

$$\psi^{0T}(t_1^0)B^T(t_1^0)u^0(t_1^0) - u^{0T}(t_1^0)P(t_1^0)u(t_1^0) = 1.$$

Из условия (3) непосредственно следует

$$u^0(t) = \frac{1}{2}P^{-1}(t)B^T(t)\psi^0(t).$$

Вычислительная процедура при построении асимптотически субоптимальных управлений, помимо решения базовой задачи, включает в себя интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Заметим, что при сделанных предположениях асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка является решение базовой задачи.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

ИЕРАРХИЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ*

А. В. Калинин, А. А. Тюхтина

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

avk@mm.unn.ru, kalinmm@yandex.ru

В работе обсуждаются различные квазистационарные приближения для системы уравнений Максвелла с учетом характерных масштабов пространственной и временной неоднородностей [1, 2]. Рассматриваются замкнутые модели электрофизических процессов в атмосфере Земли [3]. Приводятся результаты о корректности постановок соответствующих начально-краевых задач.

Список литературы

1. *Kalinin A.V., Tyukhtina A.A.* The Darwin approximation for the system of Maxwell's equations in inhomogeneous conducting media // *Comput. Math. Math. Phys.* 2020. V. 8. P. 121–134.
2. *Kalinin A.V., Tyukhtina A.A.* Hierarchy of models of quasi-stationary electromagnetic fields // *Mathematical modeling and supercomputer technologies: 20th Int. Conf., MMST 2020, Nizhny Novgorod, Russia, November 23–27, 2020. Revised selected papers.* Cham: Springer, 2021. P. 77–92. (*Commun. Comput. Inf. Sci.*; V. 1413).
3. *Мареев Е.А.* Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // *УФН.* 2010. Т. 180, №5. С. 527–534.

STABILITY OF LINEAR CONTROL SYSTEMS WITH FREQUENT SWITCHES

Rinat Kamalov^a, Vladimir Yu. Protasov^{b,c}

^a*MIPT, Dolgoprudny, Russia*

^b*University of L'Aquila, Italy*

^c*Moscow State University, Russia*

rinat020398god@yandex.ru, vladimir.protasov@univaq.it

We consider the linear switching system of the form

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

where $A(t) \in \mathcal{A}$ for every $t \in [0, +\infty)$. Thus, A is a matrix control function (*switching law*) taking values on the control set \mathcal{A} . The control set is an arbitrary compact set of $d \times d$ matrices and $A(\cdot)$ is an arbitrary measurable function. The system is called stable if all its trajectories $x(t)$ tend to zero as $t \rightarrow +\infty$. The stability plays a crucial role in many problems of electronic engineering, robotics, etc. [1]. It was studied in

*Работа поддержана научно-образовательным математическим центром “Математика технологий будущего” (соглашение №075-02-2022-883).

the literature in great detail (see [2] and references therein). We consider the stability problem under the restriction on the periods of time between switches. The minimal switching time (dwell time) was studied in several works (see the latest one [3]). It reflects the natural situation when the change of the regime of the system cannot be done in one moment and it requires some time. The methods of studying the minimal dwell time, however, are not applicable to the opposite situation, when the time between switches is bounded above. This condition is inspired by the practical needs when the system cannot be kept in one regime for a long time (for example, because of overheating, wearing out, etc.). Thus, we address the stability of the system (1) under the assumption that the time distance between two consecutive switches is between m and M (two given numbers). We call such systems constrained.

The solution of this problem is based on modifying the concept of the Lyapunov function. It can naturally be formulated in terms of graphs. For the sake of simplicity we consider the case of two regimes $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$. We consider a directed multigraph G with vertices g_1 and g_2 , where each vertex g_i is associated to the linear space L_i isomorphic to \mathbb{R}^d . From the vertex g_1 , there is an edge labelled by the matrix $B_2 = e^{A_2 m}$ to the vertex g_2 . Respectively, from the vertex g_2 , there is an edge labelled with $B_1 = e^{A_1 m}$ to g_1 . Moreover, each vertex g_i has loops labelled with $e^{A_i t} \forall t \in [0, M - m]$. Each switching law of the restricted system can be interpreted as a walk along this graph.

Definition 1. The Lyapunov exponent of system (1) is defined as

$$\sigma(\mathcal{A}, m, M) = \inf \left\{ \beta \in \mathbb{R} \mid \exists C > 0: \|x(t)\| \leq C e^{\beta t} \|x(0)\| \right\}$$

for all trajectories $x(t)$ of the restricted system (1).

Definition 2. If every space L_i on the graph G is equipped with a norm $\|\cdot\|_i$, then the collection of norms $\|\cdot\|_i$, $i = \{1, 2\}$, is called a multinorm. The norm of an operator $A: L_i \rightarrow L_j$ is defined as $\|A\| = \sup_{x \in L_i, \|x\|_i=1} \|Ax\|_j$.

Denote by \mathcal{B}_i the unit ball of the norm $\|\cdot\|_i$, $i = \{1, 2\}$, and by \mathcal{S}_i the corresponding unit sphere.

Definition 3. A multinorm $f = (\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2)$ is Lyapunov if for each $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$, and for every $x \in \mathcal{S}_i$, the curve $e^{tA_j} B_j x$, $t \in [0, M - m]$, is strictly inside \mathcal{S} .

Definition 4. A multinorm $f = (\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2)$ is invariant if for each $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$, and for every $x \in \mathcal{S}_i$, the curve $e^{tA_j} B_j x$, $t \in [0, M - m]$, is inside \mathcal{S}_j and at least one of its points is on the surface.

Theorem 1. *The restricted system is stable if and only if it possesses a Lyapunov multinorm.*

The system is called irreducible if its matrices do not share a nontrivial invariant subspace.

Theorem 2. *Every irreducible restricted system with $\sigma(\mathcal{A}, m, M) = 0$ possesses an invariant multinorm.*

We present an algorithm for evaluating the Lyapunov exponent of the restricted system (1) and show numerical examples.

References

1. Liberzon D. Switching in systems and control. Boston: Birkhäuser, 2003.
2. Geromel J.C., Colaneri P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems // SIAM J. Control Optim. 2006. V. 45. P. 1915–1930.
3. Cicone A., Guglielmi N., and Protasov V.Y., Linear switched dynamical systems on graphs // Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 2018. V. 29. P. 165–186.
4. Chitour Y., Guglielmi N., Protasov V.Yu., Sigalotti M. Switching systems with dwell time: computing the maximal Lyapunov exponent // Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 2021. V. 40. Pap. 101021.

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ РАЗРЕШИМОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ СБЛИЖЕНИЯ “К МОМЕНТУ” С ВОГНУТЫМ ЦЕЛЕВЫМ МНОЖЕСТВОМ

Л. В. Камнева

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
kamneva@imm.uran.ru

Постановка задачи. Пусть динамика конфликтно управляемой системы имеет вид

$$\dot{x} = Ax + u + v, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (1)$$

Здесь $t \in [0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$; A есть $(n \times n)$ -матрица, $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые компакты; $M \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое целевое множество; u и v — управления первого и второго игроков соответственно.

Множество разрешимости $\tilde{G}_\vartheta(M)$ к моменту ϑ образовано всеми начальными точками $x_0 \in \mathbb{R}^n$, из которых первый игрок, используя класс позиционных стратегий [1] и соответствующее определение конструктивных траекторий, может привести систему (1) на множество M не позднее момента ϑ .

Для $N \in \mathbb{N}$ определим шаг $\Delta := \vartheta/N$ для следующей попятной процедуры. Рассмотрим одношаговый оператор $\tilde{W}_\Delta(\cdot)$ на множествах из \mathbb{R}^n и определим последовательность $\{\tilde{W}_i\}_{i=0}^N$ с начальным множеством M :

$$\tilde{W}_0 = M, \quad \tilde{W}_1 = \tilde{W}_\Delta(M), \quad \tilde{W}_2 = \tilde{W}_\Delta(\tilde{W}_1), \quad \dots, \quad \tilde{W}_N = \tilde{W}_\Delta(\tilde{W}_{N-1}).$$

Общая формула имеет вид $\tilde{W}_i = \tilde{W}_\Delta(\tilde{W}_{i-1})$, $i = 1, \dots, N$.

Задача состоит в определении одношагового оператора \tilde{W}_Δ таким образом, чтобы обеспечить близость построений попятной процедуры к множеству разрешимости $\tilde{G}_\vartheta(M)$.

Свойства одношагового оператора \tilde{W}_Δ . Для замкнутого множества $Z \subset \mathbb{R}^n$, $r > 0$, и $z_0 \in \mathbb{R}^n$ будем использовать обозначения

$$B(0, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq r\},$$
$$Z + B(0, r) := \{z + y : z \in Z, y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leq r\},$$

$$Z^c := \overline{\mathbb{R}^n \setminus Z}, \quad \rho(z_0, Z) := \min\{\|z_0 - z\| : z \in Z\}.$$

Сформулируем следующие свойства одношагового оператора $Z \mapsto \tilde{W}_\Delta(Z)$ для замкнутого множества $Z \subset \mathbb{R}^n$ и $\Delta > 0$. Здесь $\gamma_A(\Delta) := \|A^2\| e^{\|A\|\Delta}$.

$\tilde{W}1$ (u -стабильность “к моменту” на шаге). Для любых $w_0 \in \tilde{W}_\Delta(Z)$ и $v_* \in Q$ найдутся такие $u_* \in P$ и $s \in [0, \Delta]$, что

$$\rho(w_s, Z) \leq \|w_0\| \gamma_A(\Delta) \Delta^2, \quad w_s := w_0 + s(Aw_0 + u_* + v_*).$$

$\tilde{W}2$ (v -стабильность “к моменту” на шаге). Для любых $w_0 \in \tilde{W}_\Delta^c(Z)$ и $u_* \in P$ найдется такое $v_* \in Q$, что для любого $s \in [0, \Delta]$ имеем

$$\rho(w_s, Z^c) \leq \|w_0\| \gamma_A(\Delta) \Delta^2, \quad w_s := w_0 + s(Aw_0 + u_* + v_*).$$

$\tilde{W}3$. Для $Z \subset Z^*$ имеем $\tilde{W}_\Delta(Z) \subset \tilde{W}_\Delta(Z^*)$.

$\tilde{W}4$. Для $\alpha > 0$ и $Z_\alpha := Z + B(0, \alpha)$ имеем

$$\tilde{W}_\Delta(Z_\alpha) \subset \tilde{W}_\Delta(Z) + B(0, \alpha e^{\|A\|\Delta}).$$

$\tilde{W}5$. Существует такая неубывающая функция $\Delta \mapsto \kappa(\Delta)$, что

$$\kappa(\Delta) \geq 0, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \kappa(\Delta) = 0, \quad \tilde{W}_\Delta^c(Z) \subset Z^c + B(0, \kappa(\Delta)\Delta).$$

Основной результат. Свойства $\tilde{W}1$ – $\tilde{W}5$ одношагового оператора \tilde{W}_Δ обеспечивают близость построений попятной процедуры к множеству разрешимости. Доказательство этого результата существенно использует идеи работы [2].

Рассмотрим случай вогнутого множества M , т.е. случай, когда множество $\mathbb{R}^n \setminus M$ выпукло. Тогда свойствам $\tilde{W}1$ – $\tilde{W}5$ удовлетворяет оператор $\tilde{W}_\Delta(Z) := M \cup (e^{-A\Delta} \cdot \mathcal{W}_\Delta(Z))$, где e^A — матричная экспонента, множество $\mathcal{W}_\Delta(Z)$ определяется как множество разрешимости во вспомогательной задаче сближения в момент Δ [1] с терминальным множеством Z и динамикой простых движений $\dot{x} = u + v$, $u \in P$, $v \in Q$. Этот результат позволяет доказать вогнутость множества разрешимости $\tilde{G}_\vartheta(M) \neq \mathbb{R}^n$ для вогнутого целевого множества M .

Список литературы

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Турова В.Л. Построение множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре второго порядка с нефиксированным временем окончания // Управление с гарантированным результатом: Сб. науч. тр. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1987. С. 92–112.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

А. А. Кащенко

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль, Россия*

`a.kashchenko@uniyar.ac.ru`

Мы изучаем нелокальную динамику модели N ($N \geq 2$) идентичных осцилляторов с нелинейной запаздывающей обратной связью

$$\begin{aligned} \dot{u}_j + u_j &= \lambda F(u_j(t - T)) + \gamma(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) & (j = 1, \dots, N), \\ u_0 &= u_N, & u_{N+1} = u_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u_j — действительные функции, F — кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $F(x) \equiv 0$ при $|x| \geq p$ (где $p > 0$ — некоторая константа), запаздывание T — положительная постоянная, ненулевой параметр связи γ удовлетворяет неравенству $\gamma > -1/4$ (это условие необходимо для того, чтобы система (1) была диссипативной).

Ключевое предположение состоит в том, что положительный параметр λ является достаточно большим ($\lambda \gg 1$).

Мы изучаем нелокальную динамику модели (1). С помощью специального метода большого параметра мы строим асимптотику релаксационных режимов этой модели.

Мы выбираем специальное множество начальных условий в фазовом пространстве $C([-T, 0]; \mathbb{R}^N)$ и строим асимптотику всех решений системы (1) с начальными условиями из этого множества. По асимптотике мы получаем конечномерное отображение Пуанкаре, которое позволяет уточнить значения параметров, фигурирующих в формулах для асимптотики решения.

Доказано, что при положительных значениях параметра γ начиная с некоторого момента времени все осцилляторы синхронизируются. В случае отрицательной связи между осцилляторами — $-1/4 < \gamma < 0$ и четного числа осцилляторов показано, что синхронизируются все осцилляторы с четными номерами и все осцилляторы с нечетными номерами; а в случае нечетного числа осцилляторов показано, что все N параметров, содержащихся в отображении Пуанкаре, находятся вблизи одного и того же двумерного подпространства исходного N -мерного пространства на всех итерациях отображения.

Список литературы

1. *Kashchenko A. A.* Dependence of the dynamics of a model of coupled oscillators on the number of oscillators // *Dokl. Math.* 2021. V. 104, No. 3. P. 355–359.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 21-71-30011).

ЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

И. С. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия

iliyask@uniyar.ac.ru

Рассмотрим сингулярно возмущенное уравнение второго порядка с запаздыванием

$$\varepsilon^2 \ddot{x} + \sigma(\varepsilon) \dot{x} + k(\varepsilon)x = f(x(t - \tau(x)), \dot{x}(t - \tau(x)), \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}$, f и $\tau \geq 0$ — достаточно гладкие функции. Пусть $f(0, 0) = 0$, тогда $x \equiv 0$ является состоянием равновесия. Рассмотрим некоторую малую (но не зависящую от ε) окрестность нуля. Пусть для всех x из этой окрестности $\tau(x)$ ограничена постоянной M : $0 \leq \tau(x) \leq M$.

Поставим задачу исследовать поведение решений уравнения (1) в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля в фазовом пространстве $C^2_{[-M, 0]}$ при достаточно малых ε .

Отметим, что уравнение (1) получается из уравнения с большим запаздыванием

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = g(x(t - T\tau(x)), \dot{x}(t - T\tau(x))), \quad T \gg 1.$$

Тогда $\varepsilon = T^{-1}$, $\sigma(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}a$, $k(\varepsilon) = b$, $f(x, y, \varepsilon) = g(x, \sqrt{\varepsilon}y)$.

В случае, когда запаздывание постоянно $\tau(x) \equiv T$, задача обсуждалась в [1], а в случае, когда дополнительно $f(x, y, \varepsilon) = f(x, \varepsilon)$, — в [2]. Некоторые результаты для случая, когда запаздывание зависит от искомой функции (state-dependent delay), изложены в [3].

В случае, когда все точки спектра линеаризованной задачи лежат слева от мнимой оси (и отделены от нее), при достаточно малых ε динамика тривиальна: все решения стремятся к нулю. Если при достаточно малых ε хотя бы одна точка спектра имеет положительную (и отделенную от нуля) вещественную часть, динамика становится нелокальной: в окрестности состояния равновесия нет устойчивых решений. Во всех остальных случаях существуют точки спектра, расположенные сколь угодно близко к мнимой оси. Наибольший интерес представляют ситуации, в которых количество таких точек сколь угодно велико. Будем говорить, что такие критические случаи имеют бесконечную размерность.

В критических случаях построены специальные нелинейные уравнения — нормальные и квазинормальные формы, которые не зависят от малого параметра либо зависят от него регулярно. Их решения определяют главные части асимптотического приближения решений уравнения (1).

Список литературы

1. Кащенко И.С. Локальная динамика дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием у первой производной // Мат. заметки. 2017. Т. 101, №2. С. 318–320.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 21-71-30011).

2. *Кащенко С.А.* Уравнение Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // ЖВМиМФ. 1998. Т. 38, №3. С. 457–465.
3. *Голубенец В.О., Кащенко И.С.* Локальная динамика сингулярно возмущенного уравнения второго порядка с запаздыванием, зависящим от состояния // Мат. заметки. 2022. Т. 111, №5. С. 795–799.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ*

С. А. Кащенко

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия*

email: kasch@uniyar.ac.ru

Рассматривается нелинейное сингулярно возмущенное уравнение с запаздыванием

$$\ddot{u} + a\dot{u} + bu = \lambda F(u(t - T)), \quad (1)$$

в котором параметры a , b и T положительны, а параметр λ является достаточно большим:

$$\lambda \gg 1. \quad (2)$$

Функция $F(u)$ является финитной, т.е. для некоторого $p > 0$ выполнено равенство

$$F(u) = \begin{cases} f(u) & \text{при } |u| \leq p, \\ 0 & \text{при } |u| > p. \end{cases} \quad (3)$$

Исследуем вопрос о динамических свойствах уравнения (1) при условиях (2) и (3).

Важную роль играет расположение корней уравнения

$$\mu^2 + a\mu + b = 0. \quad (4)$$

Динамика (1) в случаях вещественных и комплексных корней этого уравнения существенно различается, поэтому рассмотрим их отдельно.

1. Пусть корни μ_1 и μ_2 уравнения (4) вещественны и различны, т.е.

$$a^2 - 4b > 0, \quad (5)$$

и пусть $\mu_2 < \mu_1 < 0$. Положим $\int_0^T f(\pm p \exp(\mu_1 s)) ds = A_{\pm}$.

*Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886).

Теорема 1. Пусть $A_+ > 0$ ($A_- < 0$). Тогда при условиях (2) и (5) для всех достаточно больших λ уравнение (1) имеет устойчивое периодическое с периодом $T_0(\lambda)$ решение $u_0(t, \lambda)$, для которого на отрезке $[-T, 0]$ длины запаздывания верно асимптотическое равенство $u_0(t, \lambda) = p(1 + o(1)) \exp(\mu_1 t)$ ($u_0(t, \lambda) = -p(1 + o(1)) \exp(\mu_1 t)$).

Для $u_0(\lambda, t)$ можно получить асимптотические при $\lambda \rightarrow \infty$ разложения при всех t . Отметим лишь, что $\max_t |u_0(t, \lambda)| = O(\lambda)$, $T_0(\lambda) = (1 + o(1)) \ln \lambda$.

Теорема 2. Пусть $A_+ < 0$ ($A_- > 0$). Тогда при условиях (2) и (5) для всех достаточно больших λ уравнение (1) имеет устойчивое периодическое с периодом $T_0(\lambda)$ решение $u_0(t, \lambda)$, для которого на отрезке $[-T, 0]$ длины запаздывания верно асимптотическое равенство $u_0(t, \lambda) = p(1 + o(1)) \exp(\mu_1 t)$.

Здесь $T_0(\lambda) = (2 + o(1)) \ln \lambda$.

2. При условии $a^2 - 4b < 0$ динамические свойства (1) существенно сложнее. Остановимся на случае, когда $T\sqrt{4b - a^2} < \pi$. Введем в рассмотрение формальное отображение полуоси $(0, \infty)$ в себя

$$\bar{z} = (p_-(-p_+(z))^{1/2})^{1/2}, \quad (6)$$

в котором

$$p_{\pm}(z) = \left[z^2 \exp(-2aT) + (\omega^4 z^2)^{-1} \pm 2\omega^{-2} \exp(-aT) \cos(\omega T) \right] \exp(2a\psi_{\mp}), \quad (7)$$

где $\omega = \sqrt{4b - a^2}$, а через ψ_{\mp} обозначен принадлежащий интервалу $(-\pi/\omega, 0)$ корень уравнения

$$\operatorname{tg}(\omega\psi) = (z\omega)^2 \sin(\omega T) [(z\omega)^2 \cos(\omega T) \mp \exp(aT)]^{-1}.$$

Основной результат состоит в том, что динамика отображения (7) определяет при достаточно больших λ структуру аттрактора уравнения (1). Более точно: грубым установившимся траекториям (7) отвечает (при $\lambda \gg 1$) установившийся режим уравнения (1) той же структуры и той же устойчивости. Кроме этого, с помощью траектории z_n отображения (6) удастся восстановить асимптотику соответствующего решения (1).

Методика исследования состоит в следующем. Определим в фазовом пространстве $C_{[-T, 0]} \times \mathbb{R}^1$ уравнения (1) множество начальных функций $S(z)$, зависящих от некоторого параметра z , и будем строить асимптотику при $\lambda \rightarrow \infty$ решений с начальными условиями из $S(z)$. Затем специальным образом определим некоторый оператор последования Π , который функции из $S(z)$ ставит в соответствие (с помощью решения) функцию из $S(\bar{z})$. Как окажется, значение \bar{z} зависит в главном только от z , и, следовательно, динамика отображения (6) определяет структуру решений с начальными условиями из $S(z)$ исходного уравнения.

Итак, фиксируем произвольно $\delta \in (0, T)$ и введем в рассмотрение множество $S(z)$ по правилу

$$S(z) = \{(\varphi(s), \dot{\varphi}(0)), \varphi(s) \in C_{[-T, 0]}^1,$$

$$\varphi(s) = \lambda z \sin(\omega s) \exp(-as) \text{ при } s \in [-\delta, 0]; |\varphi(s)| > p \text{ при } s \in [-T, -\delta]\}.$$

Отметим, что δ может быть выбран сколь угодно малым, но не зависимым от λ .

Теорема 3. Пусть отображение (6) имеет грубый цикл $z_1, \dots, z_k, z_1, \dots$ периода k . Тогда при достаточно больших λ уравнение (1) имеет периодическое решение $x_k(t, \varphi)$ той же устойчивости, причем на некоторых отрезках длины T выполнено включение $x_k(s + \tau_j, \varphi) \in S(z_j)$.

При условии $T\sqrt{4b - a^2} > \pi$ исследование динамики исходного уравнения сводится к изучению динамики специальных отображений размерности $3, 5, 7, \dots$.

НЕРЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЦЕПОЧКЕ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ*

С. А. Кащенко, А. О. Толбей

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия*

kasch@uniyar.ac.ru, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Рассматривается цепочка диффузионно связанных уравнений Ван-дер-Поля

$$\ddot{u}_j + a\dot{u}_j + u_j + \dot{u}_j u_j^2 = (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

$u_0 = u_N, u_{N+1} = u_1$. Значение $u_j(t)$ будем ассоциировать со значением функции двух переменных $u(t, x_j)$, где x_1, \dots, x_N — равномерно распределенные на некоторой окружности точки с угловой координатой $x_j = 2\pi N^{-1}j$. Основное предположение состоит в том, что значение N достаточно велико, т.е.

$$\varepsilon = 2\pi N^{-1} \ll 1. \quad (2)$$

Ниже коэффициент a в (1) считаем однопорядковым с ε^2 : $a = \varepsilon^2 a_0$.

Условие (2) дает основание от дискретной модели (1) перейти к непрерывной по пространственной переменной x краевой задаче для $u = u(t, x)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial t} u^2 = d[u(t, x + \varepsilon) - 2u(t, x) + u(t, x - \varepsilon)], \quad (3)$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (4)$$

Исследуем поведение решений этой краевой задачи с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. Линеаризованная в нуле краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + u = d[u(t, x + \varepsilon) - 2u(t, x) + u(t, x - \varepsilon)]. \quad (5)$$

Бесконечно много корней характеристического уравнения для (5)

$$\lambda^2 + \varepsilon^2 a_0 \lambda + 1 = -4 \sin^2 \frac{z}{2}, \quad z = \varepsilon k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №21-71-30011).

стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому можно говорить, что для (3), (4) имеет место бесконечномерный критический случай.

Рассмотрим те решения, которые формируются на асимптотически больших модах, т.е. являются нерегулярными.

Фиксируем произвольно положительное значение $\delta \neq \pi n$ ($n = 1, 2, \dots$) и положим в (6) $k = \delta\varepsilon^{-1} + \theta + m$, где $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ дополняет до целого выражение $\delta\varepsilon^{-1}$, а $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда краевая задача (5), (4) имеет соответственно решения

$$u_m^\pm(t, x, \varepsilon) = \exp\left[i\left(\frac{\delta}{\varepsilon} + \theta + m\right)x \pm 2i\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\alpha^{-1}(\theta + m)\sin\delta + O(\varepsilon^2)\right)t\right],$$

где $\alpha = (1 + 4\sin^2(\delta/2))^{1/2}$. Отсюда следует, что некоторую совокупность нерегулярных решений краевой задачи (3), (4) естественно искать в виде

$$u = \varepsilon(E_+(t, x, \varepsilon)\xi(\tau, x_+) + \bar{c}c + E_-(t, x, \varepsilon)\eta(\tau, x_-)) + \\ + \varepsilon^2(E_+(t, x, \varepsilon)f_+(\tau, t, x) + \bar{c}c + E_-(t, x, \varepsilon)f_-(\tau, t, x)) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, \varepsilon) + \dots, \quad (7)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$,

$$x_\pm = x \pm \frac{\varepsilon}{2}\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)t, \quad E_\pm(t, x, \varepsilon) = \exp\left[i(\delta\varepsilon^{-1} + \theta)x \pm 2i\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\alpha^{-1}\theta\sin\delta\right)t\right].$$

Подставим (7) в (3). Соберем коэффициенты при ε^3 . Выбирая специальным образом функции $f_\pm(\tau, t, x)$, получаем уравнение относительно u_3 . Из условия его разрешимости в классе периодических по t и x функций приходим к краевой задаче для определения неизвестных амплитуд $\xi(\tau, x_+)$ и $\eta(\tau, x_-)$:

$$2\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \sin\frac{\delta}{2}\left[-i\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - \theta\frac{\partial\xi}{\partial x} - i\theta^2\xi\right] - a_0\xi - \xi[|\xi|^2 + 2M(|\eta|^2)], \quad (8)$$

$$2\frac{\partial\eta}{\partial\tau} = \sin\frac{\delta}{2}\left[i\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \theta\frac{\partial\eta}{\partial x} + i\theta^2\eta\right] - a_0\eta - \eta[|\eta|^2 + 2M(|\xi|^2)], \quad (9)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad \eta(\tau, x + 2\pi) \equiv \eta(\tau, x). \quad (10)$$

Здесь принято обозначение $M(\varphi(x)) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx$.

Таким образом, для произвольного фиксированного значения параметра δ построены краевые задачи (8)–(10), решения которых определяют согласно асимптотической формуле (7) нерегулярные решения исходной краевой задачи (3), (4) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ СОЧЕТАНИЯ ЛЕКАРСТВЕННОЙ
И ОНКОЛИТИЧЕСКОЙ ВИРУСНОЙ ТЕРАПИЙ
В МОДЕЛИ ЛЕЧЕНИЯ РАКА

Е. Н. Хайлов, Э. В. Григорьева

Московский государственный университет, Москва, Россия

Техасский женский университет, Дентон, США

khailov@cs.msu.su, egrigorieva@twu.edu

Онкологические заболевания являются глобальной проблемой. Остроту ей придают повсеместный рост заболеваемости и особенно рост смертности. В настоящее время перспективным направлением в терапии рака является вирусотерапия, которая заключается в использовании для лечения онкологических заболеваний вирусов, специфически поражающих раковые клетки. Существует несколько механизмов поражения раковых клеток онколитическими вирусами:

- (а) многократная репликация вируса внутри раковой клетки, приводящая к ее гибели;
- (б) выработка цитотоксичного протеина, повреждающего раковые клетки;
- (в) стимуляция иммунной системы организма пациента в связи с воспалительным процессом, порожденным вирусом.

Математическому моделированию вирусотерапии, а также поиску эффективных протоколов ее применения посвящены работы [1–4]. В них предложены и изучены математические модели, подобные модели “хищник–жертва” Лотки–Вольтерры [5], которые описывают взаимодействие неинфицированных и инфицированных онколитическим вирусом раковых клеток и учитывают первый из перечисленных механизмов их поражения. Настоящий доклад продолжает и развивает исследования в этом направлении.

Рассмотрим на заданном отрезке времени $[0, T]$, являющемся периодом лечения ракового заболевания, нелинейную управляемую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'(t) = r_1 x(t)(1 - x(t) - y(t)) - v(t)x(t)y(t), \\ y'(t) = r_2 y(t)(1 - x(t) - y(t)) + v(t)x(t)y(t) - aw(t)y(t), \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0; \quad x_0, y_0 > 0, \quad x_0 + y_0 \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

которая описывает взаимодействие неинфицированных и инфицированных онколитическим вирусом раковых клеток. В этой системе $x(t)$ — концентрация неинфицированных, а $y(t)$ — концентрация инфицированных раковых клеток, x_0 и y_0 — соответствующие начальные условия. Здесь r_1, r_2, a — заданные положительные параметры, причем $r_1 > r_2$. Также система (1) содержит управляющие функции $v(t)$ и $w(t)$, подчиненные ограничениям

$$0 \leq v_{\min} \leq v(t) \leq 1, \quad 0 \leq w(t) \leq w_{\max} \leq 1, \quad (2)$$

где v_{\min} и w_{\max} — заданные положительные константы. Управление $v(t)$ задает эффективность лекарственной терапии в блокировании вирусной инфекции, а

управление $w(t)$ отражает эффективность уничтожения инфицированных раковых клеток. Под множеством допустимых управлений Ω_T мы понимаем всевозможные пары $(v(t), w(t))$ измеримых по Лебегу функций $v(t)$ и $w(t)$, которые при почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют ограничениям (2).

Введем множество $\Lambda = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Тогда для произвольной допустимой пары управлений $(v(t), w(t))$ соответствующее решение $(x(t), y(t))$ системы (1) определено на всем отрезке $[0, T]$ и удовлетворяет включению

$$(x(t), y(t)) \in \Lambda, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Для системы (1) на множестве допустимых управлений Ω_T мы рассмотрим задачу минимизации целевой функции

$$J(v, w) = x(T) + y(T), \quad (4)$$

которая представляет собой сумму концентраций неинфицированных и инфицированных раковых клеток в конечный момент T периода лечения $[0, T]$.

Согласно [6], включение (3) гарантирует существование в задаче минимизации (4) оптимальных управлений $v_*(t)$ и $w_*(t)$, а также отвечающего им оптимального решения $(x_*(t), y_*(t))$ системы (1). Для их анализа применим принцип максимума Понтрягина [7]. Тогда существует такая вектор-функция $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$, что

- $\phi(t)$ является нетривиальным решением сопряженной системы

$$\begin{cases} \phi_1'(t) = r_1 x_*(t) \phi_1(t) + (r_2 - v_*(t)) x_*(t) \phi_2(t), \\ \phi_2'(t) = (r_1 + v_*(t)) y_*(t) \phi_1(t) + r_2 y_*(t) \phi_2(t), \\ \phi_1(T) = x_*(T), \quad \phi_2(T) = y_*(T); \end{cases} \quad (5)$$

- управления $v_*(t)$ и $w_*(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$v_*(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } L_v(t) > 0, \\ \text{любое } v \in [v_{\min}, 1] & \text{при } L_v(t) = 0, \\ v_{\min} & \text{при } L_v(t) < 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$w_*(t) = \begin{cases} w_{\max} & \text{при } L_w(t) > 0, \\ \text{любое } w \in [0, w_{\max}] & \text{при } L_w(t) = 0, \\ 0 & \text{при } L_w(t) < 0, \end{cases} \quad (7)$$

в которых функции

$$L_v(t) = y_*(t) \phi_1(t) - x_*(t) \phi_2(t), \quad L_w(t) = \phi_2(t) \quad (8)$$

являются функциями переключений. Они описывают с помощью формул (6) и (7) поведение управлений $v_*(t)$ и $w_*(t)$.

Анализ системы (5) и соотношений (6)–(8) показывает, что

- управления $v_*(t)$ и $w_*(t)$ имеют релейный вид и переключаются между соответствующими значениями v_{\min} , 1 и 0, w_{\max} . При этом управления имеют одинаковую оценку m числа переключений, которая задается формулой

$$m = \left\lceil \frac{2T}{\pi} \sqrt{(r_1 + 1)((r_1 - r_2) + aw_{\max}) e^{(r_1 + 4r_2 + aw_{\max} + 1)T}} \right\rceil + 1,$$

где через $\lceil \theta \rceil$ обозначена целая часть положительного числа θ ;

- к концу T отрезка времени $[0, T]$ примыкает интервал, на котором управления $v_*(t)$ и $w_*(t)$ принимают соответствующие максимальные значения 1 и w_{\max} ;
- переключение значений управлений $v_*(t)$ и $w_*(t)$ не происходит одновременно. Если в момент времени $t_v \in (0, T)$ осуществляется переключение значений управления $v_*(t)$, то при $w_*(t_v) = w_{\max}$ это переключение происходит с 1 на v_{\min} , а при $w_*(t_v) = 0$ такое переключение происходит, наоборот, с v_{\min} на 1. Если же в момент времени $t_w \in (0, T)$ осуществляется переключение значений управления $w_*(t)$, то при $v_*(t_w) = 1$ это переключение происходит с 0 на w_{\max} , а при $v_*(t_w) = v_{\min}$ такое переключение происходит, наоборот, с w_{\max} на 0.

В докладе представлены и подробно обсуждаются результаты численных расчетов решения задачи минимизации (4), выполненные в среде VOCOP-2.0.5.

Список литературы

1. Wodarz D. Viruses as antitumor weapons: defining conditions for tumor remission // Cancer Research. 2001. V. 61, No. 8. P. 3501–3507.
2. Novozhilov A.S., Berezovskaya F.S., Koonin E.V., Karev G.P. Mathematical modeling of tumor therapy with oncolytic viruses: regimes with complete tumor elimination within the framework of deterministic models // Biol. Direct. 2006. V. 1, No. 6. P. 1–18.
3. Agarwal M., Bhadauria A.S. Mathematical modeling and analysis of tumor therapy with oncolytic virus // Appl. Math. 2011. V. 2. P. 131–140.
4. Laaroussi A.A., El hia M., Rachik M. Combining a drug therapy and oncolytic virotherapy to treat cancer: an optimal control approach // Int. J. Comput. Sci. Iss. 2013. V. 10, Issue 4, No. 1. P. 74–80.
5. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. М.: Физматлит, 2010.
6. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

О НЕОБХОДИМОСТИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Д. В. Хлопин

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Россия
khlopin@imm.uran.ru*

Рассмотрим задачу управления на бесконечном промежутке

$$\min \int_0^{\infty} f_0(\tau, y(\tau), u(\tau)) d\tau,$$

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad y(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m.$$

Будем предполагать, что множество U замкнуто в некотором конечномерном евклидовом пространстве, а отображения $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $f_0: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times$

$\times U \rightarrow \mathbb{R}$ (и их производные по x) являются непрерывными по (x, u) и борелевскими по t . Для простоты формулировки для каждого борелевского управления $u \in B(\mathbb{R}_+; U)$ предположим также, что для некоторой локально суммируемой функции $C_u \in B(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ выражение $C_u(t)(1 + \|x\|)$ при всех (t, x) не меньше суммы

$$\|f(t, x, u(t))\|^2 + |f_0(t, x, u(t))|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, u(t)) \right\|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, u(t)) \right\|^2.$$

Тогда с каждым условием $y(0) = \bar{x}$ векторное поле $(t, x) \mapsto f(t, x, u(t))$ порождает единственное (на \mathbb{R}_+) решение $y(\bar{x}, u; \cdot)$, а с ним и функционал

$$J(\bar{x}, u; \theta) = \int_0^\theta f_0(t, y(\bar{x}, u; t), u(t)) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad u \in B(\mathbb{R}_+; U), \quad \theta \in \mathbb{R}_+.$$

Введем также для всех $(x, \psi, u, \lambda, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m,*} \times U \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ функцию Гамильтона—Понтрягина

$$H(x, \psi, u, \lambda, t) = \psi f(t, x, u) - \lambda f_0(t, x, u).$$

Теорема. Пусть управление $\hat{u} \in B(\mathbb{R}_+; U)$ слабо обгоняюще оптимально:

$$\limsup_{\theta \uparrow \infty} [J(x_0, u; \theta) - J(x_0, \hat{u}; \theta)] \geq 0 \quad \forall u \in B(\mathbb{R}_+, U).$$

Тогда найдется ненулевая пара $(\psi, \lambda) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{m,*}) \times \{0, 1\}$, удовлетворяющая условию максимизации гамильтониана

$$\sup_{v \in U} H(y(x_0, \hat{u}; t), \psi(t), v, \lambda, t) = H(y(x_0, \hat{u}; t), \psi(t), \hat{u}(t), \lambda, t)$$

и сопряженной системе

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(y(x_0, \hat{u}; t), \psi(t), \hat{u}(t), \lambda, t)$$

для почти всех t , а также краевому условию

$$-\psi(0) \in \text{co} \limsup_{\substack{\theta_n \uparrow \infty, x_n \rightarrow x_0, \lambda_n \downarrow \lambda \\ J(x_n, \hat{u}; \theta_n) - J(x_0, \hat{u}; \theta_n) \rightarrow 0}} \left\{ \lambda_n \frac{\partial J}{\partial x}(x_n, \hat{u}; \theta_n) \right\}. \quad (1)$$

Если управление \hat{u} также обгоняюще оптимально, т.е.

$$\liminf_{\theta \uparrow \infty} [J(x_0, u; \theta) - J(x_0, \hat{u}; \theta)] \geq 0 \quad \forall u \in B(\mathbb{R}_+, U),$$

то вместо краевого условия (1) можно взять более сильное условие

$$-\psi(0) \in \bigcap_{\{(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \mid \theta_n \uparrow \infty\}} \limsup_{\substack{x_n \rightarrow x_0, \lambda_n \downarrow \lambda \\ J(x_n, \hat{u}; \theta_n) - J(x_0, \hat{u}; \theta_n) \rightarrow 0}} \left\{ \lambda_n \frac{\partial J}{\partial x}(x_n, \hat{u}; \theta_n) \right\}. \quad (2)$$

Принцип максимума Понтрягина как необходимое условие для задач на бесконечном промежутке хорошо известен и был показан уже в [1], для максимальной общей постановки см. [2]. Однако подбор для него в качестве необходимого условия краевого условия на сопряженную переменную обычно затруднен и

опирается на какие-либо априорные асимптотические предположения (см. [3]). Условия (1) и (2) не имеют этого недостатка. Тем не менее в указанном выше виде их проверка неудобна. Приведем их геометрическую интерпретацию для случая $\lambda = 1$.

Рассмотрим последовательность моментов времени $\theta_n \uparrow \infty$. Совместно решая исходную и сопряженную системы с $\lambda = 1$ и $u = \hat{u}$, подберем все последовательности (y_n, ψ_n) , точно удовлетворяющие условию $\psi_n(\theta_n) = 0$, и все точнее условиям $y_n(0) \approx x_0$, $J(y_n(0), \hat{u}; \theta_n) \approx J(x_0, \hat{u}; \theta_n)$. Наберем все пределы таких ψ_n . Среди них в случае обгоняющего критерия найдется ψ из теоремы при любой $\theta_n \uparrow \infty$. Для слабо обгоняющего критерия нужно собрать пределы таких $\psi_n(0)$ для всех $\theta_n \uparrow \infty$ в общее множество и искать $\psi(0)$ в его выпуклой оболочке. Отметим, что, хотя эта выпуклая оболочка может оказаться очень большой, ее нельзя уменьшить без дополнительных предположений (см., например, [4]), ни одну из ее точек нельзя убрать без потери условием (1) своей необходимости.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Halkin H.* Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // *Econometrica*. 1974. V. 42. P.267–272.
3. *Асеев С.М., Вельов В.М.* Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // *УМН*. Т. 74, № 6. С. 3–54.
4. *Khlopin D.V.* Necessary conditions in infinite-horizon control problem that need no asymptotic assumptions: Preprint, arXiv: 1910.12092.

ВИЧ-ПРОЦЕСС — ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА*

А. В. Ким, Г. А. Бочаров

ИММ им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

ИВМ им. Г.И. Марчука РАН, Москва, Россия

avkim@imm.uran.ru, g.bocharov@inm.ras.ru

В работе [1] показано, что при математическом моделировании процесса развития ВИЧ-инфекции (будем для краткости называть его ВИЧ-процессом) его удобно интерпретировать как дифференциальную игру. Данная работа продолжает математическую формализацию такого подхода. Первая часть доклада посвящена общему обсуждению концепции исследования ВИЧ-динамики как дифференциальной игры. Во второй части доклада на основе экстремального прицеливания [2–4] решается задача управления ВИЧ-моделью. В третьей части доклада представлена ВИЧ-модель для апробации различных подходов теории дифференциальных игр.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00352)

Модель динамики ВИЧ-инфекции.

$$\dot{T}_1 = \lambda_1 - d_1 T_1 - (1 - u_1) k_1 V T_1,$$

$$\dot{T}_2 = \lambda_2 - d_2 T_2 - (1 - f u_2) k_2 V T_2,$$

$$\dot{I}_1 = (1 - u_1) k_1 V T_1 - \delta I_1 - m_1 (1 - u_3) E I_1,$$

$$\dot{I}_2 = (1 - f u_1) k_2 V T_2 - \delta I_2 - m_2 (1 - u_3) E I_2,$$

$$\dot{V} = (1 - u_2) N_T \delta (1 - v_2) - c V - [(1 - u_1) \rho_1 k_1 T_1 (1 - f u_1) \rho_2 k_2 T_2] V,$$

$$\dot{E} = \lambda_E + \frac{b_E (I_1 + I_2) (1 - u_4)}{(I_1 + I_2) + K_b} E - \frac{d_E (I_1 + I_2)}{(I_1 + I_2) + K_d} E - \delta_E E.$$

Здесь

- T_1, T_2 — концентрации здоровых клеток мишеней, представляющих популяции $CD4^+$ T -лимфоцитов и макрофагов соответственно (кл/мл);
- I_1, I_2 — концентрации популяций зараженных клеток (кл/мл);
- V — вирусная нагрузка (копий/мл);
- E — концентрация клеток-киллеров, представляющих популяцию цитотоксических $CD8^+$ T -лимфоцитов (кл/мл).

Первый игрок — врач, воздействующий на инфекцию через u_1, u_2 ; $a_i < u_i(t) \leq b_i$, $a_i = 0$, $b_i = 1$, $i = 1, 2$. Эти функции описывают подавление процессов заражения клеток и размножения вирусов в них с помощью антиретровирусных препаратов.

Второй игрок — вирус, подавляющий иммунный ответ через u_3, u_4 ; $a_i < u_i(t) \leq b_i$, $a_i = 0$, $b_i = 1$, $i = 3, 4$. Эти функции описывают уменьшение эффективности $CD8^+$ T -клеточного иммунного ответа.

Список литературы

1. Черешнев В.А., Бочаров Г.А., Ким А.В., Бажан С.И., Гайнова И.А., Красовский А.Н., Шиагель Н.Г., Иванов А.В., Сафронов М.А., Третьякова Р.М. Введение в задачи моделирования и управления динамикой ВИЧ-инфекции. М.; Ижевск: РХД, 2016.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1976.
3. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Boston: Birkhäuser, 1994.
4. Krasovskii A.N., Choi E.S. Stochastic control with the leader stabilizer. Ekaterinburg: IMM, Ural Branch of RAS, 2001.

A LIMIT THEOREM FOR THE STOCHASTIC LORENZ MODEL*

Yulia Klevtsova

*Siberian Regional Hydrometeorological Research Institute, Siberian State University
of Telecommunications and Information Sciences, Novosibirsk, Russia*

yy_klevtsova@ngs.ru

We consider the system of equations for the quasi-solenoidal Lorenz model for a baroclinic atmosphere

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 u + \nu A_2 u + A_3 u + B(u) = g, \quad t > 0, \quad (1)$$

on the two-dimensional unit sphere S centered at the origin of the spherical polar coordinates (λ, φ) , $\lambda \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\mu = \sin \varphi$. Here $\nu > 0$ is the kinematic viscosity, $u(t, x, \omega) = (u_1(t, x, \omega), u_2(t, x, \omega))^T$ is an unknown vector function and $g(t, x, \omega) = (g_1(t, x, \omega), g_2(t, x, \omega))^T$ is a given vector function, $x = (\lambda, \mu)$, $\omega \in \Omega$, (Ω, P, F) is a complete probability space,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta + \gamma I \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -k_0 \Delta & 2k_0 \Delta \\ k_0 \Delta & -(2k_0 + k_1 + \nu \gamma) \Delta + \rho I \end{pmatrix},$$

$$B(u) = (J(\Delta u_1 + 2\mu, u_1) + J(\Delta u_2, u_2), J(\Delta u_2 - \gamma u_2, u_1) + J(\Delta u_1 + 2\mu, u_2))^T.$$

Also, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ are numerical parameters, I is the identity operator, $J(\psi, \theta) = \psi_\lambda \theta_\mu - \psi_\mu \theta_\lambda$ is the Jacobi operator and $\Delta \psi = ((1 - \mu^2) \psi_\mu)_\mu + (1 - \mu^2)^{-1} \psi_{\lambda\lambda}$ is the Laplace–Beltrami operator on the sphere S . A random vector function $g = f + \eta$ is taken as the right-hand side of (1); here $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ and $\eta(t, x, \omega) = (\eta_1(t, x, \omega), \eta_2(t, x, \omega))^T$ is a white noise in t . In [1], for the existence of a unique stationary measure m_ν of the Markov semigroup defined by solutions of the Cauchy problem for (1) and for the exponential convergence of the distributions of solutions to the stationary measure as $t \rightarrow +\infty$, a sufficient condition was obtained on the right-hand side of (1) and the parameters $\nu, \gamma, \rho, k_0, k_1$:

$$k_0 < F(\nu, \gamma, \rho, k_1), \quad (2)$$

where $F > 0$ is some real function of the arguments ν, γ, ρ and k_1 .

Let $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ be an orthonormal basis for the space H^0 (for the definition of H^0 see [1, Sect. 3]). As a random vector function η , we consider

$$\eta^\omega(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta^\omega(t, x), \quad \zeta^\omega(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i^\omega(t) E_i,$$

*This research was carried out within the framework of the Research plan of Federal Service for Hydrometeorology and Environmental Monitoring for 2021–2024, topic 1.1.3 “Development and improvement of the new generation of COSMO-Ru ultra-high-resolution short-range weather prediction system (with grid steps up to 1 km) based on the ICON seamless non-hydrostatic atmospheric model”.

where $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, and $\{\beta_i^\omega(t)\}_{i=1}^\infty$, $t \geq 0$, is a sequence of independent real Brownian motions with respect to some right continuous filtration $\{F_t\}_{t \geq 0}$ such that all the P -nullsets of the σ -algebra F lie in F_0 (for definitions of l_2^+ and $P(X)$, see [1, Sect. 3]).

Theorem. *For any $\gamma, \rho \geq 0$ and $k_0, k_1 > 0$ satisfying the inequality*

$$k_0 < \min \left\{ 4k_1, \frac{4(2 + \gamma)}{(2 - \gamma)^2} (2k_1 + \rho) \right\},$$

any nonzero sequence $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$ and any $f \in H^0$, there exists a limiting point $m \neq \delta_0$ for any sequence of stationary measures $\{m_{\nu_n}\}_{n=1}^\infty$, $\nu_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$, for system (1) in the sense of weak- convergence in the family of probability measures $P(H^{2-\varepsilon})$, where $\varepsilon \in (0, 1]$ is an arbitrary real number and m satisfies the equality*

$$m(H^2) = 1.$$

References

1. *Klevtsova Yu. Yu.* On the rate of convergence as $t \rightarrow +\infty$ of the distributions of solutions to the stationary measure for the stochastic system of the Lorenz model describing a baroclinic atmosphere // *Sb. Math.* 2017. V. 208, No. 7. P. 929–976.

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ В НЕПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

В. В. Козлов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

vkozlov@mi-ras.ru

Рассматривается круг вопросов, связанных с точным интегрированием уравнений движения механических систем в непотенциальном силовом поле (часто называемых циркуляционными). Подход к интегрированию основан на теореме Эйлера–Якоби–Ли: если n — число степеней свободы, то (с учетом сохранения фазового объема) для точного интегрирования необходимо иметь еще $2n - 2$ первых интегралов и полей симметрий, находящихся в некоторых естественных отношениях. Указаны случаи движения в непотенциальном поле, интегрируемые с помощью разделения переменных. Обсуждаются геометрические свойства систем с ненётеровыми полями симметрий. Указаны примеры существования неприводимых полиномиальных интегралов третьей степени по импульсам. Рассмотрена задача об условиях существования однозначных полиномиальных интегралов циркуляционных систем с двумя степенями свободы и торическим пространством положений. Показано, что в типичном случае уравнения движения вообще не допускают непостоянных полиномиальных интегралов.

ON COMPLETE CONTROLLABILITY
OF A HIGHLY DEGENERATE FOUR-LEVEL QUANTUM SYSTEM
WITH A “CHAINED” COUPLING HAMILTONIAN*

Sergey Kuznetsov, Alexander N. Pechen

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

kuznetsov.sa@phystech.edu, apechen@gmail.com

The presented work focuses on consideration of the complete controllability problem [1–3] for a closed four-level quantum system with the Hamiltonian

$$H = H_0 + u(t)V \quad (1)$$

having

$$H_0 = \Omega \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & v_{12} & 0 & 0 \\ v_{12}^* & 0 & v_{23} & 0 \\ 0 & v_{23}^* & 0 & v_{34} \\ 0 & 0 & v_{34}^* & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

where H_0 and V are time-invariant bare and coupling Hamiltonians, respectively; $u(t) \in \mathbb{R}$ is an arbitrary function of time which represents the coherent control. Due to the physical meaning of (2), we consider parameters to be the following: complex $v_{ij} \neq 0$ and real $\Omega \neq 0$. This system belongs to a family of quantum systems, which, inter alia, are faced when exploring the quantum control landscape problem [4], for which it is useful to gain more information on its controllability.

For real-valued coefficients this system was studied in [5]. As our main contribution, we investigate properties of this system with regard to complete controllability for arbitrary non-zero complex values of the coefficients v_{12} , v_{23} and v_{34} . We take an insight into several properties of this system respecting the complete controllability problem. More exactly, we use the criteria by Polack, Thomas and Tannor [6] to reveal its irreducibility, which means connectivity in every possible basis. After that, we have a special recurrent algorithm (described in detail in [7]) used to generate a dynamical Lie algebra of the system and explore its structure. In terms of the formulas

$$\begin{aligned} C_0^1 &= -iH_0, & C_0^2 &= -iV, & C_1^1 &= [C_0^1, C_0^2], \\ C_k^n &= \begin{cases} [C_0^1, C_{k-1}^n], & 1 \leq n \leq 2^{k-2} \\ [C_0^2, C_{k-1}^{n-2^{k-2}}], & 2^{k-2} + 1 \leq n \leq 2^{k-1} \end{cases} & (k \geq 2), \end{aligned} \quad (3)$$

we prove that the set

$$C_0^1, C_1^1, C_2^1, C_2^2, C_3^2, C_3^4, C_4^2, C_4^4, C_4^6, C_4^4, C_5^4, C_5^{14}, C_5^{16}, C_6^{20}, C_6^{26}, C_6^{30} \quad (4)$$

constitutes a basis in the space of 4×4 skew-Hermitian matrices. It provides us with the opportunity to conclude that the considered algebra is isomorphic to the Lie algebra $\mathfrak{su}(4)$, and, via a well-known theorem on complete controllability [1], the corresponding system comes across as being controllable.

*This work is supported by the RSF under grant 22-11-00330.

References

1. *Albertini F., D'Alessandro D.* Notions of controllability for bilinear multilevel quantum systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2003. V. 48, No. 8. P. 1399–1403.
2. *Boscain U., Gauthier J-P., Rossi F., Sigalotti M.* Approximate controllability, exact controllability, and conical eigenvalue intersections for quantum mechanical systems // Commun. Math. Phys. 2015. V. 333. P. 1225–1239.
3. *Turinici G., Rabitz H.* Quantum wavefunction controllability // Chem. Phys. 2001. V. 267. P. 1–9.
4. *Pechen A.N., Tannor D.J.* Are there traps in quantum control landscapes? // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. Pap. 120402.
5. *Schirmer S.G., Fu H., Solomon A.I.* Complete controllability of quantum systems // Phys. Rev. A. 2001. V. 63, No. 6. Pap. 063410.
6. *Polack T., Thomas H., Tannor D.J.* Uncontrollable quantum systems: A classification scheme based on Lie subalgebras // Phys. Rev. A. 2009. V. 79, No. 5. Pap. 053403.
7. *D'Alessandro D.* Introduction to quantum control and dynamics. 2nd ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2021.

PARAMETRIC SMOOTH VARIATIONAL PRINCIPLES AND PROBABILISTIC DYNAMIC OPTIMIZATION PROBLEMS

Yuri S. Ledyev

Western Michigan University, Kalamazoo, USA

ledyaev@wmich.edu

Let \mathbb{X} be a Banach space and $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ a probability space with sample space Ω , σ -algebra of events \mathcal{F} and probability measure μ .

In this talk we discuss a generalized differentiation [1, 3] of the probabilistic functionals

$$F(x) := \mu\{\omega \in \Omega: f(x, \omega) \leq 0\} \quad (1)$$

for smooth Banach spaces \mathbb{X} and apply them to the study of dynamic optimization problems with probabilistic functionals.

Optimization problems with objective and constraint functionals in the form (1) were studied intensively during last decades for the case of finite-dimensional \mathbb{X} in the framework of stochastic programming [2, 4, 5].

Here we develop an approach for finding sub(super)-gradients of the functional F given by (1) in a more general setting than [5, 6] by using an integral representation of F ,

$$F(x) = \int_{\Omega} \theta(f(x, \omega)) \mu(d\omega), \quad (2)$$

where $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a Heavyside-like function: $\theta(t) = 1$ for $t \leq 0$ and $\theta(t) = 0$ for $t > 0$.

In view of (2), to evaluate the subgradients of the probabilistic functional F (1), we prove the following result for a representation of subgradients of the parametric

integral

$$H(x) := \int_{\Omega} h(x, \omega) \mu(d\omega), \quad (3)$$

which is more general than the existing ones [5, 6].

Theorem 1. *Let \mathbb{X} be a smooth Banach space, a function $h: \mathbb{X} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ be lower continuous in x for μ -a.e. ω and Borel measurable in ω for all x , and there exist an integrable function such that*

$$|h(x, \omega)| < \ell(\omega).$$

Then for any subgradient $\zeta \in \partial_F H(x)$ for any $\varepsilon > 0$ there exist $x(\omega)$ and $\xi(\omega) \in \partial_F h(x(\omega), \omega)$ such that

$$\|x(\omega) - x\| < \varepsilon, \quad \|\zeta - \int_{\Omega} \xi(\omega) \mu(d\omega)\| < \varepsilon.$$

The proof of this important result is based on the following new parametric smooth variational principle.

Theorem 2. *Let \mathbb{X} be a separable smooth Banach space and a function $h: \mathbb{X} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy the assumptions of Theorem 1. Then there exists a constant a such that for any $\varepsilon > 0$ and any $x_0(\omega)$ satisfying*

$$h(x_0(\omega), \omega) < \inf_{x \in \mathbb{X}} h(x, \omega) + a\varepsilon^2$$

there exists a function $g: \mathbb{X} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ which is smooth in x and Borel measurable in ω , and a Borel measurable $x(\omega)$ such that the function $x \rightarrow h(x, \omega) + g(x, \omega)$ attains a unique minimum at $x(\omega)$ and for all ω

$$\|g(\cdot, \omega)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon, \quad \|g'(\cdot, \omega)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

Finally, we consider the following dynamic optimization problem.

For a function $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ and a constant $\alpha \in (0, 1)$ consider the problem

minimize c

subject to the probabilistic constraint

$$\mu \left\{ \omega \in \Omega: \int_0^1 L(x(t), \dot{x}(t), \omega) dt \leq c \right\} \geq \alpha \quad (4)$$

over the set of all absolutely continuous functions $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfying the initial condition $x(0) = x_0$ and all c satisfying the probabilistic constraint (4).

We derive optimality conditions for this dynamic optimization problem with probabilistic constraint.

References

1. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Nonsmooth analysis and control theory. Springer, 1998.
2. Prékopa A. Stochastic programming. Kluwer, 1995.
3. Ledyaev Yu.S., Treiman J. Sub- and supergradients of envelopes, semicontinuous closures, and limits of sequences of functions // Russ. Math. Surv. 2012. V. 67, No. 2. P. 345–373.

4. Kibzun A., Uryasev S. Differentiability of probability function // Stoch. Anal. Appl. 1998. V. 16, No. 6. P. 1101–1128.
5. Van Ackooij W., Henrion R., Pérez-Aros P. Generalized gradients for probabilistic/robust (probust) constraints // Optimization. 2020. V. 69, No. 7–8. P. 1451–1479.
6. Correa R., Hantoute A., Pérez-Aros P. Subdifferential calculus rules for possibly non-convex integral functions // SIAM J. Control Optim. 2020. V. 58, No. 1. P. 462–484.

СИСТЕМЫ ШЛЕЗИНГЕРА С БАЗИСОМ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В. П. Лексин

Государственный социально-гуманитарный университет, Коломна, Россия
lexin_vp@mail.ru

Рассмотрим набор функциональных квадратных комплекснозначных матриц $B_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$, размера p , определенных в окрестности

$$U \subset \mathbb{C}_*^n = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_i - z_j = 0\}$$

некоторой точки $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0) \in U$ комплексного линейного пространства \mathbb{C}^n . Мы будем исследовать решения системы Шлезингера

$$dB_i(z) = - \sum_{j=1, j \neq i}^n [B_i(z), B_j(z)] \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} \quad (1)$$

с некоторыми начальными условиями $B_i(z^0) = B_i^0$. Здесь $[B_i, B_j] = B_i B_j - B_j B_i$ — обычные коммутаторы матриц, а $d(z_i - z_j)/(z_i - z_j)$, $1 \leq i < j \leq n$, — мероморфные дифференциальные 1-формы на \mathbb{C}^n . Системы Шлезингера (1) являются нелинейными матричными системами уравнений Пфаффа. Хорошо известно [1–3], что система (1) является вполне интегрируемой системой Пфаффа в окрестности U точки z^0 и любое ее решение $(B_1(z), B_2(z), \dots, B_n(z))$ мероморфно продолжается на все универсальное накрытие дополнения \mathbb{C}_*^n . Также хорошо известно, что при $p = 2$ и $n = 4$ решение систем Шлезингера [1] в классе матриц с нулевым следом сводится к решению уравнения Пенлеве VI (которое, в свою очередь, можно свести при подходящих параметрах к любому из уравнений Пенлеве I–V, и потому при $p = 2$ и $n = 4$ в общем случае решение уравнения Шлезингера выражается через трансцендентные Пенлеве). Трансцендентные Пенлеве входят в более сложный класс функций с точки зрения теории Галуа [4], чем гипергеометрические функции. Мы укажем некоторые условия на класс матриц $B_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$, в котором будем решать системы Шлезингера, когда трансцендентные Пенлеве не появляются в решениях. А именно будет описана редукция систем Шлезингера к линейным системам, которые имеют решения не сложнее с точки зрения теории Галуа, чем гипергеометрические функции. Все сказанное выше суммируется в следующем утверждении.

Теорема 1. Рассмотрим систему Шлезингера в классе верхнетреугольных матриц $B_i(z) = (b_i^{rs}(z))$, $b_i^{rs}(z) = 0$, $r > s$, $i = 1, 2, \dots, n$, с постоянными диагональными элементами $b_i^{kk}(z) = \lambda_i^k$. Пусть для каждого i диагональные элементы λ_i^k образуют арифметическую прогрессию с одной и той же разностью Δ для всех i . Тогда в классе таких матриц

1) система Шлезингера (1) редуцируется к набору линейных систем Пфаффа

$$db_i^{rs}(z) = (s-r)\Delta \sum_{j=1, j \neq i} (b_i^{rs}(z) - b_j^{rs}(z)) \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}; \quad (2)$$

2) редуцированная система (2) имеет базис решений, представленный гипергеометрическими интегралами

$$b_i^{rs}(z) = \beta_i \int_{\gamma_j} \prod_{k=1}^n (t - z_k)^{\beta_i^{rs}} \frac{dt}{t - z_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где параметры β_i^{rs} имеют значения $\beta_1^{rs} = \dots = \beta_n^{rs} = (s-r)\Delta$, а петли γ_j в плоскости комплексной переменной t , по которой ведется интегрирование, выбираются таким образом, чтобы они не проходили через точки z_i , $i = 1, \dots, n$, и чтобы подынтегральное выражение было однозначным (например, петли Похгаммера).

Список литературы

1. Балибрух А.А. Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М: МЦНМО, 2009.
2. Dragovich V., Gontsov R.R., Schramchenko V. Triangular Schlesinger systems and superelliptic curves // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2021. V. 424. Pap. 132947.
3. Лексин В.П. Многомерные системы Жордана–Похгаммера и их приложения // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 138–147.
4. Umemura H. Invitation to Galois theory // Differential equations and quantum groups / ed. by D. Bertrand et al. EMS, 2007.

HAMILTONIAN HOMOCLINIC DYNAMICS*

Lev Lerman

HSE University, Nizhny Novgorod, Russia

l1erman@hse.ru

The goal of this talk is to present some results in the study of an orbit structure of a Hamiltonian system near homoclinic orbits to specific orbits of different types: equilibria, periodic orbits and quasi-periodic orbits (whose closures, as is known, form invariant tori). This is what I call *Hamiltonian homoclinic dynamics*. The results to

*The work was supported by the HSE Laboratory of Topological Methods in Dynamics of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (grant no. 075-15-2019-1931) and by RSF under grant 22-11-00027.

be discussed have been obtained at different times; nevertheless, as far as I am aware, they are not very well known, so I hope this will be useful for the audience.

I recall the well-known fact that the discovery by H. Poincaré of homoclinic orbits gave rise to studying chaotic phenomena or complicated dynamics, though Poincaré himself did not explore this topic. The study of the homoclinic dynamics near a transverse homoclinic orbit to a saddle periodic orbit was started by Birkhoff for a symplectic diffeomorphism. Then after a long period, the first description of invariant subsets near a transverse homoclinic orbit of a saddle for any smooth two-dimensional diffeomorphism was done by Smale, and finally a complete description of a whole invariant set was performed by Shilnikov for an arbitrary differential system near a transversal homoclinic orbit to a saddle periodic orbit. Shilnikov also discovered a new phenomenon of chaotic orbit behavior near a homoclinic orbit of a saddle-focus with a positive saddle value in \mathbb{R}^3 , the topic that gave origin to the so-called spiral chaotic dynamics.

All these results also occur in Hamiltonian systems with their own specifics, because of the existence of an integral, the Hamiltonian. This feature sometimes prevents the direct application of the results found for dissipative systems in the Hamiltonian dynamics. But it also helps by allowing the reduction to smaller dimensions.

Homoclinic orbits of equilibria. The first results here are due to Devaney, who, for the case of a homoclinic orbit of a saddle-focus in a two-DOF Hamiltonian system, selected an invariant hyperbolic subset described by means of a Bernoulli scheme with two symbols. A complete description of the whole invariant subset near a transversal homoclinic orbit of a saddle-focus is done on the singular level of the Hamiltonian (containing the saddle-focus) via symbolic dynamics with infinite number of symbols (Belyakov–Shilnikov, Lerman), but it is impossible to perform a complete study near a neighborhood of the homoclinic orbit, since varying the level of the Hamiltonian leads to an infinite set of bifurcations related to the formation of hyperbolic sets whose description involves more and more symbols (Lerman). The case of homoclinic dynamics near homoclinic orbits to a saddle is more tricky. In fact, the existence of a transversal homoclinic orbit of a saddle does not necessarily lead to complicated dynamics: this is possible in an integrable system (Devaney, Lerman–Umanskiy). But Shilnikov and Turaev indicated cases where the presence of transversal homoclinic orbits of a saddle does lead to complicated homoclinic dynamics.

The case of dynamics near a homoclinic orbit to a nonhyperbolic equilibrium is much more interesting. The existence of such an orbit is not structurally stable within the class of Hamiltonian systems. Consider the case, initially indicated by Conley, of a homoclinic orbit of a saddle-center, the equilibrium p with a pair of nonzero real eigenvalues $\pm\lambda$ and a pair of imaginary ones $\pm i\omega$. Here the stable and unstable manifolds are one-dimensional (smooth curves); they generically do not intersect in the three-dimensional level $H = H(p)$. Thus, the formation of homoclinic orbits is generic in two-parametric families of Hamiltonians or in one-parameter families of reversible Hamiltonians. Here, to study the homoclinic dynamics, one needed to develop a scattering theory for the linear non-autonomous system being the linearization at the homoclinic orbit (Koltsova–Lerman). This allowed to prove

Theorem 1 (Lerman, Koltsova–Lerman). *If the linearized system at the homoclinic orbit is non-degenerate, then all Lyapunov periodic orbits on the center*

manifold $W^c(p)$ possess four transverse homoclinic orbits on the related level of the Hamiltonian, which leads to complicated homoclinic dynamics.

This result was extended in several directions. First, it was shown that on the singular level of the Hamiltonian there are countable families of periodic orbits of different types (hyperbolic and elliptic) accumulating to the homoclinic orbit, and a semi-global invariant was found responsible for these transitions (Koltsova–Lerman). Also results on four transverse homoclinic orbits were proved for the case of a Hamiltonian system with n degrees of freedom near a homoclinic orbit of a 1-elliptic equilibrium (with the only pair of simple pure imaginary eigenvalues) [1].

Homoclinic orbits to periodic orbits. The previous results were extended [2] to the case of homoclinic dynamics for a three-DOF system near a homoclinic orbit doubly asymptotic to a 1-elliptic periodic orbit (its multipliers are two eigenvalues on the unit circle and two outside the unit circle). The problem is reduced to the study of a four-dimensional symplectic diffeomorphism with a 1-elliptic fixed point possessing a homoclinic orbit to this point. Here the scattering theory was generalized to the case of a sequence of linear symplectic transformations obtained by the linearization of the symplectic diffeomorphism at the homoclinic orbit.

One more extension was made for the case of a homoclinic orbit to an equilibrium of an elliptic–hyperbolic type (with two pairs of pure imaginary eigenvalues and a pair of nonzero reals) in a Hamiltonian system being nearly integrable (Koltsova–Lerman–Delshams–Gutierrez). Here transversal one-round homoclinic orbits to invariant non-resonant 2-tori on the center manifold of the equilibrium were found (up to 16 of them).

Homoclinic orbits to an invariant torus. Hamiltonian homoclinic dynamics arises naturally in the study of a symplectic diffeomorphism f in a neighborhood of a homoclinic orbit to a smooth invariant curve γ being hyperbolic. For instance, one encounters this situation when studying the homoclinic dynamics of a symplectic four-dimensional diffeomorphism near a homoclinic orbit to a 1-elliptic fixed point p . There the smooth center two-dimensional manifold $W^c(p)$ contains many invariant curves with irrational rotation number.

The notion of a hyperbolic invariant curve for a symplectic 4-diffeomorphism can be defined in invariant terms; but here, for simplicity, we use the following setup. Let γ be a smooth invariant curve of a smooth symplectic diffeomorphism and Σ be a smooth symplectic two-dimensional cylinder containing γ . We assume the restriction of f on the cylinder is a twist map near γ . Also this cylinder is supposed to be a hyperbolic manifold of f ; thus, there are two invariant three-dimensional submanifolds $W^s(\Sigma)$ and $W^u(\Sigma)$, which are foliated into smooth curves $l^s(m)$ and $l^u(m)$, $m \in \Sigma$, forming smooth invariant foliations of each of them (Fenichel). The union of $l^s(m)$, $m \in \Sigma$, makes up the smooth stable manifold $W^s(\gamma)$. Similarly, $W^u(\gamma)$ is defined. These two submanifolds can be extended by f , providing global stable and unstable manifolds of γ . Suppose $W^s(\gamma)$ intersects $W^u(\gamma)$ at some point $q \ni \gamma$ and this intersection is transverse (a transversal homoclinic point q to γ generating a homoclinic orbit Γ). What is the homoclinic dynamics near Γ ? This was investigated by many authors, starting with Easton (Treschev, Bolotin, Cresson, Turaev–Gelfreich, and others).

Because of transversality, the intersection $W^s(\gamma) \cap W^u(\gamma)$ is transverse and is therefore along a two-dimensional symplectic disk D . Both $W^s(\gamma)$ and $W^u(\gamma)$ intersect

this disk transversely within the related $W^s(\Sigma)$ and $W^u(\Sigma)$ along two transversely intersecting smooth curves in D near the point q . In fact, near q there is a Cantorian set of smooth curves from the related stable (and unstable) manifolds of smooth invariant closed curves on Σ near γ . Our goal in this section will be to describe other orbits passing near this Cantorian set.

References

1. *Koltsova O.Yu., Lerman L.M.* Families of transverse Poincaré homoclinic orbits in $2N$ -dimensional Hamiltonian systems close to the system with a loop to a saddle-center // Int. J. Bifurcation Chaos. 1996. V. 6, No. 6. P. 991–1006.
2. *Lerman L., Markova A.* On symplectic dynamics near a homoclinic orbit to 1-elliptic fixed point // Tr. Mosk. Mat. Obshch. 2015. V. 76, No. 2. P. 309–342.

APPLICATION OF THE KANTOROVICH–GALERKIN METHOD FOR THE ANALYSIS OF RESONANT SYSTEMS

V. L. Litvinov

Samara State Technical University, Samara, Russia

Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Moscow, Russia

`vladlitvinov@rambler.ru`

The article considers the resonant characteristics of nonlinear oscillations of a rope with moving boundaries. The phenomena of resonance and passage through resonance are analyzed. An approximate method has been developed in relation to taking into account the influence of resistance forces and viscoelastic properties on the system. This method also allows considering a wider class of boundary conditions compared to other approximate methods for solving boundary value problems with moving boundaries. The resonance characteristics of a viscoelastic rope with moving boundaries using the Kantorovich–Galerkin method are examined in the article. The phenomena of resonance and steady passage through resonance are analyzed.

One-dimensional systems whose boundaries move are widely used in engineering [1–5]. The presence of moving boundaries causes considerable difficulties in describing such systems. Exact methods for solving such problems are limited to the wave equation and relatively simple boundary conditions. Of the approximate methods, the Kantorovich–Galerkin method described in [5] is the most efficient. However, this method can also be used in more complex cases. This method makes it possible to take into account the effect of resistance forces on the system, the viscoelastic properties of an oscillating object, and also the weak non-stationarity of the boundary conditions.

The paper considers the phenomena of steady state resonance and passage through resonance for transverse oscillations of a rope of variable length, taking into account viscoelasticity and damping forces. Performing transformations similar to those in [5], we obtain an expression for the amplitude of oscillations corresponding to the n th dynamic mode. Expressions are also obtained that describe the phenomenon of steady state resonance and the phenomenon of passage through resonance.

The expression that determines the maximum amplitude of oscillations when passing through the resonance was numerically investigated to the maximum. The dependence of the rope oscillation amplitude on the boundary velocity, viscoelasticity, and damping forces is analyzed.

The results of numerical studies allow us to draw the following conclusions:

- with a decrease in the velocity of the boundary, viscoelasticity and damping forces, the amplitude of oscillations increases;
- as the boundary velocity, viscoelasticity and damping forces tend to zero, the oscillation amplitude tends to infinity.

In conclusion, we note that the above results make it possible to carry out a quantitative analysis of the steady state resonance and the phenomenon of passage through the resonance for systems whose oscillations are described by the formulated problem.

References

1. *Vesnitsky A.I., Potapov A.I.* Transverse vibrations of ropes in mine hoists // Dynamics of systems. Gorky: Gor'kovsk. Univ., 1975. No. 7. P. 84–89.
2. *Anisimov V.N., Litvinov V.L.* Longitudinal vibrations of a viscoelastic rope of variable length // Proc. 4th All-Russian Sci. Conf. “Mathematical modeling and boundary value problems”. Part 1: Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. Samara, 2007. P. 25–27.
3. *Goroshko O.A., Savin G.N.* Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kiev: Naukova Dumka, 1971.
4. *Litvinov V.L., Anisimov V.N.* Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction // Bull. Samara Sci. Center Russ. Acad. Sci. 2017. V. 19, No. 4. P. 161–165.
5. *Litvinov V.L., Anisimov V.N.* Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bull. Russ. Acad. Sci., Solid Mech. 2018. No. 2. P. 70–77.

DERIVATIVE OF SUB-RIEMANNIAN GEODESICS IS L_p -HÖLDER CONTINUOUS*

Lev Lokutsievskiy

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

lion.lokut@gmail.com

The talk will be devoted to the long-standing open problem on the smoothness of abnormal sub-Riemannian geodesics. I will show that the derivatives of abnormal sub-Riemannian geodesics are always L_p -Hölder continuous. This result has a number of interesting implications concerning

- (i) the Fourier coefficients decay on abnormal controls,
- (ii) the rate of their approximation by smooth functions,
- (iii) the corresponding generalization of the Poincaré inequality, and

*This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant 20-01-00469.

- (iv) the compact embedding of the set of shortest paths into the space of Bessel potentials.

The result is obtained in the joint work with Mikhail I. Zelikin.

References

1. *Lokutsievskiy L.V., Zelikin M.I.* Derivative of sub-Riemannian geodesics is L_p -Hölder continuous: Preprint, arXiv:2203.04956.

SINGULARITY OF FULLER TYPE IN A CONTROL PROBLEM OF A ROCKET*

Larisa Manita^{a,b}, Mariya Ronzhina^{c,b}

^a*HSE University, Moscow State Institute of Electronics and Mathematics,
Moscow, Russia*

^b*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^c*National University of Oil and Gas “Gubkin University”, Moscow, Russia*

lmanita@hse.ru, ronzhina.m@gubkin.ru

Pontryagin’s maximum principle (PMP) reduces the study of optimal control problems to the study of controlled Hamiltonian systems. If the Hamiltonian system is affine in control, then the typical phenomenon is the existence of a singular trajectory that is characterized by the fact that the Hamiltonian reaches its maximum over a finite time interval at more than one point. Thus, the optimal control cannot be determined directly from the PMP maximum condition. The singular second-order trajectories play an important role for optimal control problems, in particular, for applied problems. In [7] it was proved that if a mechanical system affine in control with a canonical Lagrangian is such that the kinetic energy depends only on generalized momenta, then its singular extremals are of the second order.

The behavior of optimal trajectories near a singular trajectory of the second order can be quite complex; for example, nonsingular trajectories can have an infinite number of control discontinuities near the matching point with the singular arc (this is called the chattering regime or Fuller’s phenomenon). In the case of one-dimensional control, the problems with singular trajectories of the second order are well studied. In problems with one-dimensional control, it was proved that optimal chattering trajectories are typical for control systems with singular trajectories of the second order [2, 6]. A complete description of the structure of optimal solutions in a neighborhood of singular extremals of the second order was given in [6].

In problems with multidimensional control, the behavior near a singular trajectory can be much more complex and has been studied only in a few special cases [1, 6, 8].

In [4, 5] the behavior of solutions in a neighborhood of a singular extremal of the second order for a Hamiltonian system of the PMP that is affine in two-dimensional bounded control was studied. It was assumed that the dimension of the system is

*This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 20-11-20169.

large (≥ 32) and controls take values in an ellipse. A family of solutions in the form of logarithmic spirals was found. These solutions reach the singular point in finite time and have a countable number of revolutions around this singular point. To obtain this result, the construction of the descending system of Poisson brackets, the Zelikin–Borisov method for the resolution of singularities in a neighborhood of a singular point and methods of dynamical systems to the resulting (after the resolution of singularities) system were applied.

The bound on the dimension of the Hamiltonian system in [4, 5] is a sufficient condition. In fact, the scheme used in [4, 5] also works for some systems of lower dimension. For example, in [3] a similar result was obtained for a problem in which the dimension of the Hamiltonian system is eight.

One more example with a Hamiltonian system of small dimension arises in the minimal time problem for the guidance of a rocket [9]. The equations of attitude motion of a rocket coupled with the orbit dynamics are

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= a \sin \theta \cos \psi - g, \\ \dot{v}_y &= -a \sin \psi, \\ \dot{v}_z &= a \cos \theta \cos \psi, \\ \dot{\theta} &= \frac{\omega_x \sin \phi + \omega_y \cos \phi}{\cos \psi}, \\ \dot{\psi} &= \omega_x \cos \phi - \omega_y \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= (\omega_x \sin \phi + \omega_y \cos \phi) \tan \phi, \\ \dot{\omega}_x &= u_1, \\ \dot{\omega}_y &= u_2,\end{aligned}$$

where v_x, v_y, v_z are the components of the velocity vector, θ, ψ, ϕ are the Euler angles, ω_x, ω_y are the components of the angular velocity vector, g is the standard gravity, and $a > 0$. The controls u_1 and u_2 satisfy the constraint

$$u_1^2 + u_2^2 \leq b^2, \quad b > 0.$$

Initial conditions are fixed. On the target submanifold the desired final velocity is required to be parallel to the rocket axis.

In [9] the singular surface of the second order was found for this problem. The dimension of the Hamiltonian system is 16, and the results obtained in [5] cannot be applied. But using the same approach, we show that in this problem there are spiral-like extremals that attain the singular point (on the singular surface of the second order) in finite time, wherein the corresponding controls perform an infinite number of rotations along the circle S^1 .

References

1. *Chukanov S.V., Milyutin A.A.* Qualitative study of singularities for extremals of quadratic optimal control problem // Russ. J. Math. Phys. 1994. V. 2. P. 31–48.
2. *Kupka I.* The ubiquity of Fuller’s phenomenon // Nonlinear controllability and optimal control. New York: M. Dekker, 1990. P. 313–350.

3. *Manita L.A., Ronzhina M.I.* Optimal spiral-like solutions near a singular extremal in a two-input control problem // *Discrete Contin. Dyn. Syst. B* (online first). 2021. Doi: 10.3934/dcdsb.2021187.
4. *Ronzhina M.I., Manita L.A., Lokutsievskiy L.V.* Solutions of a Hamiltonian system with two-dimensional control in the neighborhood of a singular extremal of the second order // *Usp. Mat. Nauk.* 2021. V. 76, No. 6. P. 201–202.
5. *Ronzhina M.I., Manita L.A., Lokutsievskiy L.V.* Neighborhood of the second order singular mode in a problem with control in a circle // *Tr. Mat. Inst. Steklova.* 2021. V. 315. P. 222–236.
6. *Zelikin M.I., Borisov V.F.* Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics and engineering. Boston: Birkhäuser, 1994.
7. *Zelikin M.I., Borisov V.F.* Optimal chattering feedback control // *J. Math. Sci.* 2003. V. 114. P. 1227–1344.
8. *Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., Hildebrand R.* Typicality of chaotic fractal behavior of integral vortices in Hamiltonian systems with discontinuous right hand side // *J. Math. Sci.* 2017. V. 221. P. 1–136.
9. *Zhu J., Trélat E., Cerf M.* Minimum time control of the rocket attitude reorientation associated with orbit dynamics // *SIAM J. Control Optim.* 2016. V. 54. P. 391–422.

ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА С УПРАВЛЕНИЕМ В ПОЛУКРУГЕ*

А. П. Маштаков

ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия

alexey.mashtakov@gmail.com

Рассматривается следующая геометрическая задача на плоскости. Даны точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, липшицева кривая $\bar{\gamma} \subset \mathbb{R}^2$, соединяющая a_1 с a_0 , вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ и число $S \in \mathbb{R}$. Требуется найти кратчайшую липшицеву кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую a_0 с a_1 , монотонно отдаляющуюся от a_0 в направлении \vec{v} , для которой замкнутая кривая $\gamma \cup \bar{\gamma}$ ограничивает в \mathbb{R}^2 область алгебраической площади S .

Введем декартовы координаты x, y на плоскости \mathbb{R}^2 с началом координат a_0 и направлением оси Ox вдоль вектора \vec{v} . Тогда $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (x_1, y_1)$, а кривая $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, t_1]$, является решением следующей задачи быстрого действия:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1, & x(0) = 0, \quad x(t_1) = x_1, \\ \dot{y} = u_2, & x(0) = 0, \quad x(t_1) = y_1, \\ \dot{z} = \frac{1}{2}(xu_2 - yu_1), & z(0) = 0, \quad z(t_1) = S, \end{cases}$$

$$(x, y, z) = q \in \mathbb{R}^3, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad u_1 \geq 0, \quad t_1 \rightarrow \min,$$

где управления u_i принадлежат классу $L^\infty([0, t_1], \mathbb{R})$.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00877, <https://rscf.ru/project/22-21-00877/>) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

Сформулированная задача является левоинвариантной задачей быстродействия на группе Гейзенберга с множеством допустимых управлений — полукругом. Случай, когда множество допустимых управлений является целым кругом, представляет собой хорошо известную задачу Дидоны — краеугольный камень субримановой геометрии [1]. Эта задача, также именуемая субримановой задачей на группе Гейзенберга, была исследована в работах [2, 3]. В частности, было показано, что кратчайшая допустимая кривая между заданными граничными точками является сегментом винтовой линии, а ее проекция на плоскость — дугой окружности. Винтовая линия перестает быть кратчайшей кривой после первого витка. В случае, когда граничные точки соединяются сегментом винтовой линии, меньшим полного витка, кратчайшая единственна, а в случае полного витка существует бесконечное число кратчайших, удовлетворяющих одним граничным условиям.

Рассматриваемая задача представляет интерес в геометрической теории управления [4] как модельный пример, в котором нулевое управление находится на границе множества управляющих параметров. Такое ограничение не позволяет непосредственно применить общий подход [5], основанный на выпуклой тригонометрии. Аналогичная задача быстродействия на группе движений плоскости с таким ограничением была исследована в недавней работе [6].

Помимо интереса в теории, актуальность задачи обусловлена приложениями в робототехнике и обработке изображений. Рассматриваемая управляемая система задает нильпотентную аппроксимацию [7] для моделей мобильного робота на искривленной поверхности, который может двигаться вперед и поворачивать на месте. Оптимальные траектории таких систем используются для поиска выделяющихся кривых на изображениях. Нильпотентная аппроксимация является простейшей системой, локально приближающей исходную систему и сохраняющей свойство управляемости.

Для задачи получены следующие результаты: найдено множество достижимости \mathcal{A} управляемой системы и доказано существование решения для граничных условий из \mathcal{A} ; путем применения необходимого условия оптимальности — принципа максимума Понтрягина найден явный вид экстремальных траекторий; исследована оптимальность экстремальных траекторий; описана структура оптимального синтеза.

Теорема. *Множество достижимости управляемой системы имеет вид*

$$\mathcal{A} = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\} \cup \{q \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0\}.$$

Для любого $q \in \mathcal{A}$ существует единственная оптимальная траектория, приходящая в q . Оптимальная траектория на плоскости x, y состоит не более чем из трех сегментов следующего вида:

- (1) движение по прямой вдоль оси Oy ;
- (2) движение по дуге окружности;
- (3) движение по прямой вдоль оси Oy .

Часть результатов получена совместно с А.О. Чернышевым в ходе образовательного модуля “Современные методы теории информации, оптимизации и управления” (Сириус, 2021).

Список литературы

1. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2019. (Cambridge Stud. Adv. Math.).
2. Brockett R.W. Control theory and singular Riemannian geometry // New directions in applied mathematics / Ed. by P.J. Hilton, G.S. Young. New York: Springer, 1982. P. 11–27.
3. Вершик А.М., Гершикович В.Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Динамические системы–7. М.: ВИНТИ, 1987. С. 5–85. (Итоги науки и техники. Современ. пробл. мат. Фунд. напр.; Т. 16).
4. АгрACHEV А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М: Физматлит, 2005.
5. Локуцкий Л.В. Выпуклая тригонометрия с приложениями к субфинслеровой геометрии // Мат. сб. 2019. Т. 210. №8. С. 120–148.
6. Маштаков А.П. Задача быстрогодействия на группе движений плоскости с управлением в полукруге // Мат. сб. 2022. Т. 213. №4. С. 100–122.
7. Bellaïche A. The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry / Ed. by A. Bellaïche, J.-J. Risler. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS AND METHODS FOR SOME OPEN QUANTUM SYSTEMS*

Oleg V. Morzhin^a, Alexander N. Pechen^{a,b}

^a*Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia*

^b*National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russia*

morzhin.oleg@yandex.ru, apechen@gmail.com

Optimal control of quantum systems (e.g., individual atoms, molecules) is an important scientific direction at the intersection of physics, mathematics, and technologies, which is actively developed since the 1980s [1–7]. This direction uses, for example, powerful methods of optimal control theory such as the Pontryagin maximum principle (PMP) developed by L. S. Pontryagin, V. G. Boltyansky, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko [8–10] (see, e.g., [2, Ch. 4], [11, Ch. 19] and [12, 13]), various optimization methods, including the Krotov method [1, 14], genetic algorithms [15], etc.

Typically in experimental situations controlled systems are open, and the environment is often considered as having deleterious effects on the dynamics. However, it can also be used for controlling the system. A powerful method of incoherent control, including in combination with coherent control, was proposed for any N -level systems and studied in [15]. In this case, spectral density of the environment, i.e., distribution of particles of the environment in their momenta and internal degrees of freedom, is used as the incoherent control function to manipulate the system. This spectral density is often considered as thermal (Planck distribution), but in general

*The talk presents the results partially supported by the RSF (project 22-11-00330) and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (projects 0718-2020-0025, 075-15-2020-788).

it can be any non-equilibrium non-negative function, possibly depending on time, of momenta and internal degrees of freedom of environmental particles. Numerical simulations were performed for an explicit example of four-level systems using global search optimization by genetic algorithms. Initially for this incoherent method it was not clear to what degree it allows for manipulating the system. In [16], it was shown that certain two-stage sequential (in time) combination of coherent and incoherent controls allows to approximately steer any initial density matrix (DM) to any given target DM. This property approximately realizes controllability of open quantum systems in the set of all DMs—the strongest possible degree of quantum state control. Also [16] gives a numerical example for the case with $N = 2$. Reachable sets for a qubit driven by coherent and incoherent controls have been analytically described using powerful geometric control methods; surprisingly, completely unreachable states were found [17].

Based on [15, 16], we consider some one- and two-qubit ($N = 2, 4$, respectively) open quantum systems evolved via the Gorini–Kossakowski–Sudarshan–Lindblad master equation

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H_S + \varepsilon H_{\text{eff},n(t)} + H_{u(t)}, \rho(t)] + \varepsilon \mathcal{L}_{n(t)}(\rho(t)), \quad \rho(0) = \rho_0, \quad (1)$$

where $\rho(t)$ is an N -order DM; $[A, B]$ denotes the commutator $[A, B] = AB - BA$ of operators A and B ; H_S and $H_{\text{eff},n(t)}$ are, respectively, the free and effective Hamiltonians; $H_{u(t)}$ describes interactions between the quantum system and coherent control u ; the coherent control u enters the Hamiltonian while the incoherent control n , in general, enters both the Hamiltonian (via Lamb shift) and the dissipative superoperator $\mathcal{L}_{n(t)}$; these controls can be taken from various functional classes. For the cases with $N = 2, 4$ for system (1), the works [18–23] consider various control problems with various objective functionals to be minimized/maximized, represented, e.g., by the squared Hilbert–Schmidt distance, $\|\rho(T) - \rho_{\text{target}}\|^2$, between the final DM, $\rho(T)$, and a given target DM, ρ_{target} , the Hilbert–Schmidt scalar product (mean value), $\langle \rho(T), \rho_{\text{target}} \rangle$, the Uhlmann–Jozsa fidelity, etc. Here the one-qubit case is considered, when $H_{\text{eff},n(t)}$ is absent and $\varepsilon = 1$; the two-qubit case is considered with some $H_{\text{eff},n(t)}$ and $\varepsilon > 0$. An important goal of the study is analytical and numerical analysis of optimal control structures and trajectories, for such cases as singular controls. The PMP, the Gabasov second-order necessary condition for optimality [24], and various iterative optimization methods are used. For example, the article [20] includes an example such that, for some optimal control problem, the zero coherent and incoherent controls satisfy the PMP while they are not optimal. This illustrates a possible “underwater rock” for practice. Some modification of the two-stage method is constructed [21]. For accelerating such computations, e.g., multi-step gradient projection methods are under study. Moreover, such an objective functional can be extended for constraining the evolution of DM over the whole time interval.

References

1. *Tannor D.J.* Introduction to quantum mechanics: A time dependent perspective. Sausalito, CA: Univ. Sci. Books, 2007.
2. *Butkovskiy A.G., Samoilenko Yu.I.* Control of quantum-mechanical processes and systems Dordrecht: Kluwer, 1990.

3. *D'Alessandro D.* Introduction to quantum control and dynamics. 2nd ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2021.
4. *Brif C., Chakrabarti R., Rabitz H.* Control of quantum phenomena: Past, present and future // *New J. Phys.* 2010. V. 12, No. 7. Pap. 075008.
5. *Glaser S.J. et al.* Training Schrödinger's cat: quantum optimal control. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe // *Eur. Phys. J. D.* 2015. V. 69, No. 12. Pap. 279.
6. *Koch C.P.* Controlling open quantum systems: tools, achievements, and limitations // *J. Phys. Condens. Matter.* 2016. V. 28, No. 21. Pap. 213001.
7. *Ulyanov S. et al.* Introduction in quantum optimal control // *System Anal. Sci. Educ.* 2018. No. 1. P. 67–100.
8. *Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Pontryagin L.S.* On the theory of optimal processes // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1956. V. 110, No. 1. P. 7–10.
9. *Pontryagin L.S.* Optimal regulation processes // *Usp. Mat. Nauk.* 1959. V. 14, No. 1. P. 3–20.
10. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The Mathematical theory of optimal processes. New York; London: Interscience Publ.; J. Wiley & Sons, 1962.
11. *Agrachev A.A., Sachkov Y.L.* Control theory from the geometric viewpoint. Springer, 2004.
12. *Buldaev A., Kazmin I.* Operator methods of the maximum principle in problems of optimization of quantum systems // *Mathematics.* 2022. V. 10, No. 3. Pap. 507.
13. *Boscain U., Sigalotti M., Sugny D.* Introduction to the Pontryagin maximum principle for quantum optimal control // *PRX Quantum.* 2021. V. 2. Pap. 030203.
14. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Krotov method for optimal control of closed quantum systems // *Russ. Math. Surv.* 2019. V. 74, No. 5. P. 851–908.
15. *Pechen A., Rabitz H.* Teaching the environment to control quantum systems // *Phys. Rev. A.* 2006. V. 73, No. 6. Pap. 062102.
16. *Pechen A.* Engineering arbitrary pure and mixed quantum states // *Phys. Rev. A.* 2011. V. 84, No. 4. Pap. 042106.
17. *Lokutsievskiy L., Pechen A.* Reachable sets for two-level open quantum systems driven by coherent and incoherent controls // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2021. V. 54. Pap. 395304.
18. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Minimal time generation of density matrices for a two-level quantum system driven by coherent and incoherent controls // *Int. J. Theor. Phys.* 2021. V. 60. P. 576–584.
19. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Maximization of the Uhlmann–Jozsa fidelity for an open two-level quantum system with coherent and incoherent controls // *Phys. Part. Nucl.* 2020. V. 51, No. 4. P. 464–469.
20. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* On reachable and controllability sets for time-minimal control of an open two-level quantum system // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2021. V. 313. P. 149–164.
21. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* // *Proc. Steklov Inst. Math.* (in preparation).
22. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Generation of density matrices for two qubits using coherent and incoherent controls // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42. P. 2401–2412.
23. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* // *Lobachevskii J. Math.* (in preparation).
24. *Gabasov R., Kirillova F.M.* Singular optimal controls New York: Plenum Press, 1978.

ПОСТРОЕНИЕ НОРМ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Асият Мусаева

МГУ, Москва, Россия

asya.musaeva2001@mail.ru

Линейной системой с переключениями называется дифференциальное уравнение $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$ с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, в котором матрица $A(t)$ является управляемым параметром, принимающим произвольные значения из заданного компактного множества управления \mathcal{A} . *Функция управления*, или *правило переключений* (switching law), — это произвольная измеримая функция $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{A}$. Линейные системы с переключениями возникают в задачах электроники, механики, робототехники, планирования, и т.д. [1]. Один из главных вопросов — максимальный рост траекторий системы и ее устойчивость. *Показателем Ляпунова* $\sigma(\mathcal{A})$ системы называется инфимум чисел α , для которых $\|\mathbf{x}(t)\| \leq Ce^{\alpha t} \|\mathbf{x}_0\|$, $t \in [0, +\infty)$. Таким образом, самый быстрый рост траектории имеет порядок $Ce^{\sigma t}$, $t \rightarrow \infty$. Система называется *асимптотически устойчивой*, если все ее траектории стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Известно [2], что система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $\sigma < 0$.

В литературе известно множество методов исследования устойчивости. Одним из наиболее эффективных является метод *инвариантных норм Ляпунова*. Инвариантная норма обладает следующим характеристическим свойством: $\|\mathbf{x}(t)\| \leq e^{\sigma t} \|\mathbf{x}_0\|$ для любой траектории $\mathbf{x}(t)$, и при этом для любой точки \mathbf{x}_0 существует траектория $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ такая, что $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ и $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = e^{\sigma t} \|\mathbf{x}_0\|$. Н. Барабанов [3] доказал, что для любой неприводимой системы с выпуклым множеством управления \mathcal{A} инвариантная норма Ляпунова существует. Однако ее построение — чрезвычайно сложная задача (см. подробнее [4]). Мы исследуем случай малых размерностей и представляем полное решение данной задачи для $d = 2$. Оказывается, что для двумерных систем можно не только эффективно вычислять показатель Ляпунова, но и строить норму Ляпунова в явном виде. Мы также получаем полную классификацию норм Ляпунова для двумерных систем. Интересно, что в некоторых случаях инвариантные нормы неединственны, что подчеркивает разницу с дискретными системами [5]. Будет представлен алгоритм вычисления инвариантной нормы для произвольных систем с конечным множеством управления.

Список литературы

1. Liberzon D. Switching in systems and control // Systems & Control: Foundations & Applications. Boston: Birkhäuser, 2003.
2. Molchanov A.P., Pyatnitskiy Y.S. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory // Syst. Control Lett. 1989. V. 13, No. 1. P. 59–64.
3. Barabanov N.E. Absolute characteristic exponent of a class of linear nonstationary systems of differential equations // Sib. Math. J. 1988. V. 29. P. 521–530.

4. *Guglielmi N., Laglia L., Protasov V. Yu.* Polytope Lyapunov functions for stable and for stabilizable LSS // *Found. Comput. Math.* 2017. V. 17, No. 2. P. 567–623.
5. *Protasov V. Yu.* The Barabanov norm is generically unique, simple, and easily computed // *SIAM J. Optim. Control.* 2022 (in press); arXiv: 2109.12159.

VERIFICATION OF CONTROLLABILITY
OF SOME DEGENERATE FOUR-LEVEL QUANTUM SYSTEMS*

A. A. Myachkova^a, A. N. Pechen^{b,c}

^a*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*

^b*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^c*National University of Science and Technology MISIS, Moscow, Russia*

miachkova.aa@phystech.edu, apechen@gmail.com

In quantum control theory the study of controllability of quantum system plays an important role [1–5]. In this work, we consider a four-level quantum mechanical system described by the Schrödinger equation with the following free Hamiltonian and interaction Hamiltonian:

$$H_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & V_{13} & V_{14} \\ 0 & 0 & v_{23} & V_{24} \\ V_{13}^* & v_{23}^* & 0 & v_{34} \\ V_{14}^* & V_{24}^* & v_{34}^* & 0. \end{pmatrix} \quad (1)$$

We impose the following conditions on the parameters a, b, c and $v_{13}, v_{23}, v_{14}, v_{24}$: $a \neq b \neq c$ and $v_{13}v_{23}^* + v_{14}v_{24}^* = 0$.

The main goal of this work is to perform the controllability analysis for the system with Hamiltonian (1) under the conditions described above. It is known that a necessary and sufficient condition for complete controllability of a quantum system is that the dynamical Lie algebra generated by all commutators of H_0 and V has dimension N^2 . Consequently, we construct a basis of the dynamical Lie algebra and check its dimension.

As a result of the study, we find that such a basis in some cases does exist, hence the system is controllable. However, we identified a set of criteria for which this is not fulfilled. For example, these include cases when $|v_{13}| = |v_{23}|$ and $v_{34} = 0$. For these cases, an additional study is performed to analyze reducibility by selecting operators commuting with both H and V , using numerical methods. Some explicit examples are also considered.

References

1. *Schirmer S.G., Fu H., Solomon A.I.* Complete controllability of quantum systems // *Phys. Rev. A.* 2001. V. 63. Pap. 063410.
2. *Ramakrishna V. et al.* Controllability of molecular systems // *Phys. Rev. A.* 1995. V. 51, No. 2. P. 960–966.

*This work is supported by the RSF under grant no. 22-11-00330.

3. *Turinici C., Rabinz H.* Wavefunction controllability in quantum systems // J. Math. Phys. 2003. V. 36. No. 10.
4. *Polack T., Suchowski H., Tannor D.J.* Uncontrollable quantum systems: A classification scheme based on Lie subalgebras // Phys. Rev. A. 2009. V. 79. Pap. 053403.
5. *Bloch A.M., Brockett R.W., Rangan C.* Finite controllability of infinite-dimensional quantum systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2010. V. 55, No. 8. P. 1797–1805.

ON AN ISOPERIMETRIC PROBLEM ON THE LOBACHEVSKY HYPERBOLIC PLANE WITH LEFT-INVARIANT FINSLER STRUCTURE*

Victoria Myrikova

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

myrikova.va@gmail.com

We deal with Finsler geometry on the Lobachevsky hyperbolic plane. Some geometrical features, including Finsler geodesics, were already investigated, for instance, in [1] and [3]. The basic idea used in the works is to consider the hyperbolic plane as the Lie group of proper affine transformations of \mathbb{R} with a left-invariant Finsler structure. In contrast to Riemannian geometry, there is no natural definition of area on a Finsler manifold. But having the group structure, we can try to state and to solve a left-invariant isoperimetric problem on the Finsler Lobachevsky plane, which was done in the current work.

Let G be the Lie group of proper affine transformations of the line \mathbb{R} : $\lambda \rightarrow y\lambda + x$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$. The identity element is $e = (0, 1)$. We construct the left-invariant Finsler structure on G in the following way. Let $\Omega \subset T_e G$ be a convex compact set with the origin in its interior. Then we define $\Omega_g = (d_e L_g)\Omega \subset T_g G$ for any other $g \in G$, where $L_g h = gh$, $h \in G$. Thus, every set Ω_g generates an almost norm $\|\cdot\|_g$ in the corresponding tangent space $T_g G$. Using coordinates, we have $\|(\xi_1, \xi_2)\|_{(x,y)} = \|(\xi_1, \xi_2)\|_e/y$.

Let $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, be a Lipschitz continuous curve on G . Then its length $L(\gamma(t))$ can be calculated as the following integral:

$$L(\gamma(t)) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt = \int_a^b \frac{\|(\dot{x}(t), \dot{y}(t))\|_e}{y(t)} dt.$$

Note that the length functional depends on the orientation of the curve when $\Omega \neq -\Omega$. So, every Lipschitz continuous loop γ has two different Finsler lengths calculated in opposite directions. Let us denote them by $\text{Len}_+(\gamma)$ for the positive orientation and by $\text{Len}_-(\gamma)$ for the negative one.

The isoperimetric problem is to find a simple closed curve (loop) having minimal length when the area of the enclosed region is fixed. The solutions to the problem are called isoperimetric loops. In fact, we need to consider two isoperimetric problems on a Finsler manifold.

*This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 20-11-20169.

To state the problems, we only need to define what the area of a region on G is. It is natural to use the left-invariant volume form, which leads to the following formula for the area of an open region U :

$$\text{Area}(U) = \int_U \frac{1}{y^2} dx \wedge dy.$$

Thus, for a point $g_o \in G$ and a number $A_o > 0$ we need to find two Lipschitz continuous loops γ_{\pm} with the properties

$$\begin{cases} \text{Len}_{\pm}(\gamma_{\pm}) \rightarrow \min, \\ \text{Area}(U_{\gamma_{\pm}}) = A_o, \\ g_o \in \gamma_{\pm}, \end{cases} \quad (\text{GS}_{\pm})$$

where $U_{\gamma_{\pm}}$ are regions enclosed by γ_{\pm} respectively.

In the case when Ω is the unit circle, both problems GS_{\pm} are equivalent to the isoperimetric problem on the classical hyperbolic plane L^2 , where the answer is well known: isoperimetric loops are Euclidean circles. Moreover, for any loop $\gamma \subset L^2$ the following isoperimetric inequalities hold:

$$\text{Len}_{\pm}^2(\gamma) - 4\pi \text{Area}(U_{\gamma}) - \text{Area}^2(U_{\gamma}) \geq 0,$$

where the equality can be obtained only if γ is an isoperimetric loop.

Writing the geometrical statements GS_{\pm} in terms of optimal control theory and using the Pontryagin maximum principle and the tool of convex trigonometry proposed first in [2], we prove the following

Proposition. *Isoperimetric loops γ_{\pm} can be obtained from the polar set boundary $\partial\Omega^{\circ}$ by rotating through $\mp\pi/2$, stretching and transporting.*

For every pair (g_o, A_o) there are two families of isoperimetric loops, which can be found explicitly in terms of convex trigonometry. We can also propose a generalization of the isoperimetric inequalities in an implicit form. When Ω is the unit circle, our result is equivalent to the classical one.

References

1. *Gribanova I.A.* The quasihyperbolic plane // Sib. Math. J. 1999. V. 40, No. 2. P. 245–257.
2. *Lokutsievskiy L.V.* Convex trigonometry with applications to sub-Finsler geometry // Sb. Math. 2019. V. 210, No. 8. P. 120–148.
3. *Ardentov A.A., Lokutsievskiy L.V., Sachkov Yu.L.* Extremals for a series of sub-Finsler problems with 2-dimensional control via convex trigonometry // ESAIM: COCV. 2021. V. 27. P. 32–52.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ
С ПЕРЕХОДНЫМИ СЛОЯМИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ
ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА
И ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ*

Н. Н. Нефедов, В. Т. Волков

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

nefedov@phys.msu.ru, volkovvt@mail.ru

В докладе представлены результаты современных исследований сингулярно возмущенных задач реакция-диффузия-адвекция, базирующиеся на дальнейшем развитии асимптотического принципа сравнения (этот подход также называют асимптотическим методом дифференциальных неравенств). Обсуждается общая схема асимптотического метода дифференциальных неравенств (см. [1] и ссылки в этой работе) для периодических параболических задач, которая применяется к ряду новых случаев. Доказаны теоремы существования периодических решений с внутренними слоями, построены их асимптотические приближения и исследована устойчивость по Ляпунову таких решений.

Полученные результаты проиллюстрированы для уравнений типа уравнения Бюргерса, применяемого, например, для описания нелинейных волн в среде без дисперсии с модульной нелинейностью (модульной адвекцией):

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial |u|}{\partial x} - B(u, x, t) &= 0, \\ (x, t) \in \mathcal{D} &:= \{x \in (-1, 1); t \in \mathbb{R}\}, \\ u(-1, t; \varepsilon) &= h^{(-)}(t), \quad u(1, t; \varepsilon) = h^{(+)}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t; \varepsilon) &= u(x, t + T; \varepsilon), \quad x \in [-1, 1], \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, а функции $B(u, x, t)$, $h^{(-)}(t)$ и $h^{(+)}(t)$ достаточно гладкие и T -периодические по переменной t .

Полученные результаты применены к задаче с линейным периодическим источником (линейным усилением).

Асимптотический анализ для этого случая задачи (1) применен для построения асимптотического решения задачи граничного управления. Построено асимптотическое приближение граничного условия, при котором требуемый режим движения фронта достигается с заданной точностью.

Список литературы

1. Нефедов Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция-диффузия-адвекция: теория и применение // ЖВМиМФ. 2021. Т. 61, № 12. С. 2074–2094.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 18-11-00042).

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МИНИМАКСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

М. С. Никольский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

`mni@mi-ras.ru`

Важными источниками задач минимаксного типа являются теория игр и теория исследования операций. В этих теориях минимакс обычно выступает как наименьший гарантированный результат для данного игрока (участника конфликта) по отношению к действиям других игроков (участников конфликта).

В математической теории управления минимаксные задачи возникают, например, при желании учесть возмущения и помехи, которые обычно действуют на реальные управляемые объекты. Важным источником минимаксных задач также является теория дифференциальных игр.

Динамика управляемого объекта в минимаксных задачах управления описывается традиционной для математической теории управления моделью, в которой присутствует несколько управляющих векторов, находящихся в распоряжении N игроков (участников конфликта), где $N > 1$. Качество связки допустимых управлений игроков оценивается функционалом традиционного для математической теории управления вида.

При изучении минимаксных задач управления важными являются следующие задачи:

- 1) получение необходимых условий для исследуемого минимакса;
- 2) приближенное вычисление соответствующего минимакса;
- 3) существование исследуемого минимакса;
- 4) изучение аналитических свойств минимакса как функции от начального состояния управляемой системы.

Отметим, что в прилагаемом списке литературы работы [1–10] содержат материал, связанный с различными аспектами проблематики минимаксных задач управления.

Теперь мы изложим результаты работы [10]. Рассматривается конфликтно управляемая система вида

$$\dot{x} = A(x)u + b(x, v), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), $u \in \mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$), $v \in \mathbb{R}^q$ ($q \geq 1$), $A(x)$ — матрица размера $n \times p$, $b(x, v) \in \mathbb{R}^n$. На управляющий вектор u наложено ограничение $u \in P$, где P — выпуклый компакт в \mathbb{R}^p . На управляющий вектор v наложено ограничение $v \in Q$, где Q — компакт в \mathbb{R}^q .

Предполагается, что

- 1) элементы матричной функции $A(x)$ определены и локально липшицевы на \mathbb{R}^n , а координаты вектора $b(x, v)$ непрерывны на $\mathbb{R}^n \times Q$ и локально липшицевы по x на \mathbb{R}^n равномерно относительно $v \in Q$;
- 2) множество $b(x, Q)$ выпукло для каждого $x \in \mathbb{R}^n$.

Также предположим, что при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, $v \in Q$ выполнено известное условие А.Ф. Филиппова вида

$$\langle x, f(x, u, v) \rangle \leq c(1 + |x|^2),$$

где $f(x, u, v) = A(x)u + b(x, v)$, угловые скобки обозначают скалярное произведение в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , $|x|$ — длина вектора x , а c — некоторая неотрицательная константа.

Пусть для управляемой системы (1) заданы начальное условие $x(0) = x_0$ и отрезок времени $[0, T]$, где $T > 0$. Обозначим через U множество измеримых по Лебегу функций $u(t) \in P$, а через V множество измеримых по Лебегу функций $v(t) \in Q$ на отрезке $[0, T]$. Функции $u(\cdot) \in U$, $v(\cdot) \in V$ образуют пару допустимых управлений. Качество допустимой пары $(u(\cdot), v(\cdot))$ условимся оценивать функционалом вида

$$\varphi(x(T, u(\cdot), v(\cdot))), \quad (2)$$

где функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна на \mathbb{R}^n , а $x(t, u(\cdot), v(\cdot))$ — решение уравнения (1), соответствующее допустимой паре $(u(\cdot), v(\cdot))$ и начальному условию $x(0) = x_0$.

Мы будем считать, что управление $u(\cdot)$ находится в распоряжении управляющего субъекта, а управление $v(\cdot)$ моделирует помехи и возмущения, воздействующие на управляемый объект. При этом предполагается, что управляющий субъект стремится к минимизации функционала (2), а функция $v(\cdot)$ ему неизвестна. В такой ситуации естественно для управляющего субъекта в качестве оптимального результата рассматривать величину

$$\gamma = \min_{u(\cdot) \in U} \max_{v(\cdot) \in V} \varphi(x(T, u(\cdot), v(\cdot))). \quad (3)$$

Отметим важный для приложений случай, когда $\varphi(x) = |x - \xi|^2$, где ξ — фиксированный вектор из \mathbb{R}^n . Стремясь к минимизации такой функции, управляющий субъект стремится к тому, чтобы вектор $x(T, u(\cdot), v(\cdot))$ был как можно ближе к целевому вектору ξ .

При изучении величины γ из соотношения (3) важным является вопрос о корректности ее определения. Дело в том, что существование соответствующих максимумов и минимума в формуле (3) не очевидно. Этот вопрос, в частности, исследовался в работе [10]. Кратко изложим результаты работы [10].

При сделанных ранее предположениях обосновывается, что соответствующие максимумы и минимум достигаются в (3). Таким образом величина γ в (3) определена корректно.

Также рассматривался вопрос об аналитических свойствах величины γ как функции начального состояния управляемой системы (1). Обозначим вектор x_0 через y . В [10] обосновывается, что при сделанных предположениях функция $\gamma(y)$ непрерывна на \mathbb{R}^n . Также обосновывается локальная липшицевость функции $\gamma(y)$ на пространстве \mathbb{R}^n при добавочном требовании локальной липшицевости функции $\varphi(x)$ на \mathbb{R}^n .

Список литературы

1. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
2. Данскин Дж. Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружений. М.: Сов. радио, 1970.

3. Федоров В.В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
4. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002.
5. Отакулов С. Задачи управления ансамблями траекторий дифференциальных включений. Самарканд: Джизак, 2019.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
7. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
8. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. М.: ЛЕНАНД, 2012.
9. Никольский М.С. Об одной задаче минимизации разброса траекторий управляемого объекта // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. мат. и киберн. 2021. №3. С. 26–30.
10. Никольский М.С. Исследование одной минимаксной модели управления // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. и киберн. 2022. №1. С. 13–19.

СИММЕТРИЯ И АНАЛИТИКА ПРИ ОПИСАНИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ МАШИНЫ ДУБИНСА*

В. С. Пацко, А. А. Федотов

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия

patsko@imm.uran.ru

Под математической “машиной Дубинса” понимаем управляемый объект, движение которого описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \varphi, & \dot{y} &= \sin \varphi, & \dot{\varphi} &= u; \\ u &\in [u_1, u_2], & u_1 &= \text{const} < 0, & u_2 &= \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения на двумерной плоскости; u — скалярное управление. Угол φ отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки. Полагаем $\varphi \in (-\infty, \infty)$. Начальное условие: $t_0 = 0, x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0$.

В случае $u_1 = -1, u_2 = +1$ систему (1) назовем канонической.

Под допустимыми программными управлениями понимаем измеримые функции времени $t \rightarrow u(t)$, удовлетворяющие оговоренному геометрическому ограничению.

Множеством достижимости $G(t_f)$ в момент $t_f > 0$ назовем совокупность всех фазовых состояний $(x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f))^T$ системы (1), получаемых в момент t_f при помощи допустимых программных управлений из нулевого начального фазового состояния. Через $G_\varphi(t_f)$ обозначим двумерное φ -сечение множества $G(t_f)$.

*Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

Проводя численные исследования φ -сечений множества достижимости $G(t_f)$ при различных значениях u_1 и u_2 , авторы обнаружили, что они имеют одинаковую структуру с φ -сечениями множества достижимости канонической системы. Однако для каждого φ и t_f исходной системы следует подбирать φ -сечение канонической системы при том же φ , но при другом моменте окончания t_f^* . А именно, справедлива следующая формула:

$$G_\varphi(t_f) = \frac{u_1 - u_2}{2u_1u_2} G_\varphi^c(t_f^*) + 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} 1/u_2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_f^* = \frac{2u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1} + \varphi. \quad (2)$$

Здесь через $G_\varphi^c(t_f^*)$ обозначено φ -сечение множества достижимости канонической системы в момент t_f^* .

Формула (2) записана не в исходных координатах x, y , а в некоторых вспомогательных координатах X, Y . Ось X проходит через начало координат исходной системы и развернута против часовой стрелки на угол $\varphi/2$ относительно оси x . Центр вспомогательной системы находится в точке $x = \sin \varphi$, $y = 1 - \cos \varphi$. Вспомогательная система координат зависит от φ и не зависит от значений u_1, u_2, t_f .

Таким образом, множество $G_\varphi(t_f)$ связано с множеством $G_\varphi^c(t_f^*)$ при помощи аффинного преобразования. Параметры преобразования зависят от u_1, u_2, φ, t_f .

Дополнительно в процессе анализа структуры трехмерного множества достижимости $G(t_f)$ установлено свойство симметрии φ -сечений множества достижимости относительно оси X вспомогательной системы координат X, Y .

Для формулы (2) получено формальное математическое обоснование, опирающееся на принцип максимума Понтрягина. Практически использование формулы (2) позволяет свести построение φ -сечений множества достижимости исходной системы (1) (вообще говоря, несимметричной относительно значений u_1, u_2) к построению φ -сечений множества достижимости канонической системы (симметричной относительно u_1, u_2). При этом для канонической системы достаточно знать описание φ -сечений множества достижимости лишь при неотрицательных значениях φ . Если $\varphi < 0$, то соответствующие φ -сечения образуются из φ -сечений для $\varphi > 0$ при помощи зеркального отображения относительно оси x исходной системы координат.

В рамках канонической системы при $\varphi \geq 0$ дано аналитическое описание границы φ -сечений и приведена классификация возможных вариантов их структуры.

Список литературы

1. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Amer. J. Math. 1957. V. 79, No. 3. P. 497–516.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. ТИСУ. 2003. №3. С. 8–16.
5. Пацко В.С., Федотов А.А. Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, №1. С. 182–197.

COOPERATIVE DIFFERENTIAL GAMES ON NETWORKS

Leon Petrosyan^a, David Yeung^b, Yaroslavna Pankratova^a

^a*St. Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia*

^b*Hong Kong Shue Yan University, Hong Kong, China*

l.petrosyan@spbu.ru, dwkyeung@hksyu.edu, y.pankratova@spbu.ru

Consider a class of n -person differential games on a network. The players are connected in a network system. We use $N = \{1, 2, \dots, n\}$ to denote the set of players in the network. The nodes of the network are used to represent the players from the set N . We also denote the set of nodes by N and denote the set of all arcs in the network N by L . The arcs in L are $\text{arc}(i, j) \in L$ for players $i, j \in N$. For notational convenience, we denote the set of players connected to player i by $K(i) = \{j: \text{arc}(i, j) \in L\}$, for $i \in N$.

Let $x^i(\tau) \in \mathbb{R}^m$ be the state variable of player $i \in N$ at time τ , and $u^i(\tau) \in U^i \subset \mathbb{R}^k$ the control variable of player $i \in N$.

Each player $i \in N$ can cut the connection with any other player from the set $K(i)$ at any instant of time.

The state dynamics of the game is

$$\dot{x}^i(\tau) = f^i(x^i(\tau), u^i(\tau)), \quad x^i(t_0) = x_0^i, \quad \text{for } \tau \in [t_0, \infty) \text{ and } i \in N. \quad (1)$$

The function $f^i(x^i, u^i)$ is continuously differentiable in x^i and u^i . For notational convenience, we use $x(t)$ to denote the vector $(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$.

As usual in the classical differential game theory, we suppose that at each time instant $t \in [t_0, \infty)$ players $i \in N$ have information about this time instant and the state variable $x(t)$ and based on this information choose their controls and decision to cut or keep the connection with players from $K(i)$.

Let $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ and denote this game by $\Gamma(x_0)$.

The payoff function of player i depends on the state and control variables of this player and on the state variables of the players from the set $K(i)$, $m = 1, 2, \dots$. The payoff of player i is given by

$$K_i(x_0, u^1, \dots, u^n) = \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau)) d\tau, \quad i \in N; \quad (2)$$

if $K(i) = \emptyset$ (if player i has no connection with other players), then

$$K_i(x_0, u^1, \dots, u^n) = 0.$$

The term $h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau))$ is the instantaneous gain that player i can obtain through network links with player $j \in K(i)$.

The functions $h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau))$, for $j \in K(i)$ are positive.

From (2) we can see that the payoff of player i is computed as a sum of payoffs which he gets interacting with players $j \in N \setminus \{i\}$.

Cooperation and characteristic function. Consider the cooperative version of the game. The value of the characteristic function for the grand coalition N is defined as

the maximum value of the joint payoff

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau)) d\tau \quad (3)$$

subject to the dynamics (1).

Denote by

$$\bar{x}(t) = (\bar{x}^1(t), \bar{x}^2(t), \dots, \bar{x}^n(t)) \quad \text{and} \quad \bar{u}(t) = (\bar{u}^1(t), \bar{u}^2(t), \dots, \bar{u}^n(t))$$

the optimal cooperative trajectory and optimal cooperative control in the problem of maximizing (3) subject to (1). The maximized joint cooperative payoff $V(x_0, t_0, N)$ involving all players can then be expressed as

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N} \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} h_i^j(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau \\ &= \max_{u^1, u^2, \dots, u^n} \sum_{i \in N} \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau)) d\tau = V(x_0, t_0, N) \end{aligned} \quad (4)$$

subject to the dynamics (1).

Next, we consider distributing the cooperative payoff to the participating players under an agreeable scheme. Given that the contributions of individual players to the joint payoff through the linked players can be diverse, the Shapley value [2] (1953) provides one of the best solutions in attributing a fair gain to each player in a complex network. One of the contentious issues in using the Shapley value is the determination of the worth of subsets of players (characteristic function).

We present a new formulation of the worth of a coalition $S \subset N$. In computing the values of the characteristic function for coalitions, we evaluate the contributions of the players in the process of cooperation and maintain the cooperative strategies for all players along the cooperative trajectory. In particular, we evaluate the worth of the coalitions along the cooperative trajectory as

$$V(x_0, t_0, S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in K(i) \cap S} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} h_i^j(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau. \quad (5)$$

The idea of this approach was first proposed by Bulgakova and Petrosyan [1] (2019).

Note that the worth of a coalition S is measured by the sum of payoffs of players in the coalition in the cooperation process with the exclusion of the gains from players outside the coalition S . Thus, the characteristic function reflecting the worth of the coalition S in (5) is formulated along the cooperative trajectory $\bar{x}(t)$.

Similarly, the characteristic function at time $t \in [t_0, \infty]$ can be evaluated as

$$V(\bar{x}(t), t, S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in K(i) \cap S} \int_t^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} h_i^j(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau. \quad (6)$$

An important property of the above characteristic function as a measure of the worth of a coalition in the Shapley value is given below.

Proposition. *The characteristic function defined by (5) and (6) is convex.*

The properties of solutions are investigated.

References

1. *Bulgakova M., Petrosyan L.* About one multistage non-antagonistic network game // Vestn. Sankt-Peterb. Univ., Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr. 2019. V. 15, No. 4. P. 603–615.
2. *Shapley L.S.* A value for N -person games // Contributions to the Theory of Games / Ed. by H. Kuhn, A. Tucker. Princeton: Princeton Univ. Press, 1953. P. 307–317.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДВУХ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ В ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ*

Н. Н. Петров

Удмуртский университет, Ижевск, Россия

kma3@list.ru

В задачах конфликтного управления наряду с методами, ориентированными на построение оптимальных стратегий [1], существуют подходы, нацеленные на гарантированный результат. К таким подходам относятся, в частности, метод Понтрягина [2] и метод разрешающих функций, позволяющий эффективно использовать технику многозначных отображений для получения необходимых результатов [3]. В данной работе метод разрешающих функций применяется к исследованию одной задачи конфликтного взаимодействия группы преследователей и двух убегающих.

В пространстве \mathbb{R}^k ($k \geq 2$) рассматривается, дифференциальная игра $\Gamma(n+2)$ $n+2$ лиц: n преследователей P_1, \dots, P_n и двух убегающих E_1, E_2 . Движение каждого преследователя P_i описывается системой

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in V, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad (1)$$

а закон движения каждого убегающего E_j , $j = 1, 2$, имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + v, \quad v \in V, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad (2)$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ матричная функция порядка k . Здесь и далее $i \in I = \{1, \dots, n\}$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для убегающих E_1, E_2 выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Определение 1 [4]. Функция $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^k$ называется *рекуррентной по Зубову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $a, t \in \mathbb{R}^1$ существует $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которого справедливо неравенство

$$\|f(t + \tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon.$$

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания №075-01265-22-00, проект FEWS-2020-0010 и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-01-00293.

Предположение 1. Фундаментальная матрица Φ системы $\dot{z} = A(t)z$, $z(t_0) = E$ является рекуррентной по Зубову функцией, а ее производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$.

Предысторией $v_t(\cdot)$ функции $v(\cdot)$ в момент t назовем сужение функции v на отрезок $[t_0, t]$.

Определение 2. Будем говорить, что задана квазистратегия \widehat{U}_i преследователя P_i , если определено отображение $\widehat{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_{ij}^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегających E_j измеримую функцию $u_i(t) = \widehat{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V .

Определение 3. В игре $\Gamma(n+2)$ происходит поимка, если существуют момент $T_0 = T(z^0)$ и квазистратегии U_1, \dots, U_n преследователей P_1, \dots, P_n такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T_0]$, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (а) найдутся номера $l, m \in I$ ($m \neq l$), $j \in \{1, 2\}$ и моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0]$ такие, что $x_l(\tau_1) = y_j(\tau_1)$, $x_m(\tau_2) = y_j(\tau_2)$;
- (б) найдутся номера $l, m \in I$ ($m \neq l$) и моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0]$ такие, что $x_l(\tau_1) = y_1(\tau_1)$, $z_m(\tau_2) = y_2(\tau_2)$.

Замечание 1. Условие поимки означает, что либо два каких-то преследователя осуществляют поимку одного убегającego, либо один преследователь ловит одного убегającego, а второй — другого. Такая ситуация может возникнуть, если система состоит из двух блоков и для того, чтобы ее вывести из строя, нужно либо уничтожить один из блоков, либо повредить оба блока.

Обозначим через $\text{Int}X$ и $\text{co}X$ внутренность и выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$ соответственно.

Теорема. Пусть существует множество $I_0 \subset I$, $|I_0| = n - 2$, такое, что для всех $l \in I_0$

$$\text{Int co}\{x_i^0, i \in I_0, i \neq l\} \cap \text{co}\{y_1^0, y_2^0\} \neq \emptyset. \quad (3)$$

Тогда в игре $\Gamma(n+2)$ происходит поимка.

Следствие 1. Пусть $A(t) = 0$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$ и существует множество $I_0 \subset I$, $|I_0| = n - 2$, для которого выполнено условие (3). Тогда в игре $\Gamma(n+2)$ происходит поимка.

В данном случае $\Phi(t) = E$ для всех $t \geq t_0$ и поэтому $\Phi(t)$ является рекуррентной.

Следствие 2. Пусть A — постоянная матрица, все собственные числа которой являются простыми и чисто мнимыми, и существует множество $I_0 \subset I$, $|I_0| = n - 2$, для которого выполнено условие (3). Тогда в игре $\Gamma(n+2)$ происходит поимка.

Действительно, в данном случае фундаментальная матрица $\Phi(t)$ является рекуррентной.

Пример. Определим множество $F = (0, 2\pi) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (2\pi n^2, 2\pi n^2 + 2\pi)$. Пусть в системах (1), (2) $t_0 = 0$ и матрица $A(t)$ имеет вид $A(t) = a(t)E$, где

$$a(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in F, \\ \sin t, & \text{если } t \notin F. \end{cases}$$

Тогда матрица $\Phi(t)$ является рекуррентной [5]. Поэтому, если начальные условия таковы, что выполнены условия теоремы, в игре $\Gamma(n+2)$ происходит поимка.

Список литературы

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974.
2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2.
3. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
4. Zubov V.I. К теории рекуррентных функций // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 4. С. 532–560.
5. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games // J. Optim. Theory Appl. 2019. V. 182, No. 1. P. 417–429.

GRAPE METHOD FOR OPEN QUANTUM SYSTEMS DRIVEN BY COHERENT AND INCOHERENT CONTROLS*

Vadim Petruhanov^{a,b}, Alexander Pechen^{a,c}

^a*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*

^c*National University of Science and Technology "MISIS", Moscow, Russia*

vadim.petrukhanov@gmail.com, apechen@gmail.com

One of important tools for the development of quantum technologies is quantum control, which studies methods of operation on individual quantum systems [1]. Under experimental conditions controlled quantum systems are often not isolated from the environment, so that they appear to be open quantum systems. On the one hand, the environment has a destructive effect on the state of the system, but on the other hand, it opens new opportunities for active control of the quantum system, for example via incoherent control [2, 3]. In quantum control various optimization problems are considered. Although in some cases the solution for the optimal shape of the control can be obtained analytically, often it is not the case and numerical optimization methods are needed. A large class of methods includes gradient-based numerical optimization algorithms, one of which is the GRAdient Ascent Pulse Engineering (GRAPE) developed originally for the design of NMR pulse sequences [4] and later applied to various problems (see, e.g., [5, 6]).

In this talk, we consider a generalization of the GRAPE method to the case of open quantum systems driven by coherent and incoherent controls [7]. We obtain an analytic expression for the gradient of a Mayer-type functional with respect to a piecewise constant control for general N -level quantum systems. In more detail a one-qubit system is considered. This case is remarkable, because due to low dimension the corresponding 3×3 matrix exponentials can be analytically diagonalized; to this

*This talk presents the work supported in part by the Russian Federation represented by the Ministry of Science and Higher Education under grant no. 075-15-2020-788 and by the Russian Science Foundation under grant no. 22-11-00330.

end we compute the eigenvalues of the right-hand side matrix of the system evolution equation. It was found that in the case of constant coherent and incoherent controls $u \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{R}_+$, the half-plane $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ni (u, n)$ can be divided into two domains with different dynamics, similar to the phase diagram. In suitable coordinates, the boundary between the two domains is a plane cubic curve with cusp. The performance of the algorithm is illustrated for the problem of steering the system from a given initial state to a given final state in a fixed time for systems consisting of a single qubit and two qubits. Moreover, we compute the gradient and Hessian (in the sense of Fréchet) of the objective functional with respect to controls in the functional space L^2 , without piecewise constant assumption on the controls.

References

1. *Glaser S.J. et al.* Training Schrödinger's cat: quantum optimal control // Eur. Phys. J. D. 2015. V. 69. P. 279.
2. *Pechen A., Rabitz H.* Teaching the environment to control quantum systems // Phys. Rev. A. 2006. V. 73. Pap. 062102.
3. *Pechen A.N.* Engineering arbitrary pure and mixed quantum states // Phys. Rev. A. 2011. V. 84. Pap. 042106.
4. *Khaneja N. et al.* Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithms // J. Magnetic Resonance. 2005. V. 172. P. 296–305.
5. *De Fouquieres P., Schirmer S.G., Glaser S.J., Kuprov I.* Second order gradient ascent pulse engineering // J. Magnetic Resonance. 2011. V. 212. P. 412–417.
6. *Pechen A.N., Tannor D.J.* Quantum control landscape for a Lambda-atom in the vicinity of second-order traps // Isr. J. Chem. 2012. V. 52. P. 467–472.
7. *Petruhanov V.N., Pechen A.N.* Gradient ascent pulse engineering for open quantum systems driven by coherent and incoherent controls (in preparation).

DYNAMICS OF A VOTING PROCESS BASED ON THE BOUNDED CONFIDENCE PRINCIPLE

Sergei Yu. Pilyugin

St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

sergeipil47@mail.ru

We study a nonlinear dynamical system modeling the following problem of opinion dynamics. A society consisting of N agents has to choose between two options, 1 and -1 . Let $v_k^n \in [-1, 1]$ be the opinion of the agent with index $k \in \{1, \dots, N\}$ at time moment $n = 0, 1, \dots$, and let

$$V^n = (v_1^n, \dots, v_N^n) \tag{1}$$

be the array of opinions at time moment n .

Following the bounded confidence principle (in the process of electoral decision, voters are influenced by individuals sharing an opinion close to their own) formulated

by Hegselmann and Krause [1], the dynamical system is generated by a mapping Φ defined in two steps.

Fix numbers $\varepsilon \in (0, 1)$ (confidence level) and $h \in (0, 1)$ and consider the sets

$$J(v_k^n) = \{l \in \{1, \dots, N\} : |v_l^n - v_k^n| \leq \varepsilon\}, \quad k \in \{1, \dots, N\}, \quad n \geq 0.$$

The set $J(v_k^n)$ is the set of indices of agents whose opinions influence agent k when he modifies his own opinion at time moment n .

Denote by $I(v_k^n)$ the cardinality of the (nonempty) set $J(v_k^n)$.

At the first step of definition of Φ , we fix an array V^n of the form (1) and define an auxiliary array

$$W(V^n) = (w_1(V^n), \dots, w_N(V^n)),$$

where

$$w_k(V^n) = v_k^n + \frac{h}{I(v_k^n)} \sum_{l \in J(v_k^n)} v_l^n, \quad k = 1, \dots, N.$$

It is possible that, for some k , $w_k(V^n) \notin [-1, 1]$, so that a kind of “norming” must be applied as the second step of definition of Φ . We consider two “normings” which give us dynamical systems with substantially different dynamics.

In [2], a “cutting” procedure was suggested; the new opinion value v_k^{n+1} is obtained by replacing the value $w_k(V^n)$ less than -1 by $v_k^{n+1} = -1$, and the value $w_k(V^n)$ greater than 1 is replaced by $v_k^{n+1} = 1$. Finally, $v_k^{n+1} = w_k(V^n)$ if $|w_k(V^n)| \leq 1$.

The dynamics of the appearing dynamical system is completely described in [2]. It is shown that if $\varepsilon \leq 1/2$, then any trajectory tends to a fixed point as time goes to infinity. All possible fixed points are characterized. It is shown that any fixed point $P = (p_1, \dots, p_N)$ with $|p_k| = 1$, $k \in \{1, \dots, N\}$, is attracting, while all the remaining fixed points are Lyapunov unstable. Modifications of the model studied in [2] are considered in the recent papers [3] (where the average of values v_l^n is replaced by the average of values $i(v_l^n)$ for a wide class of influence functions i) and [4] (where the finite set of agents is replaced by a set indexed by the continuum $[0, 1]$).

We note an important property of the system: the results of the voting process (-1 wins or 1 wins) can be different for the same initial array of opinions V^0 for different values of the confidence level ε .

In [5], we study a model similar to that considered in [2] but with a different norming. Instead of “cutting” the values obtained at the first step, for $W(V^n) \neq 0$, we divide the values w_k^n by the maximum absolute value of w_l^n to get v_k^{n+1} .

The main results of [5] are as follows: we show that if

$$\varepsilon(N - 1) < 1, \tag{2}$$

then any trajectory tends to a fixed point as time goes to infinity; all fixed points in this case are described; it is shown that both fixed points $(-1, \dots, -1)$ and $(1, \dots, 1)$ are attracting while all the remaining fixed points are Lyapunov stable but not attracting; an example of a system is given for which condition (2) is not satisfied and there exists an unstable fixed point.

References

1. *Hegselmann R., Krause U.* Opinion dynamics and bounded confidence: Models, analysis and simulation // *J. Artif. Soc. Soc. Simul.* 2002. V. 5. P. 1–33.
2. *Pilyugin S.Yu., Campi M.C.* Opinion formation in voting processes under bounded confidence // *Netw. Heterog. Media.* 2019. V. 14, No. 3. P. 617–632.
3. *Bodunov N.A., Pilyugin S.Yu.* Convergence to fixed points in one model of opinion dynamics // *J. Dyn. Control Syst.* 2021. V. 27. P. 617–623.
4. *Pilyugin S.Yu., Sabirova D.Z.* Dynamics of a continual sociological model // *Vestn. Sankt-Peterb. Univ., Mat.* 2021. V. 54, No. 2. P. 196–205.
5. *Monakov G., Pilyugin S., Tarasov A., Tarasova M.* A model of voting dynamics under bounded confidence with nonstandard norming (in preparation).

ВЯЗКОСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ–БЕЛЛМАНА ДЛЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА*

А. Р. Плаксин

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия

`a.r.plaksin@gmail.com`

Ранее в [1] был развит минимаксный подход [2] к понятию обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными, возникающих в задачах динамической оптимизации систем нейтрального типа в форме Дж. Хейла. Цель данной работы заключается в развитии вязкостного подхода [3] к понятию обобщенных решений таких уравнений. При этом, следуя идеям из [4, 5], для получения необходимых результатов мы предлагаем рассматривать уравнения Гамильтона–Якоби не на пространстве липшицевых функций, как это было в [1], а на более широком пространстве кусочно липшицевых функций.

Пусть $h > 0$, $I \in \mathbb{N}$ и $\vartheta = Ih$. Функцию $w(\cdot): [-h, 0) \mapsto \mathbb{R}^n$ называем *кусочно липшицевой*, если существуют такие $-h = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k = 0$, что $w(\cdot)$ липшицева на каждом интервале $[\xi_i, \xi_{i+1})$, $i \in \overline{1, k-1}$. Множество таких кусочно липшицевых функций обозначим через PLip . Обозначим также через PLip_* множество кусочно липшицевых функций $w(\cdot)$, для которых существует $\delta = \delta(w(\cdot)) > 0$ такое, что $w(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на $[-h, -h + \delta]$. Положим

$$\mathbb{G} = (0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \text{PLip}, \quad \mathbb{G}_* = \bigcup_{i=0}^{I-1} (ih, (i+1)h) \times \mathbb{R}^n \times \text{PLip}_*.$$

Определим нормы

$$\|w(\cdot)\|_1 = \int_{-h}^0 \|w(\xi)\| \, d\xi, \quad \|w(\cdot)\|_\infty = \sup_{\xi \in [-h, 0)} \|w(\xi)\|, \quad w(\cdot) \in \text{PLip}.$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-10070, <https://rscf.ru/project/21-71-10070/>).

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: для каждой тройки $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ необходимо минимизировать по $u(\cdot)$ функционал

$$J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)) = \sigma(x(\vartheta)),$$

где $x(\cdot)$ — движение динамической системы, описываемой уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла

$$\frac{d}{dt}(x(t) - g(t, x(t-h))) = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad t \in [\tau, \vartheta], \quad (1)$$

при начальном условии $x(\tau) = z$, $x(t) = w(t - \tau)$, $t \in [\tau - h, \tau]$. Здесь t — время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $u(t) \in \mathbb{U}$ — управляющее воздействие, $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ — компакт. Функция $f(t, x, y, u) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, \vartheta]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{U}$ непрерывна, локально липшицева по второму и третьему аргументам и удовлетворяет условию подлинейного роста (см. условия (f_1) – (f_3) в [4]). Функция $g(t, x) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, \vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$, непрерывно дифференцируема. Функция $\sigma(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, локально липшицева. При указанных условиях каждая допустимая (измеримая) реализация управления $u(\cdot): [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$ единственным образом определяет движение $x(\cdot)$ — кусочно липшицеву функцию, определенную на $[\tau - h, \vartheta]$, такую, что функция $y(t) = x(t) - g(t, x(t-h))$, $t \in [\tau, \vartheta]$, липшицева и уравнение (1) выполняется почти всюду. Множество допустимых реализаций управления обозначаем через \mathcal{U}_τ . Функционал оптимального результата для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\rho(\tau, z, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau} J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)).$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнение Гамильтона–Якоби с коинвариантами (ci-) производными (см. определение в [1])

$$\begin{aligned} & \partial_{\tau, w}^{\text{ci}} \varphi(\tau, z, w(\cdot)) + \langle \partial_{\tau, w}^{\text{ci}} \hat{g}(\tau, w(\cdot)), \nabla_z \varphi(\tau, z, w(\cdot)) \rangle + \\ & + \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(\tau, z, w(-h), u), \nabla_z \varphi(\tau, z, w(\cdot)) \rangle = 0, \quad (\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\varphi(\vartheta, z, w(\cdot)) = \sigma(z), \quad (z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \text{PLip}, \quad (2)$$

где $\hat{g}(\tau, w(\cdot)) = g(\tau, w(-h))$. В отличие от уравнений Гамильтона–Якоби для систем с запаздыванием (см. [6]) в уравнении (1) появляется новое слагаемое, не определенное на всем \mathbb{G} . Поэтому мы рассматриваем это уравнение на подпространстве \mathbb{G}_* , в каждой точке которого в силу условий на функцию g производная $\partial_{\tau, w}^{\text{ci}} \hat{g}(\tau, w(\cdot))$ существует.

Решение задачи (1), (2) будем искать в классе функционалов $\varphi \in \Phi$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (а) для любых $(\tau, w(\cdot)) \in [0, \vartheta] \times \text{Lip}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ функция $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t, w(-0), w(\cdot))$, $t \in [\tau, \vartheta]$, непрерывна;
- (б) для любого $\alpha > 0$ существует такое $\lambda_\varphi > 0$, что

$$\begin{aligned} & |\varphi(\tau, z, w(\cdot)) - \varphi(\tau, z', w'(\cdot))| \leq \lambda_\varphi v_i(\tau, z - z', w(\cdot) - w'(\cdot)), \\ & \tau \in (ih, (i+1)h], \quad i \in \overline{0, I-1}, \quad (z, w(\cdot)), (z', w'(\cdot)) \in P(\alpha), \end{aligned}$$

где $P(\alpha) = \{(z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \text{PLip}: \|z\| \leq \alpha, \|w(\cdot)\|_\infty \leq \alpha\}$ и

$$v_i(\tau, z, w(\cdot)) = \|z\| + \|w(\cdot)\|_1 + \|w(-h)\| + \|w(ih - \tau)\|.$$

Отметим, что если функционал $\varphi \in \Phi$ ci -дифференцируем в точке $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*$, то функция $\tilde{\varphi}(t, x) = \varphi(t, x, \kappa_t(\cdot))$, $(t, x) \in [\tau, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, где $\kappa(t) = w(t - \tau)$, $t \in [\tau - h, \tau)$, $\kappa(t) = z$, $t \in [\tau, \vartheta]$, будет иметь правую производную $\partial^+ \tilde{\varphi}(\tau, z) / \partial \tau$ и градиент $\nabla_z \tilde{\varphi}(\tau, z)$ в точке (τ, z) , а также удовлетворять следующему уравнению Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial^+ \tilde{\varphi}(\tau, z)}{\partial \tau} + \langle \partial_{\tau, w}^{\text{ci}} \hat{g}(\tau, w(\cdot)), \nabla_z \tilde{\varphi}(\tau, z) \rangle + H(\tau, z, w(-h), \nabla_z \tilde{\varphi}(\tau, z)) = 0.$$

Тогда, следуя классическому понятию вязкостного решения [3], естественным образом можно прийти к следующему определению.

Определение 1. Функционал $\varphi: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ называется *вязкостным решением задачи* (1), (2), если он удовлетворяет включению $\varphi \in \Phi$, условию (2) и следующим условиям:

- (i) для любых $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_0$, $\psi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ и $\delta > 0$ если

$$\varphi(\tau, z, w(\cdot)) - \psi(\tau, z) \leq \varphi(t, x, \kappa_t(\cdot)) - \psi(t, x), \quad (t, x) \in O_\delta^+(\tau, z),$$

то

$$\frac{\partial \psi(\tau, z)}{\partial \tau} + \langle \partial_{\tau, w}^{\text{ci}} g(\tau, w(\cdot)), \nabla_z \psi(\tau, z) \rangle + \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(\tau, z, w(-h), u), \nabla_z \psi(\tau, z) \rangle \leq 0;$$

- (ii) для любых $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_0$, $\psi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ и $\delta > 0$ если

$$\varphi(\tau, z, w(\cdot)) - \psi(\tau, z) \geq \varphi(t, x, \kappa_t(\cdot)) - \psi(t, x), \quad (t, x) \in O_\delta^+(\tau, z),$$

то

$$\frac{\partial \psi(\tau, z)}{\partial \tau} + \langle \partial_{\tau, w}^{\text{ci}} g(\tau, w(\cdot)), \nabla_z \psi(\tau, z) \rangle + \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(\tau, z, w(-h), u), \nabla_z \psi(\tau, z) \rangle \geq 0.$$

Здесь $\kappa(t) = w(t - \tau)$, $t \in [\tau - h, \tau)$, $\kappa(t) = z$, $t \in [\tau, \vartheta]$,

$$O_\delta^+(\tau, z) = \{(t, x) \in [\tau, \tau + \delta] \times \mathbb{R}^n: \|x - z\| \leq \delta\}.$$

Теорема 1. А. Функционал оптимального результата ρ является единственным вязкостным решением задачи (1), (2).

Б. Функционал оптимального результата ρ (вязкостное решение задачи (1), (2)) в точках ci -дифференцируемости удовлетворяет уравнению (1).

В. Если функционал $\varphi \in \Phi$ ci -дифференцируем всюду на \mathbb{G}_* , удовлетворяет уравнению (1) и условию (2), то он совпадает с функционалом оптимального результата ρ (вязкостным решением задачи (1), (2)).

Список литературы

1. Плаксин А.Р. О минимаксном решении уравнений Гамильтона–Якоби для систем нейтрального типа: случай неоднородного Гамильтониана // Диф. уравнения. 2021. Т. 57, № 11. С. 1536–1545.
2. Subbotin A.I. Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective. Berlin: Birkhäuser, 1995.
3. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277, No. 1. P. 1–42.

4. *Plaksin A.* Minimax and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations for Time-Delay Systems // *J. Optim. Theory Appl.* 2020. V. 187, No. 1. P. 22–42.
5. *Plaksin A.* Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs Equations for Time-Delay Systems // *SIAM J. Control Optim.* 2021. V. 59, No. 3. P. 1951–1972.
6. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011.

УЗЕЛ ХОПФА КАК ПОЛНЫЙ ИНВАРИАНТ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ МОРСА–СМЕЙЛА НА 3-СФЕРЕ*

О. В. Починка

НИУ ВШЭ, Н. Новгород, Россия

`olga-pochinka@yandex.ru`

В работе [1] получена полная топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на произвольных замкнутых 3-многообразиях. Однако, будучи рассчитанным на широкий класс потоков, описание инвариантов занимает основную часть классификации. В некоторых частных случаях инварианты зачастую находятся более естественным образом, без рассмотрения их как части общности. Так, в настоящей работе устанавливается, что для диффеоморфизмов 3-сферы, неблуждающее множество которых состоит в точности из четырех точек, полным инвариантом является класс эквивалентности узла Хопфа на многообразии $S^2 \times S^1$. Рассматриваемые диффеоморфизмы делятся на два класса, в одном из которых диффеоморфизмы имеют в точности одну седловую точку, в другом — две.

Диффеоморфизмы первого класса являются диффеоморфизмами Пикстона [3]. Замыкание седловых сепаратрис таких диффеоморфизмов может быть диким, а их топологическая сопряженность полностью определяется эквивалентностью узлов Хопфа, являющихся проекцией одномерной седловой сепаратрисы [1]. В работе [4] найдены инварианты первого порядка для узлов Хопфа. Это позволяет моделировать счетные семейства попарно неэквивалентных узлов Хопфа и, следовательно, бесконечное множество топологически несопряженных диффеоморфизмов Пикстона.

Диффеоморфизмы второго класса с необходимостью имеют некомпактные гетероклинические кривые [5], и в рассматриваемом классе также существуют диффеоморфизмы с дико вложенными седловыми сепаратрисами [2]. Предполагается доказать, что для диффеоморфизмов с единственной некомпактной гетероклинической кривой полным топологическим инвариантом также является вложение узла Хопфа в многообразие $S^2 \times S^1$, являющегося проекцией одномерной седловой сепаратрисы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, созданной в рамках мегагранта Министерства науки и высшего образования РФ (проект 075-15-2019-1931).

Список литературы

1. *Bonatti C., Grines V., Pochinka O.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // *Duke Math. J.* 2019. V. 168. No. 13. P. 2507–2558.
2. *Bonatti C., Grines V.* Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // *J. Dyn. Control Syst.* 2000. V. 6, No. 4. P. 579–602.
3. *Pixton D.* Wild unstable manifolds // *Topology.* 1977. V. 16. P. 167–172.
4. *Akhmet'ev P., Medvedev T.V., Pochinka O.* On the number of the classes of topological conjugacy of Pixton diffeomorphisms // *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2021. V. 20. Pap. 76.
5. *Grines V.Z., Zhuzhoma E.V., Medvedev V.S.* On Morse–Smale diffeomorphisms with four periodic points on closed orientable manifolds // *Math. Notes.* 2003. V. 74, No. 3. P. 352–366.

ATTAINABLE SETS FOR CONTROL SYSTEMS ON A FREE CARNOT GROUP WITH POSITIVE CONTROLS*

Alexey Podobryaev

A.K. Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalessky, Russia
alex@alex.botik.ru

We consider a control system on a 2-step free Carnot group with positive controls in the first layer of the corresponding Lie algebra. We suggest an approach to finding the attainable set for such a control system. This attainable set has a probability interpretation.

Definition 1. The set $G = \mathbb{R}^r \times \Lambda^2 \mathbb{R}^r$ equipped with the multiplication rule

$$(x, y) \cdot (x', y') = (x + x', y + y' + x \wedge x'), \quad x, x' \in \mathbb{R}^r, \quad y, y' \in \Lambda^2 \mathbb{R}^r,$$

is called a *2-step free Carnot group of rank r* .

We consider the left-invariant control system

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = x \wedge u, \quad u = (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^r, \quad u_1, \dots, u_r \geq 0.$$

Our goal is to describe the attainable set \mathcal{A} from the point $(0, 0)$ for this control system.

Definition 2. For any set of positive numbers (c_1, \dots, c_r) , the map

$$D_{c_1, \dots, c_r} : G \rightarrow G, \quad D_{c_1, \dots, c_r}(x, y) = (c_i x_i, c_i c_j y_{ij}), \quad i = 1, \dots, r, \quad i < j,$$

is called a *dilation*.

Note that dilations preserve our control system. Denote by $\mathcal{A}_1 = \{(x, y) \in \mathcal{A} \mid x = (1, \dots, 1)\}$ the section of the attainable set. Since \mathcal{A} coincides with the closure of the orbit of \mathcal{A}_1 with respect to dilations, it is sufficient to describe the section \mathcal{A}_1 . Let us consider the set $\mathcal{B} = \frac{1}{2}((1, \dots, 1)^T + \mathcal{A}_1)$ instead of the set \mathcal{A}_1 .

*The work is supported by the Russian Science Foundation under grant 22-11-00140 and performed in the Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences.

H. Abels and È.B. Vinberg [1] suggested a probability interpretation of the set \mathcal{B} . We give an alternative proof of the following theorem based on the geometric control theory [2].

Theorem 1 [1]. *Let ξ_1, \dots, ξ_r be independent random variables such that $P(\xi_1 = \dots = \xi_r) = 0$. The points of the set \mathcal{B} have the coordinates $p_{ij} = \frac{1}{2}(y_{ij} + 1) = P(\xi_i < \xi_j)$.*

In [1] the attainable set \mathcal{A} was regarded as a 2-step nilpotent Lie semigroup of rank r and the set \mathcal{B} was described for $r = 3$ with the help of an algebraic method. The result implies some non-obvious bounds for the probabilities $P(\xi_i < \xi_j)$. But it seems that the method is inapplicable in the more complex cases $r > 3$.

We propose a constructive and algorithmic approach for $r = 3$. The conjecture is that this method will also be useful for $r > 3$.

The idea is to consider the time-optimal problem on the group G and then to describe extremal trajectories that come to the boundary of the attainable set. These are optimal trajectories for a reduced problem. We find extremal trajectories with the help of the Pontryagin maximum principle [2, 3]. Then, the second order optimality conditions due to A.A. Agrachev and R.V. Gamkrelidze [4] distinguish optimal trajectories. More precisely, we get the number of control switchings for different kinds of optimal trajectories (bang–bang, singular and mixed). This implies a parametrization of the boundary $\partial\mathcal{A}$. The answer is given in terms of the set \mathcal{B} .

Theorem 2. 1. *The set \mathcal{B} for $r = 3$ is a curved polyhedron carved from the cube $[0, 1]^3$ with (p_{12}, p_{23}, p_{31}) -coordinates by the surfaces*

$$p_{12} + p_{23}p_{31} = 1, \quad (1 - p_{12}) + (1 - p_{23})(1 - p_{31}) = 1$$

and surfaces obtained from these surfaces by any permutations of these variables.

2. *The vertices, edges and faces of \mathcal{B} correspond to the endpoints of the extremal trajectories of the time-optimal problem with at most two, three and four switchings, respectively.*

For a free 2-step Carnot group of rank 4, we get the following upper bound for the number of switchings for extremal controls such that the ends the corresponding trajectories come to the boundary of the attainable set.

Theorem 3. *The boundary of the set \mathcal{B} for $r = 4$ can be obtained by extremal trajectories of the time-optimal problem with at most eight switchings of the control.*

References

1. Abels H., Vinberg È.B. On free two-step nilpotent Lie semigroups and inequalities between random variables // J. Lie Theory. 2019. V. 29, No. 1. P. 79–87.
2. Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. Control theory from the geometric viewpoint. Berlin: Springer, 2004. (Encycl. Math. Sci.; V. 87).
3. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The mathematical theory of optimal processes. Oxford: Pergamon Press, 1964.
4. Agrachev A.A., Gamkrelidze R.V. Symplectic geometry for optimal control // Nonlinear controllability and optimal control. New York: M. Dekker, 1990. P. 263–277. (Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.; V. 133).

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА

М. А. Погребняк

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия*

pogrebnyakmaksim@mail.ru

В работе исследуется математическая модель движения транспортного потока, которая описывает движение $N \in \mathbb{N}$ автомобилей и имеет вид системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n(t) &= R_n \left[a_n \left(\frac{v_{\max} - \dot{x}_{n-1}(t - \tau)}{1 + e^{k_n(x_n(t) - x_{n-1}(t - \tau) + s_n)}} + \dot{x}_{n-1}(t - \tau) - \dot{x}_n(t) \right) \right] + \\ &+ (1 - R_n) \left[q_n \left(\frac{\dot{x}_n(t)[\dot{x}_{n-1}(t - \tau) - \dot{x}_n(t)]}{x_{n-1}(t - \tau) - x_n(t) - l_{n,\varepsilon}} \right) \right], \\ x_n(t) &= \lambda_n, \quad \dot{x}_n(t) = v_n \quad \text{при } t \in [-\tau, 0], \end{aligned}$$

где $\Delta x_n(t, \tau) = x_{n-1}(t - \tau) - x_n(t)$ — расстояние между соседними автомобилями; τ — время реакции водителя; $a_n > 0$ и $q_n > 0$ — коэффициенты, описывающие технические характеристики автомобиля, отвечающие за интенсивность его разгона и торможения соответственно; $v_{\max} > 0$ — максимальная желаемая скорость; $l_{n,\varepsilon} > 0$ — безопасное расстояние вида $l_{n,\varepsilon} = l_n - \varepsilon$, где ε — добавка, служащая для предотвращения торможения автомобиля с неограниченной скоростью при $\Delta x_n(t, \tau)$, достаточно близком к l_n ; $k_n > 0$ и $s_n > 0$ — параметры, описывающие поведения водителя: k_n показывает, насколько плавно водитель преследующего автомобиля подстраивает свою скорость под впереди идущий, а s_n отражает расстояние, начиная с которого влияние впереди идущего автомобиля перестает превалировать; λ_n — начальное положение автомобиля; v_n — начальная скорость автомобиля, а R_n — релейная функция вида

$$R_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x_n(t, \tau) > \frac{\dot{x}_n^2(t)}{2\mu g} + l_n, \\ 0, & \text{если } \Delta x_n(t, \tau) \leq \frac{\dot{x}_n^2(t)}{2\mu g} + l_n, \end{cases}$$

где μ — коэффициент трения, а g — ускорение свободного падения. Функция R_n описывает переключение “разгон–торможение”.

Для модели был проведен анализ устойчивости равномерного режима движения, при котором все автомобили двигаются с одинаковой скоростью v_{\max} на расстояниях $\Delta c_n = c_n - c_{n-1}$ друг от друга, где c_n — убывающая последовательность. Для любой убывающей последовательности c_n существует решение системы вида

$$x_n(t) = c_n + v_{\max} t.$$

Устойчивость такого решения зависит от знаков выражений

$$d_n = -\tau v_{\max} + c_n - c_{n-1} - l_{n,\varepsilon}.$$

Справедлива следующая

Теорема. *Если для всех n выполняется неравенство $d_n > 0$, то равномерный режим устойчив. Если хотя бы при одном каком-то i выполняется неравенство $d_i \leq 0$, то равномерный режим неустойчив.*

Из теоремы следует, что если все автомобили потока двигаются на довольно большом расстоянии друг от друга, то такой режим движения устойчив. Устойчивость теряется при увеличении скорости v_{\max} , времени реакции водителя τ , безопасного расстояния между автомобилями l_n или при сокращении расстояния между двумя соседними автомобилями Δc_n .

АНОРМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В СУБРИМАНОВОЙ $(2, 3, 5, 8)$ -ЗАДАЧЕ

Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова

*Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН,
Переславль-Залесский, Россия*

yusachkov@gmail.com, efsachkova@mail.ru

Анормальные траектории представляют особый интерес для субримановой геометрии, так как вблизи них субриманова метрика имеет наиболее сложные особенности [1–3]. Важные открытые вопросы в субримановой геометрии — гладкость анормальных кратчайших и описание множества, заполненного анормальными траекториями, выходящими из фиксированной точки. Так, гипотеза Сарда в субримановой геометрии утверждает, что это множество имеет меру нуль.

В данном докладе рассматриваются это и другие родственные свойства указанного множества для левоинвариантной субримановой задачи с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$. Исследуется также глобальная и локальная оптимальность анормальных траекторий, получена их явная параметризация.

Пусть G — связная односвязная свободная нильпотентная группа Ли ранга 2 глубины 4. Ее алгебра Ли имеет базис X_1, \dots, X_8 с таблицей умножения

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3, & [X_1, X_3] &= X_4, & [X_2, X_3] &= X_5, & [X_1, X_4] &= X_6, \\ [X_2, X_4] &= [X_1, X_5] &= X_7, & [X_2, X_5] &= X_8. \end{aligned}$$

Рассмотрим левоинвариантную субриманову структуру на G , заданную ортонормированным репером (X_1, X_2) . В докладе будут представлены следующие результаты для этой субримановой структуры [4–6]:

- (1) явная параметризация анормальных траекторий распределения $D = \text{span}(X_1, X_2)$;
- (2) структура множества в G , заполненного анормальными траекториями, выходящими из единицы группы G ;
- (3) локальная и глобальная оптимальность анормальных траекторий.

Список литературы

1. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Math. Surv. Monogr.; V. 91).
2. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
3. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2019. (Cambridge Stud. Adv. Math.; V. 181).
4. *Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф.* Вырожденные аномальные траектории в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8) // Диф. уравнения. 2017. Т. 53, № 3. С. 362–374.
5. *Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф.* Структура аномальных экстремалей в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8) // Мат. сб. 2020. Т. 211, № 10. С. 112–138.
6. *Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф.* Аномальные траектории в субримановой (2, 3, 5, 8)-задаче (направлено для публикации).

A NONLINEAR DIFFERENTIAL GAME OF l -CAPTURE

Bahrom Samatov, Ulmasjon Soyibboev

Namangan State University, Namangan, Uzbekistan

samatov57@inbox.ru, ulmasjonsoyibboev@gmail.com

We have studied the l -capture problem in a nonlinear differential game with two players, a pursuer and an evader, whose motions occur in a dynamic flow field with various influence in the space \mathbb{R}^n . Geometric constraints are imposed on the controls of the players. In order for the problem to be solved, a convergence strategy, which is constructed depending on the Krasovsky–Pontryagin formalization and Pshenichnyi–Chikrii method of resolving functions, is proposed for the pursuer, and a sufficient condition of l -capture is attained.

Let the equations of motion of the players be expressed respectively as follows:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u + f(t, x), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= v + g(t, y), & y(0) &= y_0,\end{aligned}$$

where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($g: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) is an effective flow field for the pursuer (evader); x_0 and y_0 are the initial locations of the players respectively. Here it is assumed that $|x_0 - y_0| > l$, $l > 0$. The functions $f(t, x)$ and $g(t, y)$ may describe the exogenous dynamic flows; however, they could express the endogenous drift on account of the nonlinear dynamics of the players [10, 12–14].

In the first equation, u is the control parameter of the pursuer, and it is regarded as a measurable function $u(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfying the G_1 -constraint

$$|u(t)| \leq \alpha \quad \text{for almost every } t \geq 0,$$

where $\alpha > 0$.

In the second equation, v is the control parameter of the evader, and it is considered as a measurable function $v(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfying the G_2 -constraint

$$|v(t)| \leq \beta \quad \text{for almost every } t \geq 0,$$

where $\beta > 0$.

Note that the G_1 - and G_2 -constraints are usually called the geometric constraints (see [1, 11]).

We denote by $U_{G_1}(V_{G_2})$ the class of all measurable functions satisfying the G_1 -constraint (G_2 -constraint).

Assumption 1 (Carathéodory's conditions [9]). Let the functions $f(t, x)$ and $g(t, y)$ be defined on the domain $\Gamma := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ and satisfy the following conditions:

- (1) $f(t, x)$ and $g(t, y)$ are suitably continuous in x and y for every fixed t ;
- (2) $f(t, x)$ and $g(t, y)$ are measurable functions in t for every fixed x and y respectively;
- (3) for every compact set Q of Γ there can be found Lebesgue integrable functions $K(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ and $H(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that $|f(t, x)| \leq K(t)$ and $|g(t, y)| \leq H(t)$ for all $(t, x), (t, y) \in Q$.

Assumption 2 (Lipschitz's condition). For every compact sets Q_P and Q_E of Γ there exist Lebesgue integrable functions $K_{Q_P}(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ and $H_{Q_E}(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that

$$\begin{aligned} |f(t, x_1) - f(t, x_2)| &\leq K_{Q_P}(t)|x_1 - x_2|, \\ |g(t, y_1) - g(t, y_2)| &\leq H_{Q_E}(t)|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

for all pairs $(t, x_1), (t, x_2) \in Q_P$ and $(t, y_1), (t, y_2) \in Q_E$.

For admissible control functions $u(\cdot) \in U_{G_1}$ and $v(\cdot) \in V_{G_2}$, the Carathéodory differential equations

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(t) + f(t, x(t)), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= v(t) + g(t, y(t)), & y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

generate unique trajectories $x(t) = x(t; x_0, u(\cdot))$ and $y(t) = y(t; y_0, v(\cdot))$ respectively. Here $x(t)$ is termed the trajectory of the pursuer, and $y(t)$ is termed that of the evader.

The main objective of the pursuer is to approach the evader at a distance $l > 0$ (l -capture problem [4, 7, 8]), that is, to reach the inequality

$$|x(\tau) - y(\tau)| \leq l$$

for some $\tau > 0$.

Let us introduce the notation $\psi = \psi(t, x, y, v) = v + g(t, y) - f(t, x)$ and $z(t) = x(t) - y(t)$, $z(0) = z_0$, $z_0 = x_0 - y_0$.

Now we will define a convergence strategy for the pursuer according to the Krasovskiy–Pontryagin formalization [2, 3] and Pshenichnyi–Chikrii method of resolving functions [5, 6].

Definition 1. For $\alpha \geq |\psi|$, we call the function

$$\mathbf{u}(\psi, z_0) = \psi - \lambda(\psi, z_0) \frac{\alpha z_0 + \psi l}{\alpha + \lambda(\psi, z_0) l}$$

a convergence (approach) strategy of the pursuer in the l -capture problem, where

$$\lambda(\psi, z_0) = \frac{1}{\rho^2} \left[\langle \psi, z_0 \rangle + \alpha l + \sqrt{(\langle \psi, z_0 \rangle + \alpha l)^2 + \rho^2(\alpha^2 - |\psi|^2)} \right], \quad \rho^2 = |z_0|^2 - l^2,$$

$\langle \psi, z_0 \rangle$ is the scalar product of the vectors ψ and z_0 in \mathbb{R}^n , and the function $\lambda(\psi, z_0)$ is generally termed the resolving function.

Definition 2. In the l -capture problem, we say that the strategy $\mathbf{u}(\psi, z_0)$ is winning on some time interval $[0, T]$ if, for any $v(\cdot) \in V_{G_2}$,

- (a) at some instant $\varepsilon \in [0, T]$, the relation $|z(\varepsilon)| \leq l$ holds;
- (b) $\mathbf{u}(\psi(t, x(t), y(t), v(\cdot)), z_0) \in U_{G_1}$ holds on the interval $[0, \varepsilon]$, where the number T is termed a guaranteed time of l -capture.

Assumption 3. We can find Lebesgue integrable functions $k(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ and $h(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, with $k(t) \leq k, k > 0$ and $h(t) \leq h, h \in \mathbb{R}$, that satisfy

$$|f(t, x) - g(t, y)| \leq k(t)|x - y| + h(t)$$

for any $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Assumption 4. Let the following be valid:

- (a) $t^* := \min\{t: \Lambda(t) = l, t \geq 0, l > 0\}$, where

$$\Lambda(t) := |z_0| - \int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(\eta) d\eta\right) (\alpha - \beta - h(s)) ds;$$

- (b) $\alpha > \beta + k(t)\Omega(t) + h(t)$ for every $t \in [0, t^*]$, where $\Omega(t) = \Lambda(t) \exp \int_0^t k(s) ds$.

Theorem. *If Assumptions 1–4 are satisfied, then the strategy $\mathbf{u}(\psi, z_0)$ is winning on the interval $[0, t^*]$ in the l -capture problem.*

References

1. Isaacs R. Differential games. New York: J. Wiley and Sons, 1965.
2. Pontryagin L.S. Selected works. Moscow: MAKS Press, 2004 (in Russian).
3. Krasovskiy N.N. Control of a dynamical system. Moscow: Nauka, 1985 (in Russian).
4. Petrosjan L.A. Differential games of pursuit. Singapore: World Scientific, 1993. (Series on optimization).
5. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects // Cybern. Syst. Anal. 1976. V. 12, No. 3. P. 484–485.
6. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Dordrecht: Kluwer, 1997.
7. Grigorenko N.L. Mathematical methods of control for several dynamic processes. Moscow: Mosk. Gos. Univ., 1990 (in Russian).
8. Nahin P.J. Chases and escapes: The mathematics of pursuit and evasion. Princeton: Princeton Univ. Press, 2012.
9. Hale K.J. Ordinary differential equations. Courier Corporation, 2009.
10. Azamov A.A. A class of nonlinear differential games // Math. Notes. 1981. V. 30, No. 4. P. 805–808.
11. Azamov A.A., Samatov B.T. The II-strategy: Analogies and applications // Fourth Int. Conf. Game Theory and Management. St. Petersburg, 2010. P. 33–47.
12. Samatov B.T., Sotvoldiyev A.I. Intercept problem in dynamic flow field // Uzbek Math. J. 2019. V. 12, No. 2. P. 103–112.

13. *Bakolas E.* Optimal guidance of the isotropic rocket in the presence of wind // J. Optim. Theory Appl. 2014. V. 162, No. 3. P. 954–974.
14. *Sun W., Tsiotras P.* Pursuit–evasion game of two players under an external flow field // Amer. Control Conf. Piscataway, 2015. P. 5617–5622.

THE l -CATCH AND EVASION DIFFERENTIAL GAMES
FOR INERTIAL MOTIONS

Bahrom Samatov, Mohisanam Turgunboeva

Namangan State University, Namangan, Uzbekistan

samatov57@inbox.ru, turgunboevamohisanam95@gmail.com

In this work, we study the l -catch and evasion problems in a differential game with two inertial players, a pursuer and an evader. On the controls of both players, exponential damping geometric constraints are imposed, which ensure the values of the acceleration vectors are monotone decreasing in time. In the l -catch problem, we construct an approach strategy for the pursuer, which provides an approach to the evader at a distance l , $l > 0$, and a sufficient condition of l -catch is defined. In the evasion problem, a specific admissible strategy is proposed for the evader and a sufficient evasion condition is found.

Assume that a player X (pursuer) chases another player Y (evader) in the space \mathbb{R}^n . Represent a state of the pursuer in \mathbb{R}^n by x and that of the evader by y . Let us consider the l -catch and evasion problem when the motions of the players are described by the differential equations with initial conditions

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u, & x(0) &= x_0, & \dot{x}(0) &= x_1, \\ \ddot{y} &= v, & y(0) &= y_0, & \dot{y}(0) &= y_1, \end{aligned}$$

respectively. Here $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; x_0 and y_0 are the initial states of the players, respectively, and it is presumed that $|x_0 - y_0| > l$, $l > 0$; x_1 and y_1 are the initial velocity vectors of the players, respectively, and we suppose $x_1 = y_1$; the acceleration vectors u and v act as control parameters of the players, and they depend on time t , $t \geq 0$.

The temporal variations of u and v must be Lebesgue measurable functions $u(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$. We denote by \mathbb{U} the set of all measurable functions $u(\cdot)$ satisfying the geometric constraint (briefly, G -constraint)

$$|u(t)| \leq \alpha e^{-kt} \quad \text{for almost every } t \geq 0,$$

where $\alpha > 0$, $k > 0$.

Similarly, we denote by \mathbb{V} the set of all measurable functions $v(\cdot)$ satisfying the G -constraint

$$|v(t)| \leq \beta e^{-kt} \quad \text{for almost every } t \geq 0,$$

where $\beta > 0$, $k > 0$.

Definition 1. The measurable functions $u(\cdot) \in \mathbb{U}$ and $v(\cdot) \in \mathbb{V}$ are called controls of the pursuer and evader, respectively.

If $u(\cdot) \in \mathbb{U}$ and $v(\cdot) \in \mathbb{V}$, then the triplets $(x_0, x_1, u(\cdot))$ and $(y_0, y_1, v(\cdot))$ yield the trajectories of motion

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \int_0^t (t-s)u(s) ds, \quad y(t) = y_0 + y_1 t + \int_0^t (t-s)v(s) ds$$

of the players X and Y , respectively.

The main target of the player X is to approach the player Y at the distance $l > 0$ (l -catch problem [1, 4, 7–11]), that is, to obtain the inequality

$$|x(\eta) - y(\eta)| \leq l$$

for some $\eta > 0$. But the basic target of the player Y is to avoid the above inequality, i.e., to keep the relation (evasion problem)

$$|x(t) - y(t)| > l$$

for all $t, t \geq 0$, and if it is impossible, then the player Y struggles to postpone an instant of l -catch.

Let us introduce the notation $z(t) = x(t) - y(t)$, $z(0) = z_0$. Then we have $z_0 = x_0 - y_0$ and $\dot{z}(0) = 0$, and therefore, we come to the unique Cauchy problem

$$\ddot{z} = u - v, \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

Now we will define an approach strategy for the pursuer on the basis of the works [2, 3, 5, 6].

Definition 2. For $\alpha \geq \beta$, we term the function

$$\mathbf{u}(t, v) = v - \lambda(t, v) \frac{\alpha e^{-kt} z_0 + vl}{\alpha e^{-kt} + \lambda(t, v)l}$$

an approach strategy or Π_l -strategy of the pursuer in the l -catch problem, where

$$\lambda(t, v) = \frac{1}{h^2} \left[\langle v, z_0 \rangle + \alpha l e^{-kt} + \sqrt{(\langle v, z_0 \rangle + \alpha l e^{-kt})^2 + h^2(\alpha^2 e^{-2kt} - |v|^2)} \right],$$

$h^2 = |z_0|^2 - l^2$, and $\langle v, z_0 \rangle$ is the scalar product of the vectors v and z_0 in \mathbb{R}^n .

Note that the function $\lambda(t, v)$ is generally termed the resolving function.

Proposition 1. If $\alpha \geq \beta$, then $\lambda(t, v)$ is bounded as

$$\frac{\alpha - \beta}{|z_0| - l} e^{-kt} \leq \lambda(t, v) \leq \frac{\alpha + \beta}{|z_0| - l} e^{-kt}.$$

Proposition 2. If $\alpha > \beta$, then the equation

$$e^{-kt} = -kt + b, \quad b = 1 + \frac{k^2(|z_0| - l)}{\alpha - \beta},$$

has a positive root with respect to t , and we denote it by T_l .

Definition 3. In the l -catch problem, we say that the Π_l -strategy is winning on some time interval $[0, T_l]$ if, for any $v(\cdot) \in \mathbb{V}$,

- (a) there exists a τ , $\tau \in [0, T_l]$, that generates $|z(\tau)| \leq l$;
- (b) the inclusion $\mathbf{u}(t, v(\cdot)) \in \mathbb{U}$ is satisfied on $[0, \tau]$.

Here the number T_l is termed a guaranteed time of l -catch.

Theorem 1. *Let $\alpha > \beta$ be valid in the l -catch problem. Then the Π_l -strategy is winning on the interval $[0, T_l]$.*

Definition 4. In the evasion problem, we call the control function

$$\mathbf{v}^*(t) = -\beta e^{-kt} \hat{z}_0$$

a strategy of the player Y , where $\hat{z}_0 = z_0/|z_0|$.

Definition 5. We say that the strategy $\mathbf{v}^*(t)$ is winning if, for any control $u(\cdot) \in \mathbb{U}$, the solution $z(t)$ of

$$\ddot{z} = u(t) - \mathbf{v}^*(t), \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = 0,$$

satisfies the inequality $|z(t)| > l$ for all t , $t \geq 0$.

Theorem 2. *Let $\alpha \leq \beta$ be fulfilled. Then in the evasion game, the strategy $\mathbf{v}^*(t)$ is winning on the time interval $[0, +\infty)$.*

References

1. Isaacs R. Differential games. New York: J. Wiley and Sons, 1965.
2. Pontryagin L.S. Selected works. Moscow: MAKS Press, 2004 (in Russian).
3. Krasovskiy N.N. Control of a dynamical system. Moscow: Nauka, 1985 (in Russian).
4. Petrosjan L.A. Differential games of pursuit. Singapore: World Scientific, 1993. (Series on optimization).
5. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects // Cybern. Syst. Anal. 1976. V. 12, No. 3. P. 484–485.
6. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Dordrecht: Kluwer, 1997.
7. Grigorenko N.L. Mathematical methods of control for several dynamic processes. Moscow: Mosk. Gos. Univ., 1990 (in Russian).
8. Nahin P.J. Chases and escapes: The mathematics of pursuit and evasion. Princeton: Princeton Univ. Press, 2012.
9. Azamov A.A., Samatov B.T. The Π -strategy: analogies and applications // Fourth Int. Conf. Game Theory and Management. St. Petersburg, 2010. P. 33–47.
10. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. I // Cybern. Syst. Anal. 2013. V. 49, No. 5. P. 756–767.
11. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. II // Cybern. Syst. Anal. 2013. V. 49, No. 6. P. 907–921.

LINEAR DIFFERENTIAL GAMES
WITH LANGENHOP TYPE CONSTRAINTS ON CONTROLS

Bahrom Samatov, Saboxat Uralova

Namangan State University, Namangan, Uzbekistan
V.I. Romanovskii Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
samatov57@inbox.ru, saboxat.17@inbox.ru

We study the pursuit–evasion problems in a linear differential game with two players [1, 2], which are called the pursuer and evader, in the space \mathbb{R}^n . The controls of the players are subject to Langenhop type constraints [9]. We construct in parallel a pursuit strategy (Π -strategy) [3, 5–10] for the pursuer and an evasion strategy for the evader. We have obtained sufficient solvability conditions of the pursuit and evasion problems. To solve the evasion problem, we have found lower bounds of the convergence depending on the given parameters.

Suppose that in \mathbb{R}^n a controlled object P , called the pursuer, follows another object E , called the evader. Denote by x the position of the pursuer and by y that of the evader in \mathbb{R}^n . Let the motions of the objects be represented by the following differential equations, respectively:

$$\dot{x} + kx = u, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$\dot{y} + ky = v, \quad y(0) = y_0. \quad (2)$$

Here $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; k is a positive number; x_0 and y_0 are the initial positions of the objects and it is assumed that $x_0 \neq y_0$; u and v are the velocity vectors functioning as control parameters of the objects, respectively. They should be picked as measurable functions $u(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectively.

We consider the following classes of admissible controls for the pursuer:

(P_1) the Langenhop type constraint (briefly, La -constraint) [9]

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 - 2k \int_0^t |u(s)|^2 ds, \quad \text{for almost every } 0 \leq t < \bar{t}, \quad (3)$$

and we denote this class by U_{La} , where $\bar{t} = \sup\{t: \rho^2 - 2k \int_0^t |u(s)|^2 ds \geq 0\}$;

(P_2) the geometric constraint (briefly, G -constraint) in the form

$$|u(t)| \leq \rho e^{-kt} \quad \text{for almost every } t \geq 0, \quad (4)$$

and we denote this class by U_G ;

(P_3) the integral constraint (briefly, I -constraint) in the form

$$\int_0^t |u(s)|^2 ds \leq \frac{\rho^2}{2k}(1 - e^{-2kt}), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

and we denote this class of admissible controls by U_I ; in (3)–(5), ρ and k are positive numbers.

Similarly, for the evader we introduce the following classes of admissible controls:

(E₁) the Langenhop constraint (briefly, *La*-constraint)

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 - 2k \int_0^t |v(s)|^2 ds \quad \text{for almost every } 0 \leq t \leq \tilde{t}, \quad (6)$$

and we denote the class of all admissible controls of the form (6) by V_{La} , where $\tilde{t} = \sup\{t: \sigma^2 - 2k \int_0^t |v(s)|^2 ds \geq 0\}$;

(E₂) the geometric constraint (briefly, *G*-constraint)

$$|v(t)| \leq \sigma e^{-kt} \quad \text{for almost every } t \geq 0, \quad (7)$$

and we denote the class of admissible controls satisfying the *G*-constraint (7) by V_G ;

(E₃) the integral constraint (briefly, *I*-constraint)

$$\int_0^t |v(s)|^2 ds \leq \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt}) \quad \text{for almost every } t \geq 0, \quad (8)$$

and we denote the class of admissible controls satisfying the *I*-constraint (8) by V_I ; in (6)–(8), σ and k are positive numbers too.

If U (respectively, V) is one of the introduced classes U_G , U_I or U_{La} (respectively, V_G , V_I or V_{La}), then the pairs $(x_0, u(\cdot))$ and $(y_0, v(\cdot))$ generate the following trajectories:

$$x(t) = e^{-kt} \left(x_0 + \int_0^t u(s) e^{ks} ds \right), \quad y(t) = e^{-kt} \left(y_0 + \int_0^t v(s) e^{ks} ds \right)$$

of the pursuer and evader, respectively.

Lemma 1. $U_G \subset U_{La} \subset U_I$ and $V_G \subset V_{La} \subset V_I$ for almost every $t \geq 0$.

Let us introduce the notation $z(t) = x(t) - y(t)$, $z(0) = z_0$, $z_0 = x_0 - y_0$.

Definition 1. If $\rho \geq \sigma$, then the function

$$\mathbf{u}_{La}(t, v) = v - \lambda_{La}(t, v)\xi_0, \quad \lambda_{La}(t, v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \delta e^{-2kt}},$$

is called the Π_{La} -strategy of the pursuer in the *La*-game, where $\delta = \rho^2 - \sigma^2$ and $\xi_0 = z_0/|z_0|$. Note that $|\mathbf{u}_{La}(t, v)|^2 = |v|^2 + \delta e^{-2kt}$, $t \geq 0$.

Definition 2. Let there exist a positive root of the equation

$$\sqrt{\Phi^2(t) + \Psi(t)} - \Phi(t) = |z_0| \quad (9)$$

with respect to t , where

$$\Phi(t) = \frac{\sigma}{2ke^{kt}}(e^{2kt} - 1), \quad \Psi(t) = (\rho^2 - \sigma^2)t^2.$$

Then we call the smallest positive root of equation (9) a guaranteed pursuit time and denote it by T_{La} .

Theorem 1. *If $\rho > \sigma$ and there exists a smallest positive root of equation (9), then the Π_{La} -strategy guarantees the completion of pursuit in the *La*-game on the time interval $[0, T_{La}]$.*

Definition 3. Let $\sigma \geq \rho$ in the La -game. Then by the E_{La} -strategy of the evader we mean the function

$$\mathbf{v}_{La}(t, u_\varepsilon(t)) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq t < \varepsilon, \\ -\sqrt{|u(t-\varepsilon)|^2 + \theta e^{-2k(t-\varepsilon)} \xi_0} & \text{if } t \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (10)$$

where

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq t < \varepsilon, \\ u(t-\varepsilon) & \text{if } t \geq \varepsilon, \end{cases} \quad u_\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \theta = \sigma^2 - \rho^2, \quad \xi_0 = \frac{z_0}{|z_0|}.$$

Theorem 2. If in the La -game $\rho \leq \sigma$ and $0 < \varepsilon \leq k^{-1} \ln(2k|z_0|/\rho)$, then the E_{La} -strategy (10) is winning for E and the following estimates for the distance between the players hold for all $t \geq 0$:

$$|z(t)| > \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq t < \varepsilon, \\ \sqrt{\Phi_E^2(t-\varepsilon) + \Psi_E(t-\varepsilon) - \Phi_E(t-\varepsilon)} & \text{if } t \geq \varepsilon, \end{cases}$$

where

$$\Phi_E(t) = \frac{\rho}{2ke^{kt}}(e^{2kt} - 1), \quad \Psi_E(t) = (\sigma^2 - \rho^2)t^2.$$

References

1. Isaacs R. Differential games. New York: J. Wiley and Sons, 1965.
2. Pontryagin L.S. Selected works. Moscow: MAKSS Press, 2004 (in Russian).
3. Petrosjan L.A. Differential games of pursuit. Singapore: World Scientific, 1993 (Series on optimization).
4. Langenhop C.E. Bounds on the norm of a solution of a general differential equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. V. 11. P. 795–799.
5. Azamov A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint // Serdica Bulg. math. 1986. V. 12, No. 1. P. 38–43.
6. Azamov A.A., Samatov B.T. The II-strategy: Analogies and applications // Fourth Int. Conf. Game Theory and Management. St. Petersburg, 2010. P. 33–47.
7. Samatov B.T. The pursuit–evasion problem under integral-geometric constraints on pursuer controls // Autom. Remote Control. 2013. V. 74, No. 7. P. 1072–1081.
8. Samatov B.T. The II-strategy in a differential game with linear control constraints // J. Appl. Math. Mech. 2014. V. 78, No. 3. P. 258–263.
9. Samatov B.T. On a pursuit–evasion problem under a linear change of the pursuer resource // Sib. Adv. Math. 2013. V. 23, No. 10. P. 294–302.
10. Samatov B.T., Umaraliyeva N.T., Uralova S.I. Differential games with the Langenhop type constrains on controls // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, No. 12. P. 2942–2951.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАЗЛИЧНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ КАЧЕСТВА

С. П. Самсонов

Московский государственный университет, Москва, Россия

samsonov@cs.msu.ru

Работа посвящена рассмотрению численных методов решения линейных задач оптимального управления с различными функционалами качества. Использование линейности управляемой системы позволяет построить эффективно работающие численные алгоритмы. Разработке численных методов для линейных задач оптимального управления посвящен целый ряд работ. Следует, однако, заметить, что в большинстве опубликованных работ исследуется только сходимость методов и задается какой-то критерий останова вычислений, который обеспечивает “близость” вычисляемых величин искомым, но не гарантирует заданной точности. Обычно используемые численные алгоритмы требуют численного решения некоторых задач из теории дифференциальных уравнений, линейной алгебры и т.д. Однако вычислительные погрешности решения этих вспомогательных задач могут оказаться весьма значительными, поэтому большой интерес представляют такие численные методы, для которых удается получить оценку точности вычислений с учетом вычислительных погрешностей. Данный доклад как раз и посвящен численным методам, решающим линейные задачи оптимального управления с различными функционалами качества с заданной точностью и с учетом вычислительных погрешностей [1].

Список литературы

1. *Самсонов С.П.* Численный метод решения линейных задач оптимального управления с заданной точностью // Проблемы динамического управления. М., 2009. Вып. 4. С. 156–158.

НЕВЫПУКЛЫЙ И ВЫПУКЛЫЙ ВАРИАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ УПРАВЛЕНИЙ*

Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников

ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия

subb@uran.ru, krupennikov@imm.uran.ru

В докладе обсуждается новый метод решения задачи динамической реконструкции управлений (ЗДРУ) для динамических управляемых систем. Под ЗДРУ понимается задача построения аппроксимаций неизвестного управления по неточным дискретным замерам наблюдаемой траектории динамической си-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00362).

системы, которая порождается этим управлением (так называемой базовой траекторией).

ЗДРУ относится к обратным задачам теории управления. Эти задачи актуальны для многих современных прикладных областей науки. К настоящему времени разработаны разнообразные подходы к решению обратных задач, основанные на алгебраических, итерационных, вариационных и других методах (см., например, обзорные статьи [1, 2]).

В докладе рассматриваются детерминированные управляемые системы, аффинные по управлениям. Допустимые управления — измеримые функции, значения которых ограничены известным выпуклым компактом.

Заметим, что задача реконструкции неизвестного управления некорректна, так как одна и та же базовая траектория может порождаться не единственным допустимым управлением. Поэтому вводится понятие нормального управления — управления, порождающего базовую траекторию и имеющего минимальную норму в пространстве L^2 . Показано [3], что при типичных предположениях о входных данных для любой траектории, порожденной допустимым управлением, существует единственное нормальное управление. Под ЗДРУ подразумевается задача реконструкции именно нормального управления.

Предложенный авторами доклада новый подход [3–5] к решению ЗДРУ опирается на вспомогательные вариационные задачи на минимум регуляризованного [6] интегрального функционала невязки. Отличительная особенность подхода — использование невыпуклых (выпукло-вогнутых) функционалов. При этом во вспомогательных вариационных задачах ищутся лишь стационарные точки функционалов, а не экстремум.

На основе этого подхода разработан и обоснован [4, 5] алгоритм, позволяющий строить аппроксимации неизвестного управления, сходящиеся к нормальному при условии выполнения определенных условий согласования параметров аппроксимации. Эффективность алгоритма обусловлена сведением решения ЗДРУ к интегрированию линейных ОДУ.

В докладе предлагается сравнение нового подхода к решению ЗДРУ со схожим, который базируется на вспомогательных вариационных задачах на экстремум выпуклого функционала.

Постановка ЗДРУ. Наблюдается некоторая траектория $x^*(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (базовая траектория) динамической управляемой системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= G(t, x(t))u(t) + f(t, x(t)), \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad m \geq n, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(\cdot)$ — вектор фазовых переменных, $u(\cdot)$ — вектор управлений, $T < \infty$, U — выпуклый компакт. Базовая траектория порождается неизвестным допустимым управлением.

Роль входных данных в ЗДРУ играют неточные дискретные замеры базовой траектории

$$\left\{ y_k^\delta, \quad k = 0, \dots, N, \quad N = \left\lceil \frac{T}{h^\delta} \right\rceil \right\}: \quad \|y_k^\delta - x^*(t_k)\| \leq \delta.$$

Они имеют погрешность $\delta > 0$ и поступают с шагом $h^\delta > 0$ в моменты времени $t_k = kh^\delta$, $k = 0, \dots, N$.

ЗДРУ ставится следующим образом: для полученных при определенных δ и h^δ наборов замеров $\{y_k^\delta\}$ построить измеримые равномерно ограниченные управления $u^\delta(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ такие, что при стремлении к нулю параметров δ и h^δ эти управления сходятся слабо со звездой к нормальному управлению $u^*(\cdot)$, а траектории системы (1), порожденные этими управлениями, сходятся равномерно к базовой траектории $x^*(\cdot)$.

В работах [4, 5] предложен пошаговый алгоритм решения ЗДРУ. На каждом шаге алгоритма (т. е. на отрезке времени $[t_{i-1}, t_i]$) используются вспомогательные конструкции из задачи на поиск стационарных точек невыпуклых функционалов

$$I(x_i(\cdot), u_i(\cdot)) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[-\frac{\|x_i(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 \|u_i(t)\|^2}{2} \right] dt, \quad i = 1, \dots, N,$$

где i — номер шага алгоритма, α — малый регуляризирующий (по Тихонову [6]) параметр. Функция $y^\delta(t)$ является гладкой интерполяцией дискретных замеров.

В докладе рассматривается также “выпуклый” вариационный подход к решению ЗДРУ, который опирается на решение вспомогательных вариационных задач на минимум выпуклых функционалов

$$I(x_i(\cdot), u_i(\cdot)) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{\|x_i(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 \|u_i(t)\|^2}{2} \right] dt, \quad i = 1, \dots, N.$$

Приводится качественный и количественный анализ результатов применения этих подходов.

Список литературы

1. *Vasin V.V.* Methods for solving nonlinear ill-posed problems based on the Tikhonov-Lavrentiev regularization and iterative approximation // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2016. V. 4, No. 4. P. 60–73.
2. *Schmitt U., Louis A.K.* Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems. I: Theory // *Inverse Problems*. 2002. V. 18, No. 3. P. 645.
3. *Subbotina N.N., Krupennikov E.A.* Hamiltonian systems for dynamic control reconstruction problems // *Minimax Theory Appl.* 2020. V. 05, No. 2. P. 439–454.
4. *Субботина Н.Н., Крупенников Е.А.* Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2021. Т. 27, №2. С. 208–220.
5. *Субботина Н.Н., Крупенников Е.А.* Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции // *Тр. МИАН*. 2021. Т. 315. С. 247–260.
6. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // *ДАН СССР*. 1943. Т. 39, №5. С. 195–198.

ASYMPTOTIC REGIMES IN NEAR-HAMILTONIAN SYSTEMS
WITH DAMPED OSCILLATORY PERTURBATIONS

Oskar Sultanov

St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia
oasultanov@gmail.com

Consider the system of two differential equations

$$\frac{dx}{dt} = \partial_y H(x, y) + F(x, y, S(t), t), \quad \frac{dy}{dt} = -\partial_x H(x, y) + G(x, y, S(t), t),$$

where $H(x, y)$, $F(x, y, S, t)$, and $G(x, y, S, t)$ are smooth functions defined for all $\mathbf{z} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $S \in \mathbb{R}$, $t > 0$ and are 2π -periodic with respect to S . It is assumed that $H(x, y) = |\mathbf{z}|^2/2 + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^3)$ as $\mathbf{z} \rightarrow 0$, $F(x, y, S, t) \rightarrow 0$ and $G(x, y, S, t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ for any fixed values of (x, y, S) , and $S'(t) \rightarrow \varkappa \in \mathbb{Z}_+$ as $t \rightarrow \infty$. The influence of the damped perturbations $F(x, y, S(t), t)$ and $G(x, y, S(t), t)$ on the long-term behaviour of solutions of the limiting system is investigated. In particular, possible asymptotic regimes for solutions are described and stability of the equilibrium is analysed. It is shown that depending on the parameters and structure of perturbations there can be a phase-locking mode with a phase difference tending to a constant at infinity, and a phase-drifting mode with an unboundedly growing phase difference. In both regimes, the equilibrium can remain stable or become asymptotically stable or unstable in the perturbed system. In the case of loss of stability, the trajectories of the perturbed system that start near the equilibrium can have an unboundedly growing amplitude at infinity. The proposed technique is based on a combination of the averaging method and the construction of suitable Lyapunov functions.

References

1. *Sultanov O.A.* Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems under oscillatory perturbations // *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2021. V. 41. P. 5943–5978.

ТЕОРЕМА БОГОЛЮБОВА ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ
С МАКСИМАЛЬНО МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

А. А. Толстоногов

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова
СО РАН, Иркутск, Россия
aatol@icc.ru

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и с нулевым элементом Θ , Y — сепарабельное рефлексивное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$, $T = [0, a] \subset \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, $a > 0$.

Для числовой функции $g: T \times Y \times H \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ рассматривается задача

$$J(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) = \int_T g(t, y(t), x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf \quad (\text{P})$$

на решениях управляемой системы

$$-\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + B\dot{y}(t), \quad x(0) = x_0 \in D(A(0)), \quad (1)$$

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), x(t)) + u(t), \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

$$u(t) \in U(t, y(t), x(t)). \quad (3)$$

Наряду с задачей (P) рассматривается релаксационная задача

$$J^*(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) = \int_T g_U^*(t, y(t), x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf \quad (\text{RP})$$

на решениях системы (1), (2) с ограничениями

$$u(t) \in \overline{\text{co}}U(t, y(t), x(t)), \quad (4)$$

где $\overline{\text{co}}$ обозначает замкнутую выпуклую оболочку, а $g_U^*(t, y, x, u)$ — биполярная функция $u \rightarrow g_U(t, y, x, u)$ (см. [1]).

Под решением системы (1)–(3) понимается тройка функций $(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$, $x(\cdot) \in W^{1,1}(T, H)$, $y(\cdot) \in W^{1,1}(T, Y)$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $u(\cdot) \in L^1(T, U)$, удовлетворяющая (1)–(3). Решение управляемой системы (1), (2), (4) определяется аналогично.

Множества решений управляемой системы (1)–(3) и (1), (2), (4) мы обозначаем через $\mathcal{R}_U(x_0, y_0)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0, y_0)$ соответственно.

Предположения. $A(\cdot)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $A(t): D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$, $t \in T$, — семейство максимально монотонных операторов с областями определения $D(A(t))$ и графиками $\text{gr } A(t)$, $t \in T$;
- 2) $\|A^0(t)x\| \leq m(t)(1+l(\|x\|))$, $x \in D(A(t))$, где $A^0(t)x$ — элемент минимальной нормы множества $A(t)x$, $m(\cdot) \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$, $l: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ — неубывающая функция;
- 3) для любого $\rho \geq 0$ существует $a_\rho(\cdot) \in W^{1,1}(T, \mathbb{R})$ такое, что

$$\text{exc}_\rho \text{gr}(A(s), \text{gr } A(t)) \leq |a_\rho(t) - a_\rho(s)|, \quad s \leq t,$$

где $\text{exc}_\rho \text{gr}(A(s), \text{gr } A(t))$ есть ρ -полуотклонение множества $\text{gr } A(s)$ от множества $\text{gr } A(t)$ (см. [2]).

Оператор $B: Y \rightarrow H$ — непрерывный линейный оператор.

Функция $f: T \times Y \times H \rightarrow Y$ и многозначное отображение $U: T \times Y \times H \rightarrow Y$ с замкнутыми значениями обладают следующими свойствами:

- 1) функция $t \rightarrow f(t, y, x)$ и отображение $t \rightarrow U(t, y, x)$ измеримы;
- 2) для некоторого $k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, $k(t) > 0$, $t \in T$, имеем

$$\begin{aligned} \text{haus}(U(t, y_1, x_1), U(t, y_2, x_2)) + \|f(t, y_1, x_1) - f(t, y_2, x_2)\|_Y &\leq \\ &\leq k(t)(\|y_1 - y_2\|_Y + \|x_1 - x_2\|); \end{aligned}$$

$$3) \|f(t, y_0, \Theta)\| + \|U(t, y_0, \Theta)\|_Y < c(t), \quad c(t) > 0, \quad c(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+),$$

где $\text{haus}(\cdot, \cdot)$ — расстояние по Хаусдорфу,

$$\|U(t, y_0, \Theta)\|_Y = \left\{ \sup \|y\|_Y : y \in U(t, y_0, \Theta) \right\}.$$

Функция $g: T \times Y \times H \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:

- 1) функция $t \rightarrow g(t, y, x, u)$ измерима;
- 2) для любого $M > 0$ существуют интегрально ограниченная на ограниченных множествах функция Каратеодори $\omega_M: T \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\omega_M(t, 0, 0) = 0$, и число $K_M > 0$ такие, что

$$|g(t, y_1, x_1, u_1) - g(t, y_2, x_2, u_2)| \leq K_M \|u_1 - u_2\|_Y + \omega_M(t, \|y_1 - y_2\|_Y, \|x_1 - x_2\|)$$

при $\|y_i\|_Y \leq M$, $\|x_i\| \leq M$, $i = 1, 2$;

- 3) $|g(t, y, x)| \leq \alpha_M(t)$, $\|y\|_Y \leq M$, $\|x\| \leq M$, $u \in \overline{\text{co}}U(t, y, x)$, $\alpha_M(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$.

Теорема 1. Множества $\mathcal{R}_U(x_0, y_0)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0, y_0)$ непусты.

Теорема 2. Для любого решения $(x_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0, y_0)$ существует последовательность решений $(x_k(\cdot), y_k(\cdot), u_k(\cdot)) \in \mathcal{R}_U(x_0, y_0)$, $k \geq 1$, такая, что

$$x_k(\cdot) \rightarrow x_*(\cdot) \quad \text{в } C(T, H), \quad y_k(\cdot) \rightarrow y_*(\cdot) \quad \text{в } C(T, Y), \quad (5)$$

$$u_k(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \quad \text{в слабой топологии пространства } L^2(T, Y), \quad (6)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \left| \int_0^t (g_U^{**}(s, y_*(s), x_*(s), u_*(s)) - g(s, y_k(s), x_k(s), u_k(s))) ds \right| = 0. \quad (7)$$

Теорема 3. Пусть X и Y конечномерны. Тогда задача (RP) имеет решение и

$$\min_{\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0, y_0)} J^{**}(x, y, u) = \inf_{\mathcal{R}_U(x_0, y_0)} J(x, y, u).$$

Для любого решения $(x_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot))$ задачи (RP) существует минимизирующая последовательность $(x_k(\cdot), y_k(\cdot), u_k(\cdot)) \in \mathcal{R}_U(x_0, y_0)$, $k \geq 1$, задачи (P), для которой имеют место соотношения (5)–(7). Обратно, если $(x_k(\cdot), y_k(\cdot), u_k(\cdot))$, $k \geq 1$, — минимизирующая последовательность задачи (P), то существуют подпоследовательность $(x_{k_n}(\cdot), y_{k_n}(\cdot), u_{k_n}(\cdot))$, $n \geq 1$, и решение $(x_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot))$ задачи (RP), для которых справедливы соотношения (5)–(7) с заменой индексов k на k_n .

Работа продолжает исследования, начатые в [2].

Список литературы

1. Толстоногов А.А. Теорема Н.Н. Боголюбова для управляемой системы, связанной с вариационным неравенством // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84, №6. С. 165–196.
2. Attouch H., Wets R.J.-B. Quantitative stability of variational systems. I: The epigraphical distance // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 328. No. 2. P. 695–729.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Д. В. Трещев

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

`treschev@mi-ras.ru`

Рассмотрим гамильтонову систему около положения равновесия или симплектическое отображение около неподвижной точки в фазовом пространстве размерности $2n$. Предположим, что система зависит от функционального параметра, являющегося функцией n переменных. Изучается возможность использовать функциональный параметр для получения системы, сопряженной линейной на открытом множестве.

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА*

С. К. Водопьянов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

`vodopis@math.nsc.ru`

Известно, что для гиперупругих материалов задачи нелинейной теории упругости можно свести к задачам минимизации некоторых функционалов. В работе [1] вводятся математические модели стационарных задач нелинейной теории упругости, суть которых состоит в том, что при некоторых “физически оправданных” условиях, таких как поливыпуклость и условия роста интегранта, возможно гарантировать существование решения задачи минимизации функционала полной энергии на классе допустимых деформаций. Отдельный интерес представляют условия, когда искомая деформация является гомеоморфизмом.

В работе [2] мы существенно ослабляем условия суммируемости допустимых деформаций и условия роста подынтегральной функции. Это приводит к расширению класса допустимых отображений. Компенсацией за ослабление перечисленных выше условий служит требование на интегральную характеристику искажения. Важно, что при таком подходе все еще удается доказать гомеоморфность экстремальной деформации.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей, \mathbb{M}^n — множество $(n \times n)$ -матриц. Рассмотрим функционал энергии

$$I(\psi) = \int_{\Omega} W(x, D\psi(x)) dx,$$

*Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект FWNF-2022-0006).

где $W: \Omega \times \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция запасенной энергии, которая обладает следующими свойствами:

- (а) *поливывуклость*: существует выпуклая функция $G(x, \cdot): \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F \geq 0$, выполнено равенство

$$G(x, F, \text{Adj } F, \det F) = W(x, F)$$

почти всюду в Ω , причем $G(x, \cdot)$ непрерывна на $\mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+$ и $G(\cdot, F, H, \delta)$ измерима на Ω ;

- (б) *коэрцитивность*: существуют постоянная $\alpha > 0$ и функция $g \in L_1(\Omega)$ такие, что

$$W(x, F) \geq \alpha \|F\|^n + g(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F \geq 0$.

Пусть $M > 0$, $s > 1$ — постоянные. Определим класс допустимых деформаций

$$\mathcal{H}(n-1, s, M) = \left\{ \psi \in W_1^1(\Omega), \psi: \Omega \rightarrow \Omega' \text{ — гомеоморфизм с конечным искажением, } I(\psi) < \infty, J(x, \psi) \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega, K_O(\cdot, \psi) = \frac{|D\psi(x)|^n}{J(x, \psi)} \in L_{n-1}(\Omega), \|K_I(\cdot, \psi) \mid L_s(\Omega)\| \leq M \right\},$$

где

$$K_I(x, \psi) = \frac{|\text{adj } D\psi(x)|^n}{J(x, \psi)^{n-1}}.$$

Теорема [2]. Пусть выполнены условия (а) и (б) на функцию $W(x, F)$ и множество $\mathcal{H}(n-1, s, M)$ непусто, $M > 0$, $s > 1$. Тогда существует хотя бы одно гомеоморфное отображение $\varphi \in \mathcal{H}(n-1, s, M)$ такое, что

$$I(\varphi) = \inf \{ I(\psi): \psi \in \mathcal{H}(n-1, s, M) \}.$$

В контексте предложенного подхода допустимые деформации интерпретируются как гомеоморфизмы, индуцирующие ограниченные операторы пространств Соболева: условие $K_O(\cdot, \psi) \in L_{n-1}(\Omega)$ эквивалентно тому, что оператор композиции $\psi^*: L_n(\Omega') \rightarrow L_{n-1}(\Omega)$, $\psi^*(u) = u \circ \psi$, $u \in L_n(\Omega')$, ограничен. Свойства таких и более общих отображений приведены в [3], где можно найти историю вопроса и подробную библиографию.

Список литературы

1. Ball J.M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. V. 63. P. 337–403.
2. Molchanova A., Vodop'yanov S. Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // Calc. Var. Partial Diff. Eqns. 2020. V. 59, No. 17. P. 1–25.
3. Водопьянов С.К. О регулярности отображений, обратных к соболевским, и теория $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1257–1299.

Boris Volkov*Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia*

borisvolkov1986@gmail.com

Quantum control is important for the development of modern quantum technologies [1]. The typical quantum control problem can be formulated as the problem of maximizing the objective quantum functional. This functional depends on the state of the quantum system. We consider the case of coherent control of a closed quantum system when the dynamics of the system is described by the Schrödinger equation. A trap is a point of local but not global extremum of the objective functional [2, 3]. Traps of n th order are singular controls determined by the Taylor expansion of the objective functional up to the n th order. The analysis of traps is important for practical design of control fields, because their existence in a quantum landscape can reduce the performance of local search optimal control protocols [4, 5]. In this talk, we discuss the absence of traps for two-level systems for short times [6] and the presence of n th order traps for some multilevel systems [7].

References

1. *Glaser S.J. et al.* Training Schrödinger's cat: quantum optimal control // *Eur. Phys. J. D.* 2015. V. 69. P. 279.
2. *Rabitz H.A., Hsieh M.M., Rosenthal C.M.* Quantum optimally controlled transition landscapes // *Science.* 2004. V. 303. No. 5666. P. 1998–2001.
3. *De Fouquieres P., Schirmer S.G.* A closer look at quantum control landscapes and their implication for control optimization // *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 2013. V. 16. No. 3. Pap. 1350021.
4. *Pechen A.N., Tannor D.J.* Are there traps in quantum control landscapes? // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 106. Pap. 120402.
5. *Pechen A.N., Tannor D.J.* Quantum control landscape for a Lambda-atom in the vicinity of second-order traps // *Isr. J. Chem.* 2012. V. 52. P. 467.
6. *Volkov B.O., Morzhin O.V., Pechen A.N.* Quantum control landscape for ultrafast generation of single-qubit phase shift quantum gates // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2021. V. 54. No. 21. P. 215303.
7. *Volkov B.O., Pechen A.N. et al.* (in preparation).

*The report presents the results of the work partially supported by the grant of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation no. 075-15-2020-788 and by the Russian Science Foundation under grant 22-11-00330.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ СБОРЕ РЕСУРСА ИЗ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ*

М. С. Волдеаб, Л. И. Родина

*Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
Владимир, Россия*

Московский институт стали и сплавов, Москва, Россия

mebseb2018@gmail.com, LRodina67@mail.ru

Задачам оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными динамическими системами, посвящено множество работ ученых, начиная с прошлого века. В настоящее время ведутся активные исследования по изучению оптимального промысла и его влияния на характер динамики и состав структурированных популяций, рассматриваются задачи периодического импульсного сбора возобновляемого ресурса, задачи оптимальной эксплуатации популяции с диффузией, исследуется максимальная эффективность сбора и наибольшая выгода от эксплуатации (см. [1–3]).

Рассмотрим модель популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Предполагаем, что в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$, из популяции извлекается некоторая доля биологического ресурса

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что приводит к мгновенному уменьшению его количества. Если $n \geq 2$, то ресурс $x \in \mathbb{R}_+^n$ является неоднородным, т.е. либо состоит из отдельных видов x_1, \dots, x_n , либо разделен на n возрастных групп. Отметим, что в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $u_i(k)$ обозначается доля ресурса i -го вида, извлеченного из популяции в момент kd .

Таким образом, рассматривается эксплуатируемая популяция, заданная управляемой системой

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= (1 - u_i(k))x_i(kd - 0), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_i(kd - 0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$. Предполагаем, что все решения системы $\dot{x} = f(x)$ являются неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях; для этого необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ удовлетворяли условию квазиположительности (см. [4, с. 34]).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00293).

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$, $C_i \geq 0$ — стоимость ресурса i -го вида. Средней временной выгодой от извлечения ресурса назовем функцию

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j).$$

Аналогично определим функцию $H^*(\bar{u}, x(0))$ с заменой нижнего предела на верхний, и если выполнено равенство $H_*(\bar{u}, x(0)) = H^*(\bar{u}, x(0))$, то определим предел

$$H(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j). \quad (2)$$

Обозначим через $\varphi(t, x)$ решение системы $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Введем в рассмотрение функцию

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x) - x_i)$$

в предположении, что для любого $x \in \mathbb{R}_+^n$ решения $\varphi(t, x)$ существуют при $t \in [0, d]$.

Теорема 1. Пусть функция $D(x)$ достигает максимального значения в точке $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ и $x_i^* \leq \varphi_i(d, x^*) \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ такого, что $\varphi_i(d, x(0)) \geq x_i^*$, $i = 1, \dots, n$, существует режим эксплуатации \bar{u}^* , при котором функция $H(\bar{u}, x(0))$ достигает наибольшего значения $H(\bar{u}^*, x(0)) = D(x^*)$.

Пусть $\bar{u}(k) \doteq (u(1), \dots, u(k))$, где $u(j) \in [0, 1]^n$, $j = 1, \dots, k$. Для любого $k = 1, 2, \dots$ рассмотрим функцию

$$h(\bar{u}(k), x(0)) \doteq \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j),$$

равную стоимости ресурса, полученного за k изъятий.

Теорема 2. Пусть функция $D(x)$ достигает максимального значения в точке $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ и $x_i^* \leq \varphi_i(d, x^*)$ для любого $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ такого, что $\varphi_i(d, x(0)) \geq x_i^*$, $i = 1, \dots, n$, существует режим эксплуатации $\bar{u}^*(k)$, при котором функция $h(\bar{u}(k), x(0))$ достигает наибольшего значения

$$h(\bar{u}^*(k), x(0)) = (k - 1)D(x^*) + \sum_{i=1}^n C_i x_i(0).$$

Доказательство данных утверждений и построение режимов эксплуатации, при которых достигаются наибольшие значения функций $H(\bar{u}, x(0))$, $h(\bar{u}(k), x(0))$, приведены в [5]. Результаты исследования проиллюстрированы на примерах моделей взаимодействия двух видов, таких как конкуренция и симбиоз. Для этих моделей получены оценки, а в некоторых случаях точные значения функции $H(\bar{u}, x(0))$.

Список литературы

1. *Беляков А.О., Давыдов А.А.* Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 38–46.
2. *Егорова А.В., Родина Л.И.* Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 501–517.
3. *Давыдов А.А.* Существование оптимальных стационарных состояний эксплуатируемых популяций с диффузией // Тр. МИАН. 2020. Т. 310, № 2. С. 135–142.
4. *Кузенков О. А., Рябова Е. А.* Математическое моделирование процессов отбора. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2007.
5. *Волдеаб М.С., Родина Л.И.* О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Изв. вузов. Математика. 2022. № 1. С. 12–24.

LOCALLY INERTIAL CONTROLS IN DIFFERENTIAL EVASION GAMES WITH INTEGRAL RESTRICTIONS

L. P. Yugay

Uzbek State University of Physical Culture and Sport, Chirchik City, Uzbekistan
yugailp@mail.ru

The linear differential evasion game posed by L.S. Pontrjagin and E.F. Mishchenko is considered. New classes of control functions of players are introduced, which are called locally inertial controls. In these classes of control functions, which additionally satisfy integral restrictions, the global evasion problem is solved. The results are demonstrated on the well-known examples in the differential evasion game.

Introduction. Statement of the evasion problem. Let the motion of an object z be described by a linear system of differential equations

$$\dot{z} = Cz - u + v + a, \quad (1)$$

where $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ and $v \in V \subset \mathbb{R}^n$ are control parameters, C is an $n \times n$ constant matrix, U and V are linear subspaces, $a \in \mathbb{R}^n$ is a fixed vector, and \dot{z} is the derivative with respect to time. Let M be a terminal set, which is chosen as a linear subspace of \mathbb{R}^n .

The object z is controlled by two players. Both players (pursuer and evader) operate system (1) by selecting some functions $u = u(t) \in U$ and $v = v(t) \in V$, $t \geq 0$, from the specified allowed class of functions (see below). Let us introduce the classes of locally inertial controls for players.

Definition 1. Let $L_V(t_0, \Delta)$ be the class of measurable control functions $v = v(t) \in V$, $t \geq t_0$, of the evader, such that on any interval $[t_0, t_0 + \Delta]$ the following holds:

(a) $v(t_i) = v_i \in V$;

- (b) $|v(t) - v(t_i)| \leq \gamma|t - t_i|^\alpha$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, where $i = 0, 1, 2, \dots, p$, $p \in \mathbb{N}$, $t_i \in T = \{t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p = t_0 + \Delta\}$, T is any partition of the interval $[t_0, t_0 + \Delta]$, $\gamma \geq 0$, $\alpha > 0$ and $\Delta > 0$ are constants.

Similarly, the class of controls $L_U(t_0, \Delta)$ for the pursuer is introduced.

Definition 2. We will call $L_U(t_0, \Delta)$ and $L_V(t_0, \Delta)$ the sets of locally inertial controls.

The following global evasion problem posed in [1, 2] is considered: for every initial position $z_0 \notin M$ it is necessary to determine an admissible control $v^*(t) \in L_V(0, \Delta)$, $t \geq 0$, such that for any $u(t) \in L_U(t_0, \Delta)$ the corresponding trajectory $z(t)$, $z(0) = z_0$, of system (1) avoids the terminal set M for all $t \geq 0$. The goal of the pursuer is generally opposite.

During the evasion process, the evader at any given moment $t \geq 0$ may use the values $z(t)$ and $u(t)$, but he does not know the control of the pursuer at future moments of time.

Main result. Let the differential game (1) start from $z(0) = z_0 \notin M$ at time $t_0 = 0$. Further let L be the orthogonal complement of M in \mathbb{R}^n , W be any two-dimensional subspace in L , and π be the orthogonal operator from \mathbb{R}^n onto W . We will assume that an orthogonal system (w_1, w_2) is introduced in \mathbb{R}^2 , and let $[w]_j$, $j = 1, 2$, be the coordinates of a vector $w \in \mathbb{R}^2$ with respect to (w_1, w_2) . Further let $D: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ denote some linear mapping and $[D]_j$ be the j th row of D , i.e. $[D]_j z = [Dz]_j$, $j = 1, 2$.

Assumption 1. For the differential game (1), the control functions $v(\cdot) \in L_V(0, \Delta)$ and $u(\cdot) \in L_U(t_0, \Delta)$ satisfy the integral restrictions

$$\int_0^\infty |u(t)|^p dt \leq \rho^p, \quad \int_0^\infty |v(t)|^p dt \leq \sigma^p, \quad (2)$$

where $\rho \geq 0$, $\sigma \geq 0$, and $p > 1$.

Assumption 2. There exist $W \subset L$, a linear mapping $F: W \rightarrow \mathbb{R}^2$, and natural numbers $k_1 \leq k_2$ such that

- (a) $[F\pi c^i P]_j = [F\pi c^i Q]_j = 0$ for all $i = 0, 1, 2, \dots, k_j - 2$ and $j = 1, 2$;
(b) $\dim DV = 2$, where $D = ([F\pi c^{k_1-1}]_1, [F\pi c^{k_2-1}]_2)^T$ is a $2 \times n$ matrix that maps \mathbb{R}^n to \mathbb{R}^2 , and T is the transposition operation.

Assumption 3. There exist $W \subset L$, a linear mapping $F: W \rightarrow \mathbb{R}^2$, and natural numbers k_1 and k_2 , $k_1 \neq k_2$, such that

- (a) $[F\pi c^i P]_j = [F\pi c^i Q]_j = 0$ for all $i = 0, 1, 2, \dots, k_j - 2$ and $j = 1, 2$;
(b) the set $R = DV$ is a one-dimensional subspace in W which is not parallel to the coordinate axes $[w]_1 = 0$ and $[w]_2 = 0$.

Assumption 4. $\sigma > 0$.

Theorem. *If in the differential game (1) Assumptions 1, 2, 4 or 1, 3, 4 are satisfied, then the evasion is possible from any starting point $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$ for all $t \geq 0$ in the classes of locally inertial controls $L_U(0, \Delta)$ and $L_V(0, \Delta)$ with integral restrictions (2).*

The proof of the evasion theorem consists of methods of local and global avoiding of the trajectories of system (1), based on the maneuvering lemmas of L.S. Pontrjagin (see [2–4, 8]).

Remark 1. The locally inertial control sets $L_U(t_0, \Delta)$ and $L_V(t_0, \Delta)$ were introduced for the first time in [8], and they differ from the inertial controls in [3, 4] and piecewise constant controls in [5–7].

Remark 2. It is easy to calculate that the well-known control example of L.S. Pontrjagin [1–3] satisfies Assumptions 1–4; hence the global problem of avoiding trajectories for this example may be solved in the classes of locally inertial controls.

Remark 3. The evasion conditions (Assumptions 1–4) do not express any advantage of the evader’s control parameters over those of the pursuer. This fact allows one to solve the well-known μ -problem of L.S. Pontrjagin [2, 3, 8] for $\mu = 1$, when both players use their controls from equal strength sets of locally inertial controls with integral restrictions.

References

1. *Pontrjagin L.S., Mishchenko E.F.* A problem on the escape of one controlled object from another // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1969. V. 189, No. 4. P. 721–723.
2. *Pontrjagin L.S.* A linear differential evasion game // Tr. Mat. Inst. Steklova. 1971. V. 112. P. 30–63.
3. *Mishchenko E.F., Nikolskii M.S., Satimov N.* The problem of avoiding encounter in N -person differential games // Proc. Steklov Inst. Math. 1980. V. 143. P. 111–136.
4. *Satimov N.* On a way of avoiding encounter in differential games // Mat. Sb. 1976. V. 99. P. 280–293.
5. *Chernousko F.L., Melikyan A.A.* Game problems of control and search. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
6. *Chikrii A.A.* Conflict controlled processes. Dordrecht: Kluwer, 1997.
7. *Petrosjan L.A.* Differential pursuit games. Leningrad: Leningr. Gos. Univ., 1977.
8. *Yugay L.P.* Linear differential evasion game with locally inertial controls // Bull. L.N. Gumilyov Eurasian Natl. Univ., Math. Comput. Sci. Mech. 2019. No. 4. P. 54–66.

IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONLINEAR MIXED MAXIMA

Tursun Yuldashev

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

`tursun.k.yuldashev@gmail.com`

A nonlocal boundary value problem for a first order system of ordinary integro-differential equations with impulsive effects and nonlinear mixed maxima is investigated. The boundary value problem is given by an integral condition. The method of successive approximations in combination with the method of contracting mappings is used. The existence and uniqueness of a solution of the boundary value problem

are proved. The continuous dependence of the solutions on the right-hand side of the boundary condition is showed.

One of the interesting fields of the theory of functional differential equations is the differential equations with maxima. The qualitative theory of differential equations with maxima has peculiarities in theoretical investigations [1]. The following type of differential equations

$$x'(t) = f(t, x(t), \max\{x(\tau) \mid \tau \in [h_1(t) : | : h_2(t)]\}), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

where $[h_1(t) : | : h_2(t)] = [\min\{h_1(t), h_2(t)\}, \max\{h_1(t), h_2(t)\}]$, is called a differential equation with mixed maxima. We suppose that there exist some points $t_i \in (0, T)$, $i = 1, 2, \dots, p$, at which $h_1(t) = h_2(t)$. Then on the intervals $\Omega_1^p = [0, t_1] \cup [t_2, t_3] \cup [t_4, t_5] \cup \dots \cup [t_{p-1}, t_p]$ the differential equation with mixed maxima (1) has the form

$$x'(t) = f(t, x(t), \max\{x(\tau) \mid \tau \in [h_1(t), h_2(t)]\}). \quad (2)$$

On the complementary intervals $\Omega_2^p = [t_1, t_2] \cup [t_3, t_4] \cup [t_5, t_6] \cup \dots \cup [t_p, T]$ the differential equation with mixed maxima (1) has the form

$$x'(t) = f(t, x(t), \max\{x(\tau) \mid \tau \in [h_2(t), h_1(t)]\}). \quad (3)$$

The set of solutions of the differential equation with mixed maxima (1) on the interval $[0, T]$ coincides with the union of the sets of solutions of the two differential equations (2) and (3) on the intervals Ω_1^p and Ω_2^p , respectively. At the points $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{p-1}, t_p$, the solutions of the differential equation (1) with mixed maxima have discontinuities depending on the posed problem for (2) and (3).

Example. On the interval $[0, \infty)$ we consider the following differential equation with mixed maxima:

$$x'(t) = \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} \frac{e^{(1+(-1)^{[t]})t} + 1}{e^{(1+(-1)^{[t]})t}} \max\{x(\tau) \mid \tau \in [t : | : (1+(-1)^{[t]})t]\}, \quad t \in [0, \infty), \quad (4)$$

where $[t]$ is the integer part of t .

On the intervals $\Omega_1 = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \cup \dots$ the differential equation (4) with mixed maxima has the form

$$x'(t) = \frac{2e^t}{(e^t + 1)^2} \max\{x(\tau) \mid \tau \in [0, t]\}. \quad (5)$$

On the complementary intervals $\Omega_2 = [1, 2] \cup [3, 4] \cup [5, 6] \cup \dots$ the differential equation (4) with mixed maxima has the form

$$x'(t) = \frac{e^{2t} + 1}{e^t(e^t + 1)^2} \max\{x(\tau) \mid \tau \in [t, 2t]\}. \quad (6)$$

The general form of increasing and decreasing solutions of the differential equation (5) with maxima on the intervals $\Omega_1 = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \cup \dots$ is

$$x(t) = \begin{cases} \nearrow x(t) = C_i e^{-2(e^t+1)^{-1}}, & t \in \Omega_1, \quad C_i > 0, \\ \searrow x(t) = C_j \frac{e^t}{e^t + 1}, & t \in \Omega_1, \quad C_j < 0. \end{cases}$$

The general form of increasing and decreasing solutions of the differential equation (6) with maxima on the intervals $\Omega_2 = [1, 2] \cup [3, 4] \cup [5, 6] \cup \dots$ is

$$x(t) = \begin{cases} \nearrow x(t) = D_i \frac{e^t}{e^t + 1}, & t \in \Omega_2, \quad D_i > 0, \\ \searrow x(t) = D_j(1 + e^{-t})e^{-2e^{-t}(e^t+1)^{-1}}, & t \in \Omega_2, \quad D_j < 0. \end{cases}$$

Therefore, the general form of increasing and decreasing solutions of the differential equation (4) with mixed maxima on the interval $[0, \infty)$ is

$$x(t) = \begin{cases} \begin{cases} \nearrow x(t) = C_i e^{-2(e^t+1)^{-1}}, & t \in \Omega_1, \quad C_i > 0, \\ \searrow x(t) = C_j \frac{e^t}{e^t + 1}, & t \in \Omega_1, \quad C_j < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \nearrow x(t) = D_i \frac{e^t}{e^t + 1}, & t \in \Omega_2, \quad D_i > 0, \\ \searrow x(t) = D_j(1 + e^{-t})e^{-2e^{-t}(e^t+1)^{-1}}, & t \in \Omega_2, \quad D_j < 0. \end{cases} \end{cases}$$

It is required to set conditions at each of the points $t_k = t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$. If we do not specify continuous gluing conditions at these points, the solution of the differential equation (4) with mixed maxima suffers a discontinuity of the first kind at these points.

In this paper we consider the questions of existence and uniqueness of a solution to the nonlocal boundary value problem for an impulsive system of differential equations with nonlinear mixed maxima. This paper is the further development of the works [2, 3].

On the segment $[0, T]$ for $t \neq t_i, i = 1, 2, \dots, p$, we consider the following first order system of nonlinear differential equations:

$$x'(t) = f(t, x(t), \max\{x(\tau) \mid \tau \in [\lambda_1(t, x(t)) : \lambda_2(t, x(t))]\}) \quad (7)$$

with nonlocal boundary condition

$$Ax(0) + \int_0^T K(t, s) x(s) ds = B(t) \quad (8)$$

and nonlinear impulsive effect

$$x(t_i^+) - x(t_i^-) = I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (9)$$

where $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a given matrix, $K(t, s)$ is a given $(n \times n)$ -dimensional matrix function, and $\det Q(t) \neq 0$, $Q(t) = A + \int_0^T K(t, s) ds$, $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ are given functions; $0 \leq \lambda_1(t), \lambda_2(t) \leq T$, $x(t_i^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_i + h)$, $x(t_i^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} x(t_i - h)$ are the right and left limits of the function $x(t)$ at the point $t = t_i$, respectively.

By $\text{PC}([0, T], \mathbb{R}^n)$ we denote the linear vector space

$$\text{PC}([0, T], \mathbb{R}^n) = \{x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n; x(t) \in C((t_i, t_{i+1}], \mathbb{R}^n), i = 1, \dots, p\},$$

where $x(t_i^+)$ and $x(t_i^-)$ ($i = 0, 1, \dots, p$) exist and are bounded; $x(t_i^-) = x(t_i)$. The linear vector space $\text{PC}([0, T], \mathbb{R}^n)$ is a Banach space with the norm

$$\|x\|_{\text{PC}} = \max\{\|x\|_{C((t_i, t_{i+1}])}, i = 1, 2, \dots, p\}.$$

Problem. Find a function $x(t) \in PC([0, T], \mathbb{R}^n)$ such that for all $t \in [0, T]$, $t \neq t_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, it satisfies the differential equation (7), the nonlocal integral condition (8) and for $t = t_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T$, it satisfies the nonlinear limit condition (9).

References

1. *Yuldashev T.K.* Limit value problem for a system of integro-differential equations with two mixed maxima // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser.: Fiz.-Mat. Nauki. 2008. V. 1, No. 16. P. 15–22.
2. *Yuldashev T.K., Fayziev A.K.* On a nonlinear impulsive differential equations with maxima // Bull. Inst. Math. 2021. V. 4, No. 6. P. 42–49.
3. *Yuldashev T.K., Fayziev A.K.* On a nonlinear impulsive system of integro-differential equations with degenerate kernel and maxima // Nanosystems: Phys. Chem. Math. 2022. V. 13, No. 1. P. 36–44.

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЬЮТОНА ПРИ ОТКАЗЕ ОТ ТРЕБОВАНИЯ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

М. И. Зеликин, Л. В. Локуцкий

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

mzelikin@gmail.com, lion.lokut@gmail.com

Более трех столетий назад назад Ньютон дал решение задачи о форме тела, имеющего минимальное сопротивление при движении в разреженной среде. В своей книге “Математические начала натуральной философии” [1] Ньютон ограничился классом выпуклых тел вращения. В конце XX в. оказалось, что найденное им решение оптимально лишь в классе тел вращения. Попытки найти оптимальную форму, не обладающую вращательной симметрией, до сих пор продолжаются.

В совместной работе [2] рассмотрен класс тел с окружностью в основании, имеющих вертикальную плоскость симметрии и гладкую боковую границу. Найдена точная аналитическая форма оптимального тела в этом классе. В классе всех выпуклых тел решение остается неизвестным. Однако сопротивление найденной формы отличается от численно найденного оптимального сопротивления в классе всех выпуклых тел менее чем на 1%.

Список литературы

1. *Newton I.* Philosophiæ naturalis principia mathematica. Londini: Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures bibliopolas, 1687.
2. *Lokutsievskiy L.V., Zelikin M.I.* The analytical solution to Newton’s aerodynamic problem in the class of bodies with vertical plane of symmetry and developable side boundary // ESAIM: COCV. 2020. V. 26. Pap. 15.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПАРЕТОВСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
ПРИНЦИПОВ МИНИМАКСНОГО СОЖАЛЕНИЯ
И ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА

В. И. Жуковский, Л. В. Жуковская, Ю. С. Мухина

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия

*МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет,
Москва, Россия*

zhkvlad@yandex.ru, zhukovskaylv@mail.ru, js.mukhina@mail.ru

В середине прошлого века американский математик и статистик, профессор Мичиганского университета Леонард Сэвидж (1917–1971) и швейцарский экономист, профессор университета в Цюрихе Юрг Ниханс (1919–2007) независимо друг от друга предложили принцип минимаксного сожаления (ПМС) для принятия решения в однокритериальной задаче при неопределенности (ОЗН)

$$\Gamma = \langle X, Y, f(x, y) \rangle,$$

где $X \subset \mathbb{R}^n$ — множество альтернатив x , Y — множество неопределенностей $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$, $f(x, y)$ — скалярная целевая функция. Этот ПМС сводится к построению пары $(x^r, R_f^r) \in X \times \mathbb{R}$ такой, что

$$R_f^r = \max_{y \in Y} R_f(x^r, y) = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} R_f(x, y),$$

где $R_f(x, y)$ — функция риска (по Нихансу–Сэвиджу)

$$R_f(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y).$$

Румынский математик и статистик Абрахам Вальд (1902–1950), профессор Колумбийского университета, эмигрировавший в Америку, предложил для Γ принцип гарантированного результата (ПГР), сводящийся к построению пары $(x^g, f^g) \in X \times \mathbb{R}$ такой, что

$$f^g = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} f(x^g, y).$$

Цель доклада — объединение ПМС и ПГР, сводящееся к одновременному уменьшению функции риска $R_f(x, y)$ и увеличению гарантированного исхода $f^g[x] = \min_{y \in Y} f(x^g, y)$. Для этого предлагается перейти к двухкритериальной задаче

$$\Gamma_2 = \langle X, Y, \{f(x, y), -R_f(x, y)\} \rangle$$

и затем построить введенное в [1, 2] гарантированное по Парето решение

$$(x^P, f[x^P], R_f[x^P]) \in X \times \mathbb{R}^2.$$

Теорема. Если в Γ множества X и Y — компакты, а $f(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$, то гарантированное по Парето решение существует.

Предложение. Пусть в Γ множества X и Y имеют вид $X = Y = \mathbb{R}^n$, функция $f(x, y)$ задается равенством

$$f(x, y) = x'Ax + 2x'Bu + y'Cy + 2a'x + 2c'y + d,$$

постоянные $(n \times n)$ -матрицы A и $-C$ положительно определены, $\det B \neq 0$, n -векторы a и c постоянны (штрих означает операцию транспонирования). Тогда

$$x^P = -[A - B'C^{-1}B]^{-1}(a - BC^{-1}c),$$

$$f[x^P] = (a' - c'C^{-1}B')(A - BC^{-1}B')^{-1}(a - BC^{-1}c),$$

$$R[x^P] = 0.$$

Список литературы

1. Zhukovskii V.I., Salukvadze M.E. The vector-valued maximin // New York: Acad. Press, 1994.
2. Жуковский В.И., Жуковская Л.В. Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. М.: URSS, 2017.
3. Дмитрук А.В. Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс. М.: МАКС ПРЕСС, 2012.

Научное издание (электронное)

**Дифференциальные уравнения и оптимальное управление:
Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию
со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко,
Москва, 7–9 июня 2022 г.**

Подписано к печати 01.06.2022

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
119991 Москва, ул. Губкина, 8