Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Международный институт прикладного системного анализа

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Материалы Международной конференции,
посвященной памяти академика А. В. Кряжимского,
Москва, 31 мая – 1 июня 2018 г.

SYSTEMS ANALYSIS: MODELING AND CONTROL

Materials of the International Conference
in memory of Academician A. V. Kryazhimskiy,
Moscow, May 31 – June 1, 2018

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
МАКС Пресс
Москва – 2018

УДК 517.9
ББК 22.16
С40

*Конференция проводится при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект 18-01-20021)*

Программный комитет:

Ю. С. Осипов (председатель), *Н. Л. Григоренко* (зам. председателя), *В. И. Максимов* (зам. председателя), *Е. А. Ровенская* (секретарь), *Е. И. Моисеев, М. С. Никольский, А. М. Тарасьев, А. Г. Ченцов*

Организационный комитет:

Н. Л. Григоренко (председатель), *С. М. Асеев* (зам. председателя), *Л. А. Артемьева* (секретарь), *К. О. Бесов, А. И. Смирнов, Н. В. Стрелковский, А. А. Дряженков, С. М. Орлов*

Ответственный редактор *К. О. Бесов*

С40 **Системный анализ: моделирование и управление:** Материалы Международной конференции, посвященной памяти академика А. В. Кряжимского, Москва, 31 мая – 1 июня 2018 г. / Отв. ред. К. О. Бесов. – Москва : Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук : МАКС Пресс, 2018. – 124 с.

ISBN 978-5-98419-079-4 (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)
ISBN 978-5-317-05838-8 (МАКС Пресс)

В сборнике содержатся материалы докладов, представленных на Международной конференции «Системный анализ: моделирование и управление», посвященной памяти академика А. В. Кряжимского, Москва, 31 мая – 1 июня 2018 г.

Ключевые слова: системный анализ, моделирование, оптимальное управление, численные медоды.

ISBN 978-5-98419-079-4
ISBN 978-5-317-05838-8

СОДЕРЖАНИЕ • CONTENTS

Algorithms for global minimum search of atomic–molecular clusters of extremely large dimensions*

Anton Anikin, Alexander Gornov, Pavel Sorokovikov

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russia

htower@icc.ru, gornov@icc.ru, pavel2301s@gmail.com

The problem of finding low-potential atomic–molecular clusters is one of the classical problems of computational chemistry. From a mathematical point of view, the problem is reduced to the search for a minimum of potential functions—special models, which have already been created in several hundreds (see, for example, [1]). The main difficulty in this class of problems is their nonconvexity, which is expressed in a huge number of local extrema of potential functions—experts give estimates that, in some cases, prove the exponential growth of the number of local extrema as a function of the number of atoms (optimized variables). The most known and often considered potential functions in the scientific literature are the models of Lennard–Jones, Morse, Keating, Dzugutov, Gupta, and others [2–5]. Since the exact value of the global minimum is unknown in most cases, in the works of this direction the "best of known" principle is used—the presented solution is "probably optimal" (putative) until one of the experts has produced the best solution.

Regular studies of the optimization problems formulated for the potentials of atomic–molecular clusters were initiated in the 1990s by specialists from the United Kingdom and the United States. At this stage, record-breaking indicators of the size of the problems were, for example, for the Morse potential of only 147 atoms (441 variables), but the number of local extrema in record-breaking problems was already estimated to be of the order of 10^{60}.

In recent years, groups of specialists from China and Portugal have joined the correspondence competition to optimize Morse models (see, for example, [6, 7]). Calculations by these groups were performed on powerful supercomputer systems—perhaps the most powerful in their countries. In the publications of the Chinese group, tables of systemic calculation of

*Supported by RFBR, project no. 18-07-00587.

problems for Morse models are presented up to dimensions of 240 atoms (720 variables) inclusive. The Portuguese group, using the original "Big Bang" method, managed to clarify the decisions of the Chinese group for the maximum (in size) Morse cluster of 240 atoms among the presented ones. At the same time, the results obtained by the Portuguese group with careful analysis and visualization are radically different from the record results of the Chinese group both in terms of the physical dimensions of the cluster and in its geometric properties.

The report discusses algorithms and computational schemes that made it possible to replicate the best achievements of the Chinese and Portuguese specialists (240 atoms for the Morse model) and regularly obtain solutions for potential functions of significantly larger dimensions without using parallel computing technologies on a working laptop.

The results of computational experiments for Morse models with dimensions up to 280 atoms (840 variables) are presented.

References

1. The Cambridge Energy Landscape Database, http://www-wales.ch.cam.ac.uk/CCD.html
2. *Doye J.P.K., Wales D.J.* Structural consequences of the range of the interatomic potential: a menagerie of clusters // J. Chem. Soc., Faraday Trans. 1997. V. 93. P. 4233–4244.
3. *Northby J.A.* Structure and binding of Lennard–Jones clusters: $13 \leq N \leq 147$ // J. Chem. Phys. 1987. V. 87. P. 6166–6178.
4. *Leary R.H.* Global optima of Lennard–Jones clusters // J. Global Optimization. 1997. V. 11, N 1. P. 35–53.
5. *Maranas C.D., Floudas C.A.* A global optimization approach for Lennard–Jones microclusters // J. Chem. Phys. 1992. V. 97. P. 7667–7677.
6. *Cheng L., Feng Y., Yang Jie, Yang Jinlong.* Funnel hopping: searching the cluster potential energy surface over the funnels // J. Chem. Phys. 2009. V. 130, N 21. Pap. 214112.
7. *Cruz S.M.A., Marques J.M.C., Pereira F.B.* Improved evolutionary algorithm for the global optimization of clusters with competing attractive and repulsive interactions // J. Chem. Phys. 2016. V. 145. Pap. 154109.

Оптимизация долговременной динамики в управляемой модели бизнес-цикла Калдора (Optimization of asymptotic dynamics in the controlled Kaldor business cycle model)

А. С. Асеев (A. S. Aseev)

Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

anton.ser.as@gmail.com

Рассмотрим следующую управляемую версию известной модели бизнес-цикла Калдора (см. [2–4]):

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \alpha\big[I(Y(t),K(t)) - (1-u(t))S(Y(t))\big],\\ \dot{K}(t) &= I(Y(t),K(t)) - \delta K(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $Y(t)$ и $K(t)$ — величины национального дохода и основных производственных фондов (капитала) в момент $t \geq 0$, $\alpha > 0$ — поправочный коэффициент, характеризующий скорость реакции системы, $\delta > 0$ — норма амортизации основных фондов, $I(Y,K)$ — функция инвестиций, $S(Y)$ — функция сбережений. Предполагается, что функции $I(Y,K)$ и $S(Y)$, $Y \geq 0$, $K \geq 0$, имеют следующий вид:

$$I(Y,K) = \begin{cases} I(Y) - \beta K & \text{при} \quad K \leq \dfrac{I(Y)}{\beta}, \\[2ex] 0 & \text{при} \quad K > \dfrac{I(Y)}{\beta}, \end{cases} \qquad S(Y) = \gamma Y. \tag{2}$$

Здесь $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$, а функция $I\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ логистическая, т.е. $I(Y)$ — такая положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, что $I(0) = I_0 > 0$, $\lim_{Y\to\infty} I(Y) = I_\infty < \infty$, $I'(Y) > 0$ и существует такое $\widehat{Y} > 0$, что $I''(Y) > 0$ при $Y < \widehat{Y}$ и $I''(Y) < 0$ при $Y > \widehat{Y}$.

В качестве допустимых управлений будем рассматривать все измеримые по Лебегу функции $u\colon [0,\infty) \mapsto [0,1]$. Если заданы начальное состояние (Y_0, K_0), $Y_0 \geq 0$, $K_0 \geq 0$, и допустимое управление $u(t)$, то соответствующая допустимая траектория $(Y(t), K(t))$ есть абсолютно непрерывное решение системы (1), определенное на всем интервале $[0,\infty)$ и удовлетворяющее начальным условиям $Y(0)=Y_0$, $K(0)=K_0$. Для любого начального состояния (Y_0,K_0), $Y_0\geq 0$, $K_0\geq 0$, и произвольного допустимого управления $u(t)$ соответствующая допустимая траектория $(Y(t),K(t))$ системы системы (1) существует и единственна.

В некоторых случаях неуправляемая динамика системы (1) (т.е. динамика, соответствующая управлению $u(t)\equiv 0$, $t\geq 0$) может быть неудовлетворительной с экономической точки зрения, например, если система (1) имеет предельный цикл, что соответствует периодическому наступлению кризисов. В этом случае естественно возникает задача оптимизации динамики системы (1) при помощи выбора отличного от нуля управления $u(t)$, $t\geq 0$ (т.е. посредством стимулирования спроса). Заметим, что характер стационарных состояний системы (1) часто полностью определяет ее долговременную динамику. В частности, если при некотором постоянном управлении $u(t)\equiv\tilde{u}$, $t\geq 0$, система (1) имеет единственное асимптотически устойчивое состояние равновесия, то с экономической точки зрения это может оказаться предпочтительнее неуправляемых циклических движений.

Рассмотрим вопросы существования, устойчивости и оптимальности состояний равновесия системы (1) при постоянных управлениях, а также возникающую задачу об оптимальном по быстродействию переходе в заданное состояние равновесия.

В силу равенств (2) для того, чтобы система (1) имела состояние равновесия $(\widetilde{Y},K(\widetilde{Y}))$ при постоянном управлении $\tilde{u}(t)\equiv u(\widetilde{Y})\in[0,1]$, $t\geq 0$, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$u(\widetilde{Y})=1-\frac{\delta}{(\beta+\delta)\gamma}\frac{I(\widetilde{Y})}{\widetilde{Y}},\qquad K(\widetilde{Y})=\frac{I(\widetilde{Y})}{\beta+\delta}\tag{3}$$

и неравенства

$$\widetilde{Y}\geq\frac{\delta}{(\beta+\delta)\gamma}I(\widetilde{Y}).\tag{4}$$

В дальнейшем любую такую тройку $(\widetilde{Y},K(\widetilde{Y}),u(\widetilde{Y}))$ будем называть *стационарным режимом* системы (1).

Теорема 1. *Существует такое $\bar{Y}>0$, что для любого $\widetilde{Y}>\bar{Y}$ постоянное управление $u(t)\equiv u(\widetilde{Y})$, $t\geq 0$, реализует стационарный режим $(\widetilde{Y},K(\widetilde{Y}),u(\widetilde{Y}))$ (см. (3), (4)) системы (1), для которого стационарное состояние $(\widetilde{Y},K(\widetilde{Y}))$ единственно и асимптотически устойчиво.*

В каждый момент $t \geq 0$ стоимость реализации управления $u \in [0,1]$ будем моделировать при помощи квадратичной функции (см. [5]):

$$\varphi(Y,u) = \frac{\omega\gamma^2}{2}(uY)^2, \qquad \omega > 0.$$

В качестве функции мгновенной полезности $\Phi(Y,u)$ будем рассматривать величину национального дохода, взятого с учетом стоимости реализации стимулирующей политики, т.е. положим $\Phi(Y,u) = Y - \varphi(Y,u)$. Тогда, чтобы найти оптимальный стационарный режим $(Y_*, K_*, u(Y_*))$, необходимо решить следующую задачу (Q):

$$\Phi(Y,u(Y)) = Y - \varphi(Y,u(Y)) \to \max, \qquad Y \geq \frac{\delta I(Y)}{(\beta+\delta)\gamma}.$$

Теорема 2. *Для любых значений параметров системы* (1) *в задаче* (Q) *существует решение* Y_* *и выполняется неравенство* $Y_* > Y_{\max}$, *где* $Y_{\max}$ *— максимальное стационарное состояние системы* (1) *в неуправляемом случае* (*т.е. при* $u(t) \equiv 0$). *Соответствующее оптимальное стационарное управление* $u_*(Y_*)$ *положительно. Если* $\widehat{Y} \leq Y_{\max}$, *то решение* Y_* *задачи* (Q) *единственно.*

Выберем некоторое состояние равновесия (Y_1, K_1), соответствующее постоянному управлению $u(t) \equiv u(Y_1)$, $t \geq 0$ (см. (3), (4)), и рассмотрим следующую задачу быстродействия (P):

$$\begin{aligned}
&\dot{Y}(t) = \alpha\big(I(Y(t),K(t)) - (1-u(t))S(Y(t))\big), \qquad u(t) \in [0,1],\\
&\dot{K}(t) = I(Y(t),K(t)) - \delta K(t),\\
&Y(0) = Y_0, \qquad K(0) = K_0, \qquad Y(T) = Y_1, \qquad K(T) = K_1,\\
&T \to \min.
\end{aligned}$$

Пусть $(Y_*(t), K_*(t), u_*(t))$ — оптимальный процесс и $T_* > 0$ — время быстродействия в (P). Предположим, что $K_*(t) < I(Y_*(t))/\beta$, $t \in [0, T_*]$. Тогда в силу принципа максимума Понтрягина [1] существуют такие не обращающиеся одновременно в нуль абсолютно непрерывные функции $\psi^1(t)$ и $\psi^2(t)$ на $[0, T_*]$, что выполняются условия

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi}^1(t) = -\alpha\big(I'(Y_*(t)) - (1-u_*(t))\gamma\big)\psi^1(t) - I'(Y_*(t))\psi^2(t),\\
&\dot{\psi}^2(t) = \alpha\beta\psi^1(t) + (\beta+\delta)\psi^2(t)
\end{aligned}$$

и выполняется условие максимума

$$u_*(t)\psi^1(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \max_{u\in[0,1]}\{u\psi^1(t)\}.$$

Можно показать, что особые режимы в задаче (P) отсутствуют. Данное обстоятельство позволяет свести решение задачи (P) к исследованию краевой задачи принципа максимума.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Chang W.W., Smyth D.J.* The existence and persistence of cycles in a nonlinear model: Kaldor's 1940 model re-examined // Rev. Econ. Stud. 1971. V. 38, N 1. P. 37–44.
3. *Kaldor N.*, A model of trade cycle // Econ. J. 1940. V. 50, N 197. P. 78–92.
4. *Lorenz H.-W.* Nonlinear dynamical economics and chaotic motion. New York: Springer, 1993.
5. *Weitzman M.J.* Income, wealth, and the maximum principle. London: Harvard Univ. Press, 2003.

An existence theorem for infinite-horizon optimal control problems and its application to a model of optimal exploitation of a renewable resource

Sergey M. Aseev

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria

aseev@mi.ras.ru

Consider the following problem (P):

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^\infty f^0(t,x(t),u(t))\,dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U.$$

Here $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$, U is a nonempty closed (not necessary bounded) set in $\mathbb{R}^m$, and $x_0 \in G$ where G is an open convex set in $\mathbb{R}^n$. The class of *admissible controls* consists of all $u(\cdot) \in L^\infty_{\rm loc}([0,\infty), \mathbb{R}^m)$ such that $u(t) \in U$ for all $t \geq 0$. It is assumed that for any $u(\cdot)$ the corresponding *admissible trajectory* $x(\cdot)$ exists on $[0,\infty)$ in G and the function $t \mapsto f^0(t, x(t), u(t))$ is locally integrable on $[0,\infty)$. An admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is *optimal* in problem (P) if the integral functional $J(x(\cdot), u(\cdot))$ converges and for any other admissible pair $(x(\cdot), u(\cdot))$ the following inequality holds:

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \geq \limsup_{T\to\infty} \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))\, dt.$$

Assume that the following conditions take place:

(A1) *For a.e. $t \in [0,\infty)$ the partial derivatives $f_x(t,x,u)$ and $f^0_x(t,x,u)$ exist for all $(x,u) \in G \times U$. The functions $f(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f^0(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f_x(\cdot,\cdot,\cdot)$ and $f^0_x(\cdot,\cdot,\cdot)$ are measurable in t for all $(x,u) \in G \times U$, continuous in (x,u) for a.e. $t \in [0,\infty)$ and locally bounded.*

(A2) *For an arbitrary admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ there exist a $\beta > 0$ and an integrable function $\lambda\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ such that for any $\zeta \in G$ with $\|\zeta - x_0\| < \beta$, there is a solution $x(\zeta;\cdot)$ to the Cauchy problem*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t)), \qquad x(0) = \zeta,$$

which is defined on $[0,\infty)$, lies in G, and

$$\max_{x \in [x(\zeta;t), x_*(t)]} \left|\left\langle f^0_x(t, x, u_*(t)), x(\zeta;t) - x_*(t)\right\rangle\right| \overset{\text{a.e.}}{\leq} \|\zeta - x_0\| \lambda(t).$$

(A3) *For any $M > 0$ there is a compact set $U_M \subset U$ such that $\{u \in U\colon \|u\| \leq M\} \subset U_M$ and for a.e. $t \geq 0$ for all $x \in G$ the set*

$$Q_M(t,x) = \left\{(z^0, z) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ z^0 \leq f^0(t,x,u),\ z = f(t,x,u),\ u \in U_M\right\}$$

is convex.

(A4) *There is a positive function $\omega\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, $\omega(t) \to +0$ as $t \to \infty$, such that $\int_T^{T'} f^0(t, x(t), u(t))\, dt \leq \omega(T)$, $0 \leq T \leq T'$, for any admissible pair $(x(\cdot), u(\cdot))$.*

For an arbitrary $(x(\cdot), u(\cdot))$ denote by $Z(\cdot)$ the normalized fundamental matrix solution of the linear system $\dot{z}(t) = -[f_x(t, x(t), u(t))]^* z(t)$ and put

$$\psi_T(t) = Z(t) \int_t^T Z^{-1}(s) f^0_x(s, x(s), u(s))\, ds, \qquad 0 \leq t \leq T, \quad T > 0.$$

The following existence result does not assume any uniform boundedness of admissible controls (see [1] for details).

Theorem 1. *Assume that there is an admissible pair* $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ *such that* $J(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot)) > -\infty$. *Assume also that there are a continuous nonnegative function* $M\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ *and a positive function* $\delta\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, $\lim_{t\to\infty} \delta(t)/t = 0$, *such that for any admissible pair* $(x(\cdot),u(\cdot))$ *that satisfies on a set* $\mathfrak{M} \subset [0,\infty)$, $\operatorname{meas}\mathfrak{M} > 0$, *for all* $t \in \mathfrak{M}$ *the inequality* $\|u(t)\| > M(t)$, *for a.e.* $t \in \mathfrak{M}$ *for all* $T \geq t + \delta(T)$ *we have*

$$\sup_{u\in U\colon \|u\|\leq M(t)} \mathcal{H}(t,x(t),u,\psi_T(t)) - \mathcal{H}(t,x(t),u(t),\psi_T(t)) > 0.$$

Then there is an optimal admissible control $u_*(\cdot)$ *in problem* (P) *and for a.e.* $t \geq 0$ *the following estimate is true*:

$$\|u_*(t)\| \leq M(t). \tag{1}$$

Moreover, if for a.e. $t \in \mathfrak{M}$ *we have*

$$\inf_{\substack{T>0\colon\\ t\leq T-\delta(T)}} \left\{ \sup_{u\in U\colon \|u\|\leq M(t)} \mathcal{H}(t,x(t),u,\psi_T(t)) - \mathcal{H}(t,x(t),u(t),\psi_T(t)) \right\} > 0,$$

then estimate (1) *is true for any optimal admissible control* $u_*(\cdot)$ *in* (P).

The following problem $(P1)$ is a model of optimal exploitation of a renewable resource:

$$J(S(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln S(t) + \ln u(t)]\,dt \to \max,$$

$$\dot{S}(t) = rS(t)\left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - u(t)S(t), \qquad S(0) = S_0 > 0,$$

$$u(t) \in (0,\infty).$$

Here the class of admissible controls consists of all $u(\cdot) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty),\mathbb{R}^1)$ such that $u(t) \in (0,\infty)$ for all $t \geq 0$. Obviously, for any admissible trajectory $S(\cdot)$ we have $S(t) \in G = (0,\infty)$.

Using the Bernoulli transformation $x(t) = 1/S(t)$, $t \geq 0$, one can prove that $(P1)$ is equivalent to the following problem $(P2)$ (see [2, 3]):

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln u(t) - \ln x(t)]\,dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = (u(t) - r)x(t) + a, \qquad x(0) = x_0 = \frac{1}{S_0},$$

$$u(t) \in [\rho, \infty).$$

Here $a = r/K$ and the set of admissible controls consists of all locally bounded measurable functions $u\colon [0,\infty) \mapsto [\rho,\infty)$.

The application of Theorem 1 to problem $(P2)$ implies the following result.

Theorem 2. *There is an optimal admissible control* $u_*(\cdot)$ *in problem* $(P2)$ (*and hence in* $(P1)$). *Moreover, for any optimal admissible pair* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *the following inequality takes place*:

$$u_*(t) \overset{\text{a.e.}}{\leq} \left(1 + \frac{1}{Kx_*(t)}\right)(r+\rho), \qquad t \geq 0.$$

Notice that the Hamiltonian of problem $(P2)$ is not concave. This fact considerably complexifies the application of standard sufficient optimality conditions of Arrow's type to problem $(P2)$. However, Theorem 1 justifies the application of an appropriate version of the Pontryagin maximum principle for infinite-horizon problems (see [4]) to problem $(P2)$ (see [2, 3] for more details).

References

1. *Aseev S.M.* Existence of an optimal control in infinite-horizon problems with unbounded set of control constraints // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. V. 297, Suppl. 1. P. 1–10.
2. *Aseev S., Manzoor T.* Optimal growth, renewable resources and sustainability: IIASA Working Paper WP-16-017. Laxenburg: IIASA, 2016.
3. *Aseev S., Manzoor T.* Optimal exploitation of renewable resources: lessons in sustainability from an optimal growth model of natural resource consumption // Control systems and mathematical methods in economics. Springer, 2018. (Lect. Notes Econ. Math. Syst.) (in press).
4. *Aseev S.M., Veliov V.M.* Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 291, Suppl. 1. P. 22–39.

Задача оптимального управления лечением псориаза на бесконечном горизонте (An optimal control problem of psoriasis treatment on an infinite horizon)

Ю. Ю. Бугаков (Yu. Yu. Bugakov)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

ybkv@mail.ru

Рассмотрим на бесконечном полуинтервале времени $[0, +\infty)$ следующую нелинейную управляемую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{l}(t) = a - \delta l(t)m(t) - \gamma_1 l(t)k(t)(1 - u(t)) - \mu l(t), \\ \dot{m}(t) = b - \beta l(t)m(t) - \mu' m(t), \\ \dot{k}(t) = \beta l(t)m(t) + \delta l(t)m(t) + \gamma_2 l(t)k(t)(1 - u(t)) - \lambda k(t), \\ l(0) = l_0,\ m(0) = m_0,\ k(0) = k_0;\ l_0 > 0,\ m_0 > 0,\ k_0 > 0, \end{cases} \tag{1}$$

которая описывает сложное биохимическое взаимодействие различных видов клеток человеческого организма при медикаментозном лечении псориаза [1]. Здесь $l(t)$ — концентрация Т-лимфоцитов, $m(t)$ — концентрация дендритных клеток, $k(t)$ — концентрация эпидермальных кератиноцитов, которые являются фазовыми переменными системы (1); l_0, m_0, k_0 — их начальные состояния; a, b, β, γ_1, γ_2, δ, μ, μ', λ — заданные положительные константы; $u(t)$ — управление, которое препятствует взаимодействию Т-лимфоцитов и кератиноцитов для нормализации избыточного роста кератиноцитов, подчиняющееся ограничениям

$$0 < u_{\min} \leq u(t) \leq 1. \tag{2}$$

Для системы (1) множество допустимых управлений U образуют всевозможные измеримые по Лебегу функции $u(t)$, которые при почти всех $t \in [0, +\infty)$ удовлетворяют неравенствам (2).

Для системы (1) на множестве допустимых управлений U рассмотрим задачу минимизации следующего функционала:

$$J(u) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t}\big(k(t) + Bu^2(t)\big)\,dt, \tag{3}$$

где $B > 0$ — положительный весовой коэффициент.

Введем ограниченное множество

$$\Omega = \big\{(l,k,m)\colon\ l>0,\ m>0,\ k>0,\ l+m+k<M\big\},$$

где M — положительная константа, которая зависит только от параметров a, b, β, γ_1, γ_2, μ, μ', λ. Тогда ограниченность, положительность и продолжимость решений системы (1) устанавливаются следующей леммой.

Лемма. *Пусть выполнено условие* $(l_0,m_0,k_0)\in\Omega$. *Тогда для любого допустимого управления* $u(t)$ *отвечающие ему решения* $l(t)$, $m(t)$, $k(t)$ *изучаемой системы* (1) *определены на всем бесконечном полуинтервале времени* $[0,+\infty)$ *и удовлетворяют условию* $(l(t),m(t),k(t))\in\Omega$ *при всех* $t\in[0,+\infty)$.

В задаче (1), (3) в силу леммы и аффинности по управлению $u(t)$ системы (1) будут выполняться следующие три условия из [2].

(A1) Существует такое $C_0\geq 0$, что

$$\langle x, f(x,u)\rangle \leq C_0(1+\|x\|^2) \quad \text{для любых}\ \ x\in\Omega,\ u\in U,\ x=(l,m,k),$$

где $\dot{x}(t)=f(x(t),u(t))$,

$$C_0=(2\beta+2\delta+\gamma_1+\gamma_2)M^3+(\mu+\mu'+\lambda)M^2+(a+b)M.$$

(A2) Для всякого $x\in\Omega$ множество

$$Q(x)=\big\{(z^0,z)\in\mathbb{R}^4\colon\ z^0\leq g(x,u),\ z=f(x,u),\ u\in U,\ x=(l,m,k)\big\}$$

выпукло.

(A3) Существуют такие положительные функции μ и ω на $[0,\infty)$, что $\mu(t)\to+0$, $\omega(t)\to+0$ при $t\to\infty$ и, какова бы ни была допустимая пара (x,u), выполняются неравенства

$$e^{-\rho\, t}\max_{u\in U}|g(x(t),u)|\leq \mu(t) \qquad \text{для любого}\ \ t\geq 0,$$

$$\int_T^\infty e^{-\rho\, t}|g(x(t),u(t))|\,dt\leq\omega(T) \quad \text{для любого}\ \ T\geq 0,$$

где $g(x,u)=k+Bu$, $x=(l,m,k)$, $\mu(t)=(M+B)e^{-\rho t}$, $\omega(T)=(M+B)\times \times\, e^{-\rho T}/\rho$.

Из условий (A1)–(A3) следует существование в задаче (1), (3) оптимального управления $u_*(t)$ и отвечающих ему оптимальных решений $l_*(t)$, $m_*(t)$, $k_*(t)$, а также выполнение принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления на бесконечном горизонте [2]. Тогда для управления $u_*(t)$ и отвечающих ему решений $l_*(t)$, $m_*(t)$, $k_*(t)$ существует такая вектор-функция $\psi_*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t))$, что

(i) $\psi_*(t)$ является нетривиальным решением сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1^*(t) = \psi_1^*(t)\big(\delta m_*(t) + \gamma_1 k_*(t)(1-u_*(t)) + \mu\big) + \beta\psi_2^*(t)m_*(t) - \\ \qquad\qquad -\psi_3^*(t)\big((\beta+\delta)m_*(t) + \gamma_2 k_*(t)(1-u_*(t))\big), \\ \dot{\psi}_2^*(t) = \delta\psi_1^*(t)l_*(t) + \psi_2^*(t)(\beta l_*(t) + \mu') - (\beta+\delta)\psi_3^*(t)l_*(t), \\ \dot{\psi}_3^*(t) = \gamma_1\psi_1^*(t)l_*(t)(1-u_*(t)) - \psi_3^*(t)(\gamma_2 l_*(t)(1-u_*(t)) - \lambda) + e^{-\rho t}. \end{cases}$$

(ii) Управление $u_*(t)$ максимизирует гамильтониан

$$H\big(l_*(t), k_*(t), m_*(t), u, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t)\big),$$

где

$$\begin{aligned} H(l,k,m,u,\psi_1,\psi_2,\psi_3) = \psi_1\big(a - \delta lm - \gamma_1 k(1-u) - \mu l\big) + \\ + \psi_2(b - \beta lm - \mu' m) + \\ + \psi_3\big((\beta+\delta)lm + \gamma_2 lk(1-u) - \lambda k\big) - e^{-\rho t}(k + Bu^2), \end{aligned}$$

по переменной $u \in [u_{\min}, 1]$ для почти всех $t \in [0, +\infty)$, а значит, оно удовлетворяет следующему соотношению:

$$u_*(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad L(t) > 1, \\ L(t), & \text{если} \quad u_{\min} \le L(t) \le 1, \\ u_{\min}, & \text{если} \quad L(t) < u_{\min}, \end{cases}$$

где $L(t) = (\gamma_1\psi_*^1(t) - \gamma_2\psi_*^3(t))l_*(t)k_*(t)e^{\rho t}/(2B)$.

Замечание. Для данной задачи выполнены условия регулярности и роста из [3] для $\rho > A$, где $A > 0$ зависит от параметров M, β, γ_1, γ_2, μ, μ', λ. Тогда для слабо обгоняющей пары можно получить явное представление сопряженной переменной в виде произведения фундаментальной матрицы и сходящегося интеграла:

$$\psi_*(t) = Z_{(x_*,u_*)}(t)I_*(t), \quad t \ge 0,$$

где

$$I_*(t) = \int_t^{+\infty} e^{-\rho\, s}\big[Z_{(x_*,u_*)}(s)\big]^{-1}\frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x}\, ds$$

и $Z(t)$ — фундаментальная матрица (нормированная в момент времени $t = 0$) дифференциального уравнения

$$\dot{z}(t) = -\left[\frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x}\right]^* z(t).$$

Список литературы

1. *Roy P.K., Datta A.* Impact of cytokine release in psoriasis: a control based mathematical approach // J. Nonlinear Evol. Equat. Appl. 2013. V. 2013, N 3. P. 23–42.
2. *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. М.: Наука, 2007. (Труды МИАН; Т. 257).
3. *Асеев С.М.* Сопряженные переменные и межвременные цены в задачах оптимального управления на бесконечном интервале времени // Труды МИАН. 2015. Т. 290. С. 239–253.

Динамическое программирование в задачах маршрутизации: теория и некоторые приложения (Dynamic programming in routing problems: theory and some applications)*

А. Г. Ченцов (A. G. Chentsov)[а,б], П. А. Ченцов (P. A. Chentsov)[а,б]

[а] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

[б] *Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*

chentsov@imm.uran.ru, chentsov.p@mail.ru

Рассматриваются задачи маршрутизации перемещений, ориентированные на приложения в машиностроении; имеются в виду постановки, связанные с управлением инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ (процедура раскроя предполагается выполненной).

*Работа выполнена при финансовой поддержке комплексной программы УрО РАН, проект 18-1-1-9 “Оценивание динамики нелинейных управляемых систем и маршрутная оптимизация”.

Другое возможное применение может быть связано с задачей минимизации дозовой нагрузки работников АЭС при выполнении комплекса работ в условиях повышенной радиации. Имеются и другие приложения.

Прототипом исследуемых задач является известная NP-трудная задача коммивояжера (TSP в англоязычной литературе); см. [1–6] и др. Однако в рассматриваемых постановках, ориентированных на приложения, возникает много особенностей качественного характера, что мотивирует разработку специализированных теоретических методов. В первую очередь это касается вопросов, связанных с учетом ограничений и (в ряде случаев) усложнением функций стоимости. Возникают затруднения, касающиеся применения традиционных для теории TSP методов (в частности, это касается метода ветвей и границ; см. [7]).

В докладе излагается подход на основе широко понимаемого динамического программирования (ДП), в рамках которого удается учесть целый ряд ограничений (включая условия предшествования). При этом сначала конструируется расширение исходной задачи, в рамках которого ограничения в виде условий предшествования преобразуются в условия вычеркивания (заданий из списка). Функции стоимости перемещений и (внутренних) работ, связанных с посещением непустых конечных множеств — мегаполисов, допускают зависимость от списка заданий, которые не выполнены на текущий момент времени. В качестве объектов посещения рассматриваются непустые конечные множества — мегаполисы.

В случае задачи, связанной с листовой резкой, мегаполисы реализуются посредством дискретизации эквидистант контуров вырезаемых деталей, а условия предшествования имеют следующий смысл: внутренние контуры каждой детали должны быть вырезаны раньше внешнего. Зависимость стоимостей от списка заданий может возникать из соображений, связанных с учетом динамических ограничений, возникающих по мере выполнения заданий, связанных с резкой (имеются в виду аналоги штрафов); в частности, таким образом могут учитываться тепловые допуски в окрестностях точек врезки и выключения инструмента (в задаче минимизации дозовой нагрузки работников АЭС при утилизации излучающих элементов зависимость от списка заданий имеет следующую природу: “светят” те и только те источники, которые не были демонтированы на данный момент времени). Помимо внешних перемещений оцениваются внутренние (связанные с посещением мегаполисов) работы. В упомянутой конкретной задаче, касающейся реализации раскройного плана, эти работы можно связать с перемещением режущего инструмента от точки врезки к эквидистанте и (после завершения резки) от эквидистанты к точке выключения инструмента (имеются в виду перемещения в металле, в то время как внешние перемещения между мегаполисами осуществляются в режиме холостого хода). На уровне математической постановки “совокупное” решение включает в себя в виде своих компонент начальное состояние (точка старта, база процесса), собственно маршрут, определяемый в виде перестановки индексов, и конкретную трассу (траекторию) перемещений по (занумерованным) мегаполисам в виде кортежа упорядоченных пар, элементами которых являются пункты прибытия и отправления для соответствующего мегаполиса; см. [8–10].

При реализации ДП возникают (для задач ощутимой размерности) серьезные трудности при построении слоев функции Беллмана. Прежде всего это касается ресурсов памяти соответствующего вычислителя. Определенное продвижение здесь достигается при использовании параллельных алгоритмов (см. [11]), базирующихся на конструкциях [12, 13] (в [12, 13] предложен вариант схемы независимых вычислений на этапе построения слоев функции Беллмана). Другой вариант применения аппарата ДП связан с использованием оптимизирующих вставок в эвристические решения для задач большой размерности, а также с построением итерационных алгоритмов с перестраиваемыми вставками (см., с частности, [14–16]). В [17] отмечена возможность ограниченной реализации ДП, при которой целью применяемой процедуры является определение экстремума без построения соответствующего оптимального решения (имеется в виду схема с перезаписью слоев функции Беллмана, при использовании которой в памяти вычислителя находится всякий раз только один слой упомянутой функции; данная схема является развитием подхода [18]). Найденное значение экстремума может использоваться при тестировании эвристик, применение которых в задачах большой размерности представляется неизбежным.

Список литературы

1. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
2. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
3. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.

4. *Gutin G., Punnen A.* The traveling salesman problem and its variations. Berlin: Springer, 2002.
5. *Cook W.J.* In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. Princeton Univ. Press, 2012.
6. *Гимади Э.Х., Хачай М.Ю.* Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
7. *Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К.* Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и мат. методы. 1965. Т. 1, №1. С. 94–107.
8. *Ченцов А.Г.* Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008.
9. *Ченцов А.Г., Ченцов А.А.* Задачи маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // ДАН. 2015. Т. 465, №2. С. 154–158.
10. *Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // Автоматика и телемеханика. 2016. №11. С. 96–117.
11. *Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Григорьев А.М.* Об одной задаче маршрутизации, моделирующей перемещения в радиационных полях // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, №4. С. 540–557.
12. *Ченцов А.Г.* Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Автоматика и телемеханика. 2012. №3. С. 134–149.
13. *Ченцов А.Г.* Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Вестн. ЮУрГУ. Мат. моделирование и программирование. 2012. №18, Вып. 12. С. 53–76.
14. *Ченцов А.Г.* Беллмановские вставки в задаче маршрутизации с ограничениями и с усложненными функциями стоимости // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2014. №4. С. 122–141.
15. *Петунин А.А., Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Элементы динамического программирования в конструкциях локального улучшения эвристических решений задач маршрутизации с ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2017. №4. С. 106–125.
16. *Ченцов А.Г.* Оптимизирующие вставки в задачах маршрутизации и их реализация на основе динамического программирования // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2016. Т. 26, №4. С. 565–578.
17. *Ченцов А.Г., Ченцов А.А.* К вопросу о нахождении значения маршрутной задачи с ограничениями // Проблемы управления и информатики. 2016. №1. С. 41–54.

18. *Lawler E.L.* Efficient implementation of dynamic programming algorithms for sequencing problems: CWI. Technical Reports. Stichting Mathematish Centrum. Mathematische Besliskunde. 1979. BW 106/79. P. 1–16.

On the stationarity conditions in an optimal control problem for a trajectory with smooth boundary contact on a single interval*

Andrei Dmitruk, Ivan Samylovskiy

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

dmitruk@member.ams.org, ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru

Our aim is to apply the technique of the reduction of an optimal control problem demonstrated in [1, 2, 4] to a problem with state constraints and to obtain a full system of stationarity conditions, including the nonnegativity of the density of measure (the state constraint multiplier) and the signs of the jumps of the measure at junction points, by two-stage variation approach including the reduction from the pure state-constrained problem to a mixed control-state constrained one.

In this work we generalize results obtained in [6, 7] to a problem with state constraint of order 2 (i.e., with smooth contact with state boundary) of the following base class:

$$\begin{cases} \dot z = f(z,y,x,u), \qquad \varphi_s(u(t)) \le 0, \\ \dot y = x, \qquad y(t) \ge 0, \\ \dot x = g(z,y,x,u), \\ J_A \to \min, \quad \text{where} \quad J_A = J(z(0), z(T),\, y(0), y(T), x(0), x(T)). \end{cases}$$

Here, $z \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^1$ and $x \in \mathbb{R}^1$ are state variables, $u \in \mathbb{R}^m$ is a control, the functions $z(\cdot)$, $y(\cdot)$ and $x(\cdot)$ are absolutely continuous, $u(\cdot)$ is measurable and bounded. We will assume that the functions f, g and φ of dimensions n, 1 and $\mathrm{d}(\varphi)$, respectively, are defined and continuous (moreover, f and g are Lipschitz together with their first and second derivatives

*Supported by the Russian Foundation for Basic Research (project nos. 16-01-00585 and 18-31-00091).

w.r.t. z, y, x, u) on an open subset $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{n+1+m}$ together with their first-order partial derivatives w.r.t. z, x, u. (The function $\varphi(u)$ can be formally considered as a function of the variables z, x, u.)

We consider a process $w^0 = (z^0, y^0, x^0, u^0)$ such that the trajectory $y^0(t)$ touches the state boundary only on a segment $[t_1^0, t_2^0]$, where $0 < t_1^0 < t_2^0 < T$. In addition, we suppose the control u^0 to be continuous on Δ_1, Δ_3 and Lipschitz continuous on Δ_2 with its derivative (for convenience, we assume that the function u^0 at the time moments t_1^0, t_2^0 has both left and right values); moreover, $\varphi_s(u^0(t)) < 0$ on Δ_2 for all s, and the equalities

$$\dot{y}^0(t_1^0 - 0) = x^0(t_1^0 - 0) = 0, \qquad \dot{y}^0(t_2^0 + 0) = x^0(t_2^0 + 0) = 0$$

and the strict inequalities

$$\dot{x}^0(t_1^0 - 0) > 0, \qquad \dot{x}^0(t_2^0 + 0) > 0$$

hold at the moments t_1^0, t_2^0, which means that reaching the state boundary and leaving it occur with zero first and nonzero second time derivatives of $y(t)$.

We also suppose that $g'_u(z^0(t), y^0(t), x^0(t), u^0(t)) \neq 0$ on the boundary arc Δ_2, i.e., that the state constraint is of order 2, and the gradients $\varphi'_s(u^0(t))$, $s \in I(u^0(t))$, are positive independent for all $t \in \Delta_1 \cup \Delta_3$ (i.e., their nontrivial linear combination with non-negative coefficients cannot vanish). Here $I(u) = \{s \colon \varphi_s(u) = 0\}$ is the set of active indices.

Reducing the state constraint $y(t) \geq 0$ to the triple of terminal constraint $y(t_1) \geq 0$, terminal constraint $x(t_1) = 0$ and mixed control-state constraint $\dot{x} = 0$ on Δ_2 and replicating variables according to [3], we come to the following optimal control problem on the time interval $\tau \in [0, 1]$:

$$\text{minimize} \quad J_B := J\left(r_1(0),\, r_3(1),\, \xi_1(0),\, \xi_3(1)\, \eta_1(0),\, \eta_3(1)\right)$$

under the following constraints:

$$\frac{dr_i}{d\tau} = \rho_i f(r_i, \xi_i, \eta_i, v_i), \quad r_1(1) = r_2(0), \quad r_2(1) = r_3(0),$$

$$\frac{d\xi_i}{d\tau} = \rho_i \eta_i, \quad \xi_1(1) - \xi_2(0) = 0, \quad \xi_2(1) - \xi_3(0) = 0, \quad \xi_2(0) \geq 0,$$

$$\frac{d\eta_i}{d\tau} = \rho_i g(r_i, \xi_i, \eta_i, v_i), \quad \eta_1(1) - \eta_2(0) = 0, \quad \eta_2(1) - \eta_3(0) = 0, \quad \eta_2(0) = 0,$$

$$\frac{dt_i}{d\tau} = \rho_i, \quad t_1(0) = 0, \quad t_1(1) = t_2(0), \quad t_2(1) = t_3(0), \quad t_3(1) = T,$$

$$g(r_2, \xi_2, \eta_2, v_2) \equiv 0, \qquad \varphi(v_1(\tau)) \le 0, \qquad \varphi(v_3(\tau)) \le 0.$$

By formulating necessary stationarity conditions [3] in problem B and rewriting them in terms of the original problem, we perform the first stage of our two-stage variation method. To obtain the conditions of the nonnegativity of the state constraint multiplier and jumps of the adjoint variable at the junction points t_1^0 and t_2^0, we perform the second stage of the variation method, which includes variations $\bar{x}(t)$ concentrated on Δ_2.

We prove that for a process $w^0 = (z^0, y^0, x^0, u^0)$ providing the extended weak minimum [5] in problem A and for a solution $\bar{w} = (\bar{z}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{u})$ of the corresponding differential equation in variations we get

$$J'(w^0)\,\bar{w} = -\Delta\psi_x(t_1^0)\,\bar{x}(t_1^0) - \Delta\psi_x(t_2^0)\,\bar{x}(t_2^0) - \Delta\psi_y(t_1^0)\,\bar{y}(t_1^0) \\ - \Delta\psi_y(t_2^0)\,\bar{y}(t_2^0) + \int_{\Delta_2} (-\ddot{m})\,\bar{y}\,dt \ge 0$$

for any W^2_∞-function $\bar{y}(t) = \varkappa(t) > 0$. Considering special $\varkappa$ "concentrated" inside Δ_2^0 or in the neighbourhood of $t^0_{1,2}$, we get $-\ddot{m}(t) \ge 0$ on Δ_2 (i.e., $m(t)$ is concave on Δ_2), $\psi_y(t_i) = 0$ and $\psi_x(t_i) \le 0$, where $-\ddot{m}$ is the state constraint multiplier.

Moreover, we formulate necessary conditions in the original problem using the measure

$$\mu(t) = \begin{cases} \alpha_1(t_1^0 - t) + \dot{m}(t_1^0 + 0)t - 2m(t_1^0 + 0) + \beta_{10} & \text{on } \Delta_1, \\ [2pt] - m(t) + \dot{m}(t_1^0 + 0)t & \text{on } \Delta_2, \\ [2pt]\dot{m}(t_1^0 + 0)t - 2m(t_2^0 - 0) & \text{on } \Delta_3 \end{cases}$$

and write the jumps of the adjoint variables in a "symmetrical" form

$$\Delta\psi_x(t_i^0) = -\Delta\mu(t_i^0) = 0, \qquad \Delta\psi_y(t_i^0) = -\Delta\mu(t_i^0) \le 0$$

and nonnegativity of a state constraint multiplier in the form $\ddot{\mu}(t) \ge 0$.

References

1. *Denbow C.H.* A generalized form of the problem of Bolza // Contributions to the calculus of variations, 1933–1937. Univ. Chicago Press, 1937. P. 180–215.
2. *Warga J.* The reduction of certain control problems to an "ordinary differential" type // SIAM Rev. 1968. V. 10, N 2. P. 219–222.
3. *Milyutin A.A., Osmolovskii N.P.* Calculus of variations and optimal control. Am. Math. Soc., 1998.

4. *Dmitruk A.V., Kaganovich. A.A.* Maximum principle for optimal control problems with intermediate constraints // Comput. Math. Model. 2011. V. 22, N 2. P. 180–215.
5. *Dmitruk A. V., Osmolovskii N.P.* Necessary conditions for a weak minimum in optimal control problems with integral equations on a variable time interval // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2015. V. 35, N 9. P. 4323–4343.
6. *Dmitruk A.V., Samylovskiy. I.A.* On two approaches to necessary conditions for an extended weak minimum in optimal control problems with state constraints // 2016 Int. Conf. "Stability and Oscillations Of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference). IEEE, 2016. P. 1–5.
7. *Dmitruk A.V., Samylovskiy. I.A.* On the relation between two approaches to necessary optimality conditions in problems with state constraints // J. Optim. Theory Appl. 2017. V. 173, N 2. P. 391–420.

О некоторых задачах позиционного граничного управления для волнового уравнения (On some positional boundary control problems for the wave equation)*

А. А. Дряженков (A. A. Dryazhenkov), М. М. Потапов (M. M. Potapov)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

andrja@yandex.ru, mmpotapovrus@gmail.com

Рассматривается следующая пространственно-одномерная динамическая система с граничным управлением:

$$y_{tt}(t,x) = y_{xx}(t,x) - q(x)y(t,x), \qquad 0 < t < T, \quad 0 < x < l,$$
$$-y_x + \sigma_0 y\,|_{x=0} = u(t), \qquad y_x + \sigma_1 y\,|_{x=l} = 0, \qquad 0 < t < T,$$
$$y\,|_{t=0} = v^0(x), \qquad y_t\,|_{t=0} = v^1(x), \qquad 0 < x < l.$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00539).

Целью приложения управляющего воздействия $u = u(t)$ является приведение системы в состояние покоя в заданный момент времени T:

$$y\,|_{t=T} = 0, \qquad y_t\,|_{t=T} = 0, \qquad 0 < x < l.$$

Предполагается, что начальное состояние $v(x) = (v^0(x), v^1(x))$ управляющей стороне *неизвестно*, а значения управлений $u(t)$ в текущий момент времени t определяются в зависимости от результатов граничных наблюдений (вообще говоря, зашумленных) за следом

$$g(t) = y\,|_{x=0}$$

фазового состояния y при $x = 0$ на предшествующем временно́м промежутке $(0, t)$.

Рассмотрены следующие три основные разновидности постановок.

- Коэффициент $q(x)$ в правой части дифференциального уравнения и граничные коэффициенты σ_0, σ_1 управляющей стороне известны. В классе сильных обобщенных решений, когда

  $$u \in L^2(0,T), \qquad v \in H^1(0,l) \times L^2(0,l), \qquad g \in H^1(0,T),$$

  эта задача была исследована в [1], а в классе слабых обобщенных решений, соответствующем выбору

  $$u \in \big(H^1(0,T)\big)^*, \qquad v \in L^2(0,l) \times \big(H^1(0,l)\big)^*, \qquad g \in L^2(0,T),$$

  полученные авторами результаты изложены в [2].
- Коэффициент $q(x)$ известен, а граничные коэффициенты σ_0, σ_1 неизвестны. Для этой постановки в классах сильных обобщенных решений основные результаты представлены в [3].
- Коэффициенты σ_0, σ_1 известны, а про коэффициент $q(x)$ известно, что он является кусочно постоянным: $q(x) = q_j$ при $x \in (x_{j-1}, x_j)$, где $j = 1, 2, \ldots, N$, $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = l$, и принимает известные значения q_j, но при этом неизвестными для управляющей стороны являются точки разрыва x_j. Для такой постановки в классе сильных обобщенных решений основные результаты были получены авторами совсем недавно.

Для задачи каждого типа авторами разработан метод ее приближенного решения, обеспечивающий сильную сходимость по управлению, а также даны оценки значений финального момента T, для которых эти задачи в принципе разрешимы при наличии неопределенностей указанного вида.

Список литературы

1. *Дряженков А.А., Потапов М.М.* Численное решение задачи позиционного граничного управления для волнового уравнения с неизвестными начальными данными // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, №2. С. 138–146.
2. *Potapov M.M., Dryazhenkov A.A.* Numerical solution to one guaranteeing control problem for the wave equation in classes of weak generalized solutions // Proc. 2016 Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference), June 1–3, 2016, Moscow, P. 1–4.
3. *Дряженков А.А.* Численное решение некоторых задач граничного управления волновым уравнением в присутствии неопределенностей // Динамические системы: обратные задачи, устойчивость и процессы управления: Тез. докл. Междунар. конф., посв. восьмидесятилетию Ю.С. Осипова, Москва, 22–23 сентября 2016 г. М.: МИАН, 2016. С. 48–50.

On linking optimization models under asymmetric information

Yuri Ermoliev[a], **Tatiana Ermolieva**[a], **Petr Havlik**[a], **Michael Obersteiner**[a], **Elena Rovenskaya**[a,b]

[a]*International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria*
[b]*Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Detailed sectorial and regional models have been traditionally used to anticipate and plan desirable developments of the respective sectors and regions. These models operate with a set of feasible decisions and aim to select a solution optimizing a sector- or region-specific objective function, depending on various input scenarios. Nowadays, sectors and regions become more and more interconnected utilizing common resources. The competition for natural resources becomes more and more pronounced; for example, energy and agricultural sectors often compete for land and water both needed for growing crops and also the production of biofuel, hydroelectric power generation, and coal mining in the same location. Also, both sectors contribute to the deterioration of the common environment, polluting soil, water and air, and emitting greenhouse gases. In such situations, an independent analysis of sectors and regions ignoring their interconnectedness can become highly misleading. Hence, the sectorial and regional models must be linked together to produce truly integrated solutions optimal for the overall economy, in which they are a part.

The mathematical formulation of a model linkage problem considered in this paper is as follows. Let us consider sectors/regions utilizing some common resources. Let $x^{(k)}$ be the vector of decision variables in sector/region k and assume that each sector/region $k = 1, \ldots, K$ aims to choose such $x^{(k)}$ to maximize its objective function of the form

$$\langle c^{(k)} | x^{(k)} \rangle \to \max \tag{1}$$

such that

$$x^{(k)} \geq 0, \tag{2}$$

$$A^{(k)} x^{(k)} \leq b^{(k)}, \tag{3}$$

$$B^{(k)} x^{(k)} \leq y^{(k)}, \tag{4}$$

where $c^{(k)}$ and $b^{(k)}$ are given vectors, $A^{(k)}$ and $B^{(k)}$ are given matrices. Vectors $y^{(k)}$ define common inter-sectorial/inter-regional constraints as follows:

$$\sum_{k=1}^{K} D^{(k)} y^{(k)} \leq d, \qquad y^{(k)} \geq 0, \tag{5}$$

where matrix $D^{(k)}$ and vector d are given.

Thus, each sector/region k maximizes its objective function (1) by choosing $x^{(k)}$ and $y^{(k)}$ from the feasible set defined by (2), (3), so that (4) and (5) are also fulfilled.

Clearly, there may be different ways how sectors/regions can distribute the quotas $y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(K)})$ needed to achieve joint constraints (5). Truly integrative solutions, by definition, imply cooperation between sectors; from this perspective, the problem of model linkage can be considered essentially as a multi-criteria optimization problem, in which a resource-efficient Pareto solution is to be found. That is, assuming some weights w_k, $w_k > 0$, $\sum_{k=1}^{K} w_k = 1$, a single welfare function should be maximized producing a Pareto optimal solution:

$$\sum_{k=1}^{K} w_k \langle c^{(k)} | x^{(k)} \rangle \to \max, \tag{6}$$

subject to (2)–(5). If implementing literally, it would require collecting all models in a single place (code).

In case the original sectorial/regional models are high dimensional and are possessed by different modeling teams, such a straightforward linkage may be problematic. It would require all parties to agree to reveal and share the codes; also notations and data should be harmonized and (presumably substantial) efforts should be invested to re-programming.

In this paper, we show that re-coding is actually unnecessary, as, instead, one can arrange an iterative procedure, which converges to a Pareto optimal solution. In this procedure, there exists a central hub who must know $D^{(k)}$ and d, while the information on sectorial/regional $c^{(k)}$, $A^{(k)}$, $B^{(k)}$, $x^{(k)}$ does not need to be shared with other sectors/regions. The central hub recalculates the resource quotas y by shifting their current approximation in the direction defined by the corresponding vectors of dual variables (shadow prices of resources) from the primal optimization problems. These quotas are received by sectorial/regional models enabling parallel computations of solutions and fast adjustments of vector y. The foundations of this algorithm were initially introduced by Ermoliev [1]. In this work we prove the convergence rigorously. Current computer capacities enable the implementation of this algorithm to large-scale models used to support decisions.

We demonstrate an application of the developed iterative linkage procedure to the case study linking coal and agricultural sectorial models used to define optimal management strategies in the water-scarce Shanxi province in China [2].

References

1. *Ermoliev Y.* Some problems of linkage systems: IIASA Working Paper WP-80-102, 1980.
2. *Xiangyang X., Gao J., Cao G.-Y., Ermoliev Y.M., Ermolieva T., Kryazhimskii A.V., Rovenskaya E.* Systems analysis of coal production and energy-water-food security in China // Cybern. Syst. Anal. 2015. V. 51, N 3. P. 370–377.

The method for global extremum search of objective functional based on Pontryagin maximum principle*

Alexander Gornov, Tatiana Zarodnyuk

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russia

gornov@icc.ru, tz@icc.ru

The problem of constructing algorithms for global extremum search in optimal control problems is one of the topical problems of control theory. The report discusses solutions of nonconvex optimization problems for dynamical systems for one class of optimization models.

We consider a nonlinear controlled system with linear controls. The initial state and the interval of determining the independent variable (time) are fixed:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \qquad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^r, \tag{1}$$

$$x(t_0) = x^0, \qquad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{2}$$

The controls satisfy the direct constraints of the traditional ("parallelepiped") type

$$\alpha_l(t) \le u(t) \le \beta_l(t), \qquad l = \overline{1, r}, \quad t \in T. \tag{3}$$

The quality of the process is described by a linear terminal functional

$$I_0(u) = \varphi^0(x(t_1)) \to \min. \tag{4}$$

The idea of the proposed approach goes back to papers of L.S. Pontryagin (see, for example, [1]). To construct a computational scheme, a $2n$-dimensional system of differential equations is formulated, which includes both the direct and the conjugate subsystems. For this system, a Cauchy problem is formed, in which the initial values for the direct subsystem are given by the initial state of the process, and for the conjugate one, they are selected from the unit sphere (circle in the two-dimensional case). To close the system, a "local synthesis" for control is used, chosen from the maximum condition of Pontryagin's function at every point of the time interval. In the absence of degeneracy of the maximum principle (which is a limitation of the proposed

*Supported by RFBR, project no. 17-07-00627.

approach), in the linear case under investigation, this problem can be solved in a closed form, "by formulas".

To select the initial state of the conjugate system in the two-dimensional case (two phase variables), one-parameter representation of the circle is possible; in three-dimensional case (three phase variables), a two-parameter representation of the sphere is possible, and so on. With this formalization, the optimal control problem can be reduced to the problem of minimum search of a one-dimensional function in the two-dimensional case, of a two-dimensional function in three-dimensional case, etc.

The software implementation of the proposed approach is performed in the C language within the OPTCON software complex [2].

We present the result of solving a test optimal control problem by using the proposed computing technology:

$$\dot{x}_1 = x_2 \cdot u_1, \qquad \dot{x}_2 = \frac{x_1 + u_1}{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2}.$$

The initial phase vector and the time interval are fixed: $x_1(t_0) = 1$, $x_2(t_0) = -1.2$, $T = [t_0, t_1] = [0, 2]$. It is necessary to find a control $u \in U = [-1, 1]$ that minimizes the functional

$$I(u) = e^{0.926 \cdot x_1(t_1)} \left(\sqrt{2.72 - x_1(t_1)} - \frac{2.72 - x_1(t_1)}{7} \right) - 1.481 \cdot x_1(t_1)$$
$$- 0.014 \cdot x_2(t_1) \cdot x_2(t_1) \to \min.$$

The minimum value of the functional $I(u^*) = -2.83027$ is found in 4 s of CPU time, with 2049 Cauchy problems solved using a computer with a processor Intel Core i5-2500K and 16Gb RAM. The optimal control and the corresponding trajectories of the system are shown in Fig. 1. A reachable set with global extremum (dark marker) and local extrema (light markers) are shown in Fig. 2.

The results of a series of computational experiments made it possible to demonstrate the effectiveness of the proposed approach for the class of problems under consideration.

References

1. *Pontryagin L.S.* Mathematical theory of optimal processes and differential games // Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova. 1985. V. 169. P. 119–158 (in Russian).

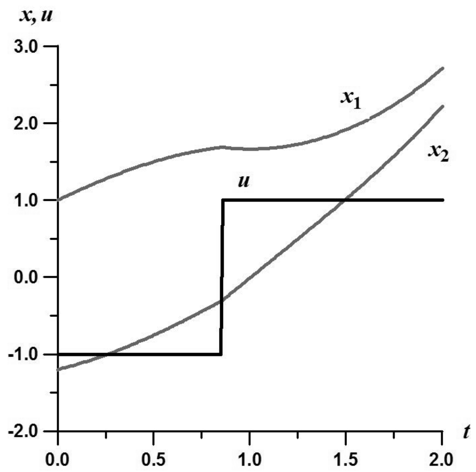


Figure 1. Optimal control and trajectories for the test problem

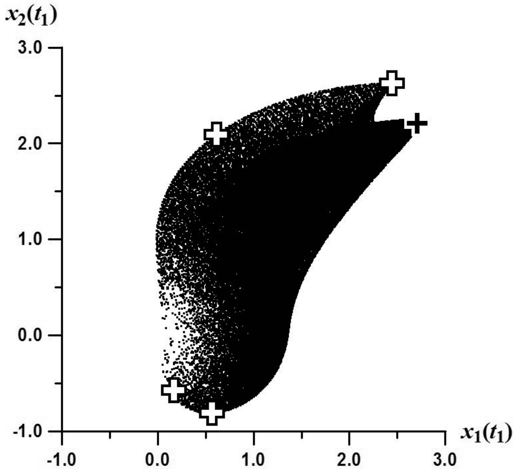


Figure 2. Optimal control, trajectories and reachable set with extreme points for the test problem

2. *Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S., Anikin A.S., Finkelshtein E.A.* Software for numerical analysis of optimization problems // Proc. XX Int. Conf. on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems, May 24–31, 2017, Alushta. P. 680–682 (in Russian).

Построение управления первого игрока в одной нелинейной дифференциальной игре (Constructing the control of the first player in a nonlinear differential game)*

Н. Л. Григоренко (N. L. Grigorenko),
И. А. Какоткин (I. A. Kakotkin),
А. Е. Румянцев (A. E. Rumyantsev)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

grigor@cs.msu.su, kakootkin@bk.ru, rumiantcev@yandex.ru

Рассматривается задача сближения нелинейного объекта с движущейся точкой [1–3]. Координаты точки становятся известными в текущий момент времени. Предложены условия на параметры игры, при которых существует управление, гарантирующее окончание игры за конечное время. Приведены результаты численного расчета управления и траектории игры для тестовых параметров задачи.

Постановка задачи сближения нелинейного объекта с движущейся точкой. Динамика движения нелинейного объекта P описывается уравнениями

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\sin\theta u_1, \quad \ddot{y} = \cos\theta\sin\varphi u_1, \quad \ddot{z} = \cos\theta\cos\varphi u_1 - 1, \\ \ddot{\theta} = u_2, \quad \ddot{\varphi} = u_3, \end{cases} \tag{1}$$

где $x, y, z, \theta, \varphi, u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^1$, u_i, $i = 1, 2, 3$, — параметры управления. Начальное положение P: x_0, y_0, z_0, $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\varphi_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. Траектория движения целевой точки E: $x_e(t), y_e(t), z_e(t)$, $t \in \in [0, T]$; $x_e(t)$, $y_e(t)$, $z_e(t)$ — функции с абсолютно непрерывными производными, $\|\dot{w}_e(t)\| \le \sigma_1 + \sigma_2 t$, $t \ge 0$, где $w_e = (x_e, y_e, z_e)$. В момент t игрок P располагает информацией о траектория движения E: $x_e(s), y_e(s), z_e(s)$, $s \in [0, t]$, ее первых и вторых производных. Ограничения на управления P: $\|u_1\| \le \rho_1$, $\|u_2\| \le \rho_2$, $\|u_3\| \le \rho_3$. Условие окончания процесса сближения:

$$h(t, w_e(t)) = (x(t) - x_e(t))^2 + (y(t) - y_e(t))^2 + (z(t) - z_e(t))^2 \le \ell.$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00539).

В момент t первый игрок P располагает информацией о системе (1), ограничениях на управления, начальных положениях P и E, $w_e(s)$, $s \in \in [0, t]$.

Задача сближения. Для фиксированного T и допустимого $x_e(t)$, $y_e(t)$, $z_e(t)$, $t \in [0, T]$, найти $u(\cdot)$, для которого $h(T) \leq \ell$.

Вспомогательная задача. Рассмотрим в качестве вспомогательной управляемой системы систему

$$\ddot{w} = r, \tag{2}$$

где $w, r \in \mathbb{R}^3$. Положим $w = (w_1, w_2, w_3) = (x, y, z)$.

Выберем позиционное управление $r(t)$ в следующем виде:

$$r(t) = \frac{2}{\Delta T^2}\big[w_c(t, T, \Delta T) - w(t)\big] - \frac{2}{\Delta T}\dot{w}(t), \tag{3}$$

$$w_c(t, T, \Delta T) = w_0 + (t + \Delta T)\dot{w}_0 + \left[\frac{2}{T^2}[w_e(t) - w_0] - \frac{2}{T}\dot{w}_0\right]\frac{(t + \Delta T)^2}{2}, \tag{4}$$

где ΔT, T — числовые параметры, $0 < \Delta T \ll T$, $w_e(t)$ — положение целевой точки.

Лемма 1. *При соотношениях* (1)–(4) *для фазовых переменных системы* (1) *и любой дифференцируемой вектор функции* $w_e(t)$ *с ограниченной производной,* $\|\dot{w}_e(t)\| \leq \sigma_1 + \sigma_2 t$, $t \in [0, T]$, *при заданном* $T < \infty$ *выполнено соотношение* $h(T, w_e(T)) \leq \ell$,

$$\ell \leq \left(\Delta T\Big(T^4 + 2T^2\Delta T^2 - 2T\Delta T^3 + T^5\big(1 - e^{-2T/\Delta T}\big)\Big) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{\sigma_1^2}{T^3} + \frac{\sigma_1\sigma_2}{T^2} + \frac{\sigma_2^2}{3T}\right)\right)^{1/2} + \varepsilon.$$

Замечание 1. При фиксированном T и выборе достаточно малого параметра ΔT оценка для ℓ мала.

Разрешимость функционального уравнения. При известных значениях $r_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, параметры $u_1(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$ найдем как решение функциональных уравнений

$$\begin{cases} -\sin\theta u_1 = r_1, \\ \cos\theta \sin\varphi u_1 = r_2, \\ \cos\theta\cos\varphi u_1 - 1 = r_3. \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим левую часть системы (5) через $\Phi(q)$, где $q = (u_1, \theta, \varphi)$. В предположении отличия от нуля детерминанта $\det(\partial\Phi/\partial q) = -u_1^2 \cos\theta$ имеем

$$\dot{q} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)^{-1} \dot{r} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta/u_1 & -\sin\theta\sin\varphi/u_1 & -\sin\theta\cos\varphi/u_1 \\ 0 & \cos\varphi/(u_1\cos\theta) & -\sin\varphi/(u_1\cos\theta) \end{pmatrix} \dot{r}, \quad (6)$$

$q(0) = (u_1(0), \theta_0, \varphi_0)$.

Лемма 2. *Существуют $u_1(0)$, T, при которых решение системы (6) существует и нелокально продолжимо для рассматриваемых краевых условий.*

Замечание 2. При доказательстве леммы 2 используется следующее свойство функции $r(t)$ (3), (4): $\max_{t\in[0,T]} \|r(t)\|_{T\to\infty} \to 0$.

Оценка снизу параметра T при ограниченной норме вектора (r_1, r_2, r_3) для системы (2). Пусть $\|r(t)\| \le \rho$. Если целевая точка $w_e(t)$ неподвижна, то $T \ge (\|\dot{w}_0\| + \sqrt{\|\dot{w}_0\|^2 + 4\rho\|w_e(0) - w_0\|})/(2\rho)$. В противном случае при $\|w_e(T)\| \le \|w_e(0)\| + T\sigma_1 + T^2\sigma_2/2$ имеем

$$2\rho T \ge \|\dot{w}_0\| + \sqrt{\|\dot{w}_0\|^2 + 4\rho\|w_e(0) - w_0\|},$$

$$\left(\rho - \frac{\sigma_2}{2}\right)T^2 - T(\|\dot{w}_0\| + \sigma_1) - \|w_e(0) - w_0\| \ge 0.$$

Таким образом, если $\rho > \sigma_2/2$, то $T \ge T_2$, а если $\rho < \sigma_2/2$, то $T_1 \le T \le T_2$, где

$$T_{1,2} = \frac{\|\dot{w}_0 + \sigma_1\| \mp \sqrt{\|\dot{w}_0 + \sigma_1\|^2 + 4(\rho - \sigma_2/2)\|w_e(0) - w_0\|}}{2(\rho - \sigma_2/2)}.$$

Пример. В качестве траектории игрока E рассмотрим траекторию системы (1) при $x_e(0) = -1$, $x_e'(0) = -0.3$, $y_e(0) = 1$, $y_e'(0) = 0.2$, $z_e(0) = 30$, $z_e'(0) = 0$, $x_e(T) = 7$, $y_e(T) = 8$, $z_e(T) = 6$, $T = 10$. Управление, реализующее такую траекторию, может быть найдено по формулам (3), (4) при фиксированной конечной точке. Для игрока P начальные значения первых трех компонент фазового вектора суть $x_p(0) = -5$, $x_p'(0) = -0.7$, $y_p(0) = 3$, $y_p'(0) = 0.2$, $z_p(0) = 3$, $z_p'(0) = 0$. На рис. 1 приведены графики компонент траекторий P $(x(t), y(t), z(t))$ и E $(x_e(t), y_e(t), z_e(t))$ при начальных значениях $x_p(0)$, $x_p'(0)$, $y_p(0)$, $y_p'(0)$, $z_p(0)$, $z_p'(0)$ для P. В этом случае параметры управления P суть $T = 10$, $\Delta T = 0.1$. На рис. 2–4 приведены графики управления $u_1(t)$ и компонент траектории $\theta(t)$, $\varphi(t)$.

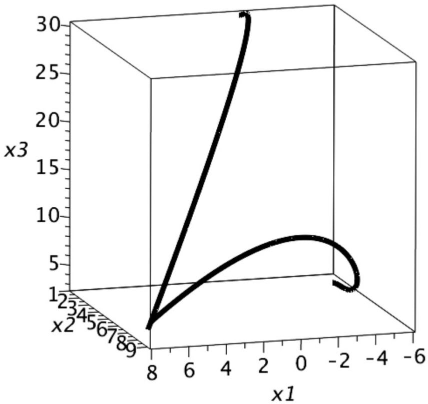


Рис. 1. $(x(t), y(t), z(t))$

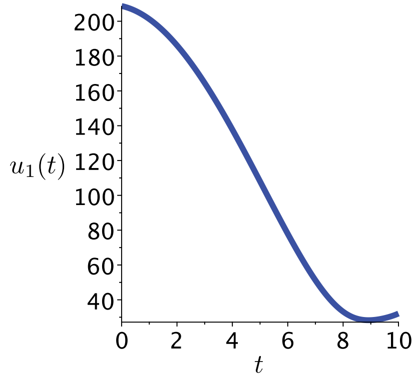


Рис. 2. $u_1(t)$

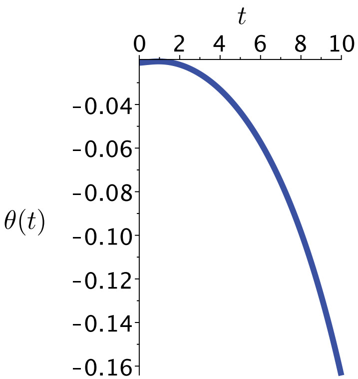


Рис. 3. $\theta(t)$

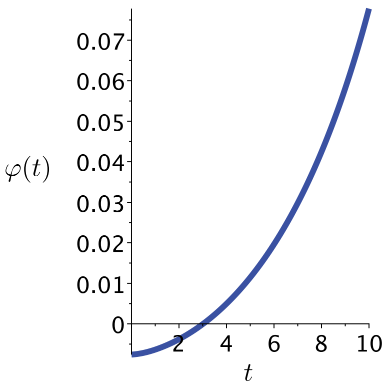


Рис. 4. $\varphi(t)$

Список литературы

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Батенко А.П.* Управление конечным состоянием движущихся объектов. М.: Сов. радио, 1977.
3. *Гурьянов А.Е.* Моделирование управления квадрокоптером // Инженерный вестник. 2014. №08. С. 522–534.

Параллельный алгоритм решения и калибровки динамических моделей общего экономического равновесия (Parallel algorithm for solving and calibrating dynamic general equilibrium models)*

А. П. Груздев (A. P. Gruzdev)[а], Н. Б. Мельников (N. B. Melnikov)[а], М. Г. Дальтон (M. G. Dalton)[б], М. Витсель (M. Weitzel)[в], Б. Ч. О'Нилл (B. C. O'Neill)[г]

[а] *Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

[б] *Национальное управление океанических и атмосферных исследований, Сиэтл, США*

[в] *Объединенный исследовательский центр европейской комиссии, Севилья, Испания*

[г] *Национальный центр атмосферных исследований, Боулдер, США*

gruzdev@cs.msu.ru, melnikov@cs.msu.ru

В динамических моделях общего экономического равновесия (ОЭР) методы параллельного программирования используются сравнительно редко. В [1] был использован параллельный метод Якоби. Распараллеливание по регионам было реализовано для систем с общей памятью. При этом количество регионов, рассмотренное в статье, было относительно невелико, как и количество используемых процессоров. В [2] был предложен новый параллельный метод для динамической модели ОЭР, основанный на приведении матрицы Якоби к блочно-диагональной форме специального вида. Однако производительность параллельного метода была протестирована лишь на сети персональных компьютеров. Существует также ряд работ, использующих параллелизм по данным (см., например, [3, 4]).

*Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова и Национального центра атмосферных исследований (Боулдер, США).

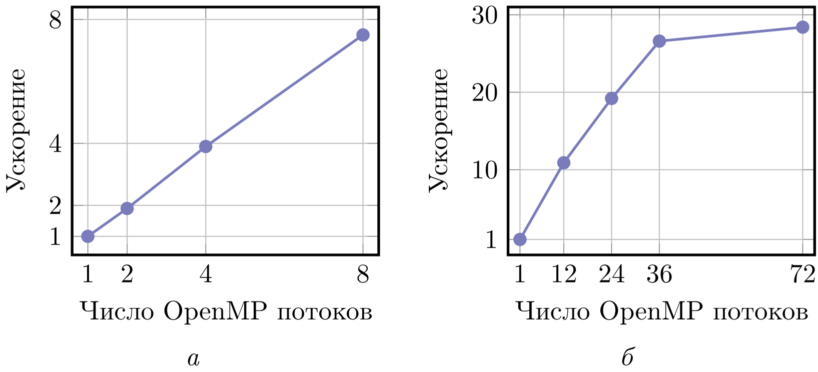


Рис. 1. Ускорение в параллельной реализации модели iPETS: *а* — суперкомпьютер Ломоносов [9]; *б* — суперкомпьютер Шайенн [10]

Наиболее распространенным подходом для решения нелинейных систем в динамических моделях ОЭР является применение методов Ньютона–Крылова (см., например, [5]). Этот класс алгоритмов использует один из методов Крылова для решения линейной системы на каждом шаге метода Ньютона. В динамических моделях ОЭР методы Ньютона–Крылова используются для решения нелинейной системы уравнений на всем отрезке времени. Методы Крылова учитывают разреженность матрицы Якоби, но не используют структуру задачи.

Альтернативный подход состоит в применении методов, использующих блочную структуру матрицы Якоби в моделях ОЭР. Одним из наиболее часто используемых методов такого рода является метод Фея–Тейлора [6]. Каждая итерация метода состоит из двух шагов. Сначала решается задача динамической оптимизации, которая сводится к краевой задаче. На этом шаге определяются динамические переменные (спрос потребителей и пр.), а для их вычисления используются цены с предыдущей итерации. На втором шаге метода вычисляется новая итерация цен с использованием обновленных динамических переменных. При этом цены находятся из статической задачи минимизации затрат и могут быть вычислены независимо для каждого момента времени.

В этой работе нами реализован параллельный метод Фея–Тейлора с использованием технологии OpenMP для последней версии модели iPETS [7]. Кроме того, нами реализован параллельный алгоритм калибровки модели iPETS. Задача калибровки сформулирована как нелинейная система уравнений, для решения которой используется метод

Ньютона. Столбцы матрицы Якоби в методе Ньютона вычисляются параллельно. Алгоритм калибровки реализован для параллельных систем с распределенной памятью на основе технологии MPI. Такой подход позволил реализовать гибридный (OpenMP+MPI)-алгоритм калибровки, который использует параллельный метод Фея–Тейлора для решения модели на каждом шаге калибровки [8]. Полученное ускорение параллельного метода Фея–Тейлора (рис. 1) дает возможность применять гибридный (OpenMP+MPI)-алгоритм калибровки даже в тех случаях, когда параллельный MPI-алгоритм калибровки (без распараллеливания самой модели) занимает слишком много времени.

Список литературы

1. *Faust J., Tryon R.* A distributed block approach to solving near-block-diagonal systems with an application to a large macroeconometric model // Computational economics: Models, methods and econometrics / Ed. by M. Gilli. Boston: Kluwer, 1995. (Adv. Comput. Econ.).
2. *Van Pham H., Kompas T.* Solving intertemporal CGE models in parallel using a singly bordered block diagonal ordering technique // Econ. Model. 2016. V. 52. P. 3–12.
3. *Swann C.A.* Maximum likelihood estimation using parallel computing: An introduction to MPI // Comput. Econ. 2002. V. 19. P. 145–178.
4. *Creel M., Goffe W. L.* Multi-core CPUs, clusters, and grid computing: a tutorial // Comput. Econ. 2008. V. 32. P. 343–352.
5. *Gilli, M., Pauletto, G.* Krylov methods for solving models with forward-looking variables // J. Econ. Dyn. Control. 1998. V. 22. P. 1275–1289.
6. *Fair R., Taylor J.* Solution and maximum likelihood estimation of dynamic nonlinear rational expectations models // Econometrica. 1983. V. 51. P. 1169–1185.
7. *Ren X. et al.* Avoided economic impacts of climate change on agriculture: integrating a land surface model (CLM) with a global economic model (iPETS) // Clim. Change. 2016. V. 146. P. 517–531.
8. *Gruzdev A.P. et al.* Parallel solution and calibration algorithms in dynamic general equilibrium models // Comput. Econ. 2018. Submitted.
9. *Sadovnichy V., Tikhonravov A., Voevodin V., Opanasenko V.* “Lomonosov”: Supercomputing at Moscow State University // Contemporary high performance computing: From petascale toward exascale. Boca Raton: CRC, 2013.
10. Computational and Information Systems Laboratory. 2017. Cheyenne: HPE/SGI ICE XA System (NCAR Community Computing). Boulder, CO: National Center for Atmospheric Research. doi:10.5065/D6RX99HX.

Системный анализ в горных науках и уменьшении природного ущерба (System analysis in mining sciences and decreasing environment damage)*

А. Д. Гвишиани (A. D. Gvishiani)[а,б], **Л. А. Вайсберг (L. A. Vaisberg)**[в], **В. Н. Татаринов (V. N. Tatarinov)**[а,б], **А. И. Маневич (A. I. Manevich)**[а]

[а]*Геофизический центр РАН, Москва, Россия*
[б]*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия*
[в]*НПК "Механобр-техника", Санкт-Петербург, Россия*
a.gvishiani@gcras.ru, gornyi@mtspb.com, victat@gcras.ru, ai.manevich@yandex.ru

История системного анализа берет свое начало в 1963 г., когда известные американские математики М. Месарович и Я. Такахара начинают заниматься теорией систем. В 1978 г. в свет выходит книга М. Месаровича и Я. Такахары "Общая теория систем. Математические основы", которая вместе с их более ранними монографиями "Теория иерархических многоуровневых систем" и "Общая теория систем" подводит итог пятнадцатилетнему развитию системного анализа. В этот период рассматриваются проблемы, связанные с введением понятий состояния системы, с управляемостью и реализуемостью системы, с возможностями ее структурной декомпозиции. Обсуждаются проблемы устойчивости линейности и возможности использования аппарата теории категорий.

Таким образом, эволюционно формируется новое направление в общей теории систем — теоретический и прикладной системный анализ. Предметом исследований теоретического системного анализа являются описание общих закономерностей, присущих изучаемым системам в различных областях знаний и явлениях, а также изучение единых свойств систем, относящихся к отдельным наукам, научным дисциплинам и видам теоретической и практической деятельности.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-17-00241).

Логическая структура теоретического системного анализа формируется двумя основными направлениями — математическим обоснованием и аксиоматикой системного анализа (система, подсистема, элементы, их связи и т.д.) и философским обоснованием. Математическое обоснование системного анализа включает в себя создание общих методов изучения явлений и процессов, удовлетворяющих построенной аксиоматике. Философское обоснование теоретического системного анализа включает в себя общие методы трансформации явления и его математическую модель. Логическая структура прикладного системного анализа сводится к изучению определенной системы (или набора систем) и включает в себя исследование системы общими методами системного анализа и применение (и создание) специфических методов системного анализа. Оба эти направления сливаются в блок разработки принципов и методов принятия решений и далее в блок непосредственного принятия финальных или альтернативных решений.

В настоящий момент статус теоретического системного анализа можно определить следующими тезисами: существуют достаточно строгие математические модели, относящиеся к отдельным явлениям и научным дисциплинам; не существует общей строгой математической теории, аксиоматически связывающей системы, подсистемы и их элементы в различных областях знаний; не разработана логическая и философская база такой аксиоматики; методы трансформации явления в его математическую СА-модель разработаны только в отдельных примерах.

Предпосылками к возможности создания аксиоматики теоретического системного анализа является в первую очередь то, что изучаемая система однозначно выделяется в окружающей среде и в этом случае границы системы точно определены. Исследуемая система сопротивляется изменениям, в то же время адаптируясь к внешней среде. Систему возможно декомпозировать — она состоит из подсистем и элементов. Взаимодействующие системы взаимно влияют друг на друга, и их воздействия всегда обладают обратной связью. В функционировании и развитии систем происходят регулярные и экстремальные события.

Современные методы системного анализа обширны и относятся к математике, логике, философии, кибернетике и включают в себя: осмысленное погружение в задачу и разумно-логический анализ исходных данных; философские методы диалектики; методы исторических аналогий и прецедентов; детерминистское математические методы (математическое моделирование, вариационное исчисление, теория игр и т.д.); кибернетические методы распознавания знаний, образов, изображений и сцен в больших и условно больших данных; вероятностные и статистические методы; методы нечеткой логики и математики.

В докладе будут представлены приложения системного анализа при исследовании объектов горно-обогатительной промышленности, природных стихийных бедствий (извержения вулканов, землетрясения, наводнения, оползни, цунами, магнитные бури) и уменьшении природного ущерба. Цель исследования — выработка решений по оптимальным действиям руководителей различного уровня для предотвращения и уменьшения ущерба стихийного бедствия.

Список литературы

1. *Gvishiani A., Sidorov R., Lukianova R., Soloviev An.* Geomagnetic activity during St. Patrick's Day storm inferred from global and local indicators // Russ. J. Earth Sci. 2016. N 16. P. 1–8.
2. *Гетманов В.Г., Гвишиани А.Д., Камаев Д.А., Корнилов А.С* Алгоритмическое обнаружение аномальных временных участков в наблюдениях за уровнем океана // Физика Земли. 2016. № 2. С. 114–126.
3. *Гвишиани А.Д., Дзебоев Б.А., Агаян С.М.* Интеллектуальная система распознавания FCAZm в определении мест возможного возникновения сильных землетрясений горного пояса Анд и Кавказа // Физика Земли. 2016. № 4. С. 3–23.

Оптимальные стратегии лечения псориаза путем подавления взаимодействий между T-лимфоцитами, кератиноцитами и дендритными клетками (Optimal strategies of the psoriasis treatment by suppressing the interactions between T-lymphocytes, keratinocytes and dendritic cells)

Е. Н. Хайлов (E. N. Khailov)[а], Э. В. Григорьева (E. V. Grigorieva)[б]

[а]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

[б]*Техасский женский университет, Дентон, США*

khailov@cs.msu.su, egrigorieva@twu.edu

Рассмотрим на заданном отрезке времени $[0,T]$ следующую нелинейную управляемую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{l}(t) = \sigma - \delta v(t)l(t)m(t) - \gamma_1 u(t)l(t)k(t) - \mu l(t), \\ \dot{k}(t) = (\beta+\delta)v(t)l(t)m(t) + \gamma_2 u(t)l(t)k(t) - \lambda k(t), \\ \dot{m}(t) = \rho - \beta v(t)l(t)m(t) - \nu m(t), \\ l(0) = l_0, \quad k(0) = k_0, \quad m(0) = m_0; \quad l_0, m_0, k_0 > 0, \end{cases} \tag{1}$$

которая описывает взаимодействие различных видов клеток человеческого организма при медикаментозной терапии псориаза [1, 2]. Здесь $l(t)$, $k(t)$, $m(t)$ — фазовые переменные системы (1); l_0, k_0, m_0 — их начальные условия; σ, ρ, δ, β, μ, λ, ν, γ_1, γ_2 — заданные положительные константы; $u(t)$ и $v(t)$ — управления, подчиняющиеся ограничениям

$$0 < u_{\min} \le u(t) \le 1, \qquad 0 < v_{\min} \le v(t) \le 1. \tag{2}$$

Для системы (1) множество допустимых управлений $D(T)$ образуют всевозможные пары измеримых по Лебегу функций $(u(t), v(t))$, которые при почти всех $t \in [0,T]$ удовлетворяют соответствующим неравенствам (2).

Введем область

$$\Omega = \big\{(l,m,k)\colon\ l > 0,\ m > 0,\ k > 0,\ l + m + k < M\big\},$$

где M — положительная константа, зависящая от параметров σ, ρ, γ_1, γ_2, T системы (1) и ее начальных условий l_0, k_0, m_0. Тогда ограниченность, положительность и продолжимость решений системы (1) устанавливаются следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть справедливо включение $(l_0, k_0, m_0) \in \Omega$. Тогда для любой пары допустимых управлений $(u(t), v(t))$ отвечающие им решения $l(t)$, $k(t)$, $m(t)$ системы (1) определены на всем отрезке $[0, T]$ и удовлетворяют включению $(l(t), k(t), m(t)) \in \Omega$ при всех $t \in (0, T]$.*

Опираясь на результаты из [1, 2], мы считаем, что в дальнейших рассуждениях выполнены неравенства

$$\gamma_1 \neq \gamma_2, \qquad (\beta+\delta)\gamma_1 > \delta\gamma_2, \qquad \lambda > \mu, \qquad \lambda > \nu.$$

Для системы (1) на множестве допустимых управлений $D(T)$ рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u(\cdot), v(\cdot)) = k(T). \tag{3}$$

Существование в задаче (1), (3) оптимальных управлений $(u_*(t), v_*(t))$ и отвечающих им оптимальных решений $l_*(t)$, $m_*(t)$, $k_*(t)$ вытекает из леммы 1 и [3, гл. 4, теорема 4]. Для их анализа мы применим принцип максимума Понтрягина [4]. Тогда для управлений $(u_*(t), v_*(t))$ и отвечающих им решений $l_*(t)$, $m_*(t)$, $k_*(t)$ существует такая вектор-функция $\psi_*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t))$, что

(i) $\psi_*(t)$ является нетривиальным решением сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1^*(t) = -u_*(t)k_*(t)(\gamma_2\psi_2^*(t) - \gamma_1\psi_1^*(t)) - \\ \qquad - v_*(t)m_*(t)(-\delta\psi_1^*(t) + (\beta+\delta)\psi_2^*(t) - \beta\psi_3^*(t)) + \mu\psi_1^*(t), \\ \dot{\psi}_2^*(t) = -u_*(t)l_*(t)(\gamma_2\psi_2^*(t) - \gamma_1\psi_1^*(t)) + \lambda\psi_2^*(t), \\ \dot{\psi}_3^*(t) = -v_*(t)l_*(t)(-\delta\psi_1^*(t) + (\beta+\delta)\psi_2^*(t) - \beta\psi_3^*(t)) + \nu\psi_3^*(t), \\ \psi_1^*(T) = 0, \quad \psi_2^*(T) = -1, \quad \psi_3^*(T) = 0; \end{cases} \tag{4}$$

(ii) управления $(u_*(t), v_*(t))$ максимизируют гамильтониан

$$\begin{aligned} &H(l_*(t), k_*(t), m_*(t), u, v, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t)) = \\ &\qquad = (\sigma - \delta v l_*(t)m_*(t) - \gamma_1 u l_*(t)k_*(t) - \mu l_*(t))\psi_1^*(t) + \\ &\qquad\quad + ((\beta+\delta)v l_*(t)m_*(t) + \gamma_2 u l_*(t)k_*(t) - \lambda k_*(t))\psi_2^*(t) + \\ &\qquad\quad + (\rho - \beta v l_*(t)m_*(t) - \nu m_*(t))\psi_3^*(t) \end{aligned}$$

по переменным $u \in [u_{\min}, 1]$, $v \in [v_{\min}, 1]$ при почти всех $t \in [0, T]$, а значит, они удовлетворяют соотношениям

$$u_*(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \; L_u(t) > 0, \\ \forall u \in [u_{\min}, 1], & \text{если } \; L_u(t) = 0, \\ u_{\min}, & \text{если } \; L_u(t) < 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$v_*(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \; L_v(t) > 0, \\ \forall v \in [v_{\min}, 1], & \text{если } \; L_v(t) = 0, \\ v_{\min}, & \text{если } \; L_v(t) < 0, \end{cases} \tag{6}$$

где функции

$$\begin{aligned} L_u(t) &= l_*(t)k_*(t)(\gamma_2\psi_2^*(t) - \gamma_1\psi_1^*(t)), \\ L_v(t) &= l_*(t)m_*(t)(-\delta\psi_1^*(t) + (\beta+\delta)\psi_2^*(t) - \beta\psi_3^*(t)) \end{aligned}$$

являются функциями переключений, которые описывают с помощью формул (5) и (6) поведение соответствующих управлений $u_*(t)$ и $v_*(t)$.

Теперь введем положительную константу $\alpha = \gamma_2^{-1}((\beta+\delta)\gamma_1 - \delta\gamma_2)$ и вспомогательную функцию $G(t) = \psi_1^*(t)$, а также определим функции

$$a_u(t) = l_*^{-1}(t)(\sigma - \mu l_*(t)), \qquad a_v(t) = \gamma_2^{-1}(\beta+\delta)(\lambda-\nu)k_*^{-1}(t)m_*(t),$$

$$b_v(t) = (l_*(t)m_*(t))^{-1}(\rho l_*(t) + \sigma m_*(t) - \mu l_*(t)m_*(t)),$$

$$c_u(t) = \gamma_1(\lambda-\mu)l_*(t)k_*(t), \qquad c_v(t) = (\alpha(\lambda-\nu) + \delta(\lambda-\mu))l_*(t)m_*(t),$$

$$f(t) = k_*^{-1}(t)m_*(t)((\beta+\delta)l_*(t) - \delta k_*(t)), \qquad g(t) = \gamma_1 k_*(t).$$

Тогда, используя уравнения систем (1) и (4), мы получим задачу Коши для функций переключений $L_u(t)$, $L_v(t)$ и функции $G(t)$:

$$\begin{cases} \dot{L}_u(t) = a_u(t)L_u(t) + c_u(t)G(t) + v_*(t)(f(t)L_u(t) + g(t)L_v(t)), \\ \dot{L}_v(t) = a_v(t)L_u(t) + b_v(t)L_v(t) + c_v(t)G(t) - \\ \qquad\qquad - u_*(t)(f(t)L_u(t) + g(t)L_v(t)), \\ \dot{G}(t) = -u_*(t)l_*^{-1}(t)L_u(t) - v_*(t)l_*^{-1}(t)L_v(t) + \mu G(t), \\ L_u(T) = -\gamma_2 l_*(T)k_*(T), \quad L_v(T) = -(\beta+\delta)l_*(T)m_*(T), \quad G(T) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Формулы (5), (6) показывают возможные виды оптимальных управлений $u_*(t)$ и $v_*(t)$. Они могут иметь только релейный вид и переключаться между соответствующими значениями $u_{\min}$ и 1, $v_{\min}$ и 1. Это происходит, когда в тех точках, где функции переключений $L_u(t)$ и $L_v(t)$ обращаются в нуль, их производные $\dot{L}_u(t)$ и $\dot{L}_v(t)$ не равны нулю. Или, помимо участков релейного вида, управления $u_*(t)$ и $v_*(t)$ могут также содержать особые участки [5, 6]. Это имеет место, когда функции переключений $L_u(t)$ и $L_v(t)$ по отдельности или обе одновременно обращаются в нуль тождественно на некоторых интервалах отрезка $[0, T]$.

Особую роль при анализе функций $L_u(t)$ и $L_v(t)$ играет задача Коши (7). Ее изучение приводит к следующим леммам.

Лемма 2. *Существуют такие значения $t_0^u, t_0^v \in [0, T)$, что на интервалах $(t_0^u, T]$ и $(t_0^v, T]$ соответствующие функции переключений $L_u(t)$ и $L_v(t)$ принимают отрицательные значения.*

Следствие. *Из леммы 2 и формул (5), (6) вытекают соотношения*

$$u_*(t) = u_{\min}, \quad t \in (t_0^u, T]; \qquad v_*(t) = v_{\min}, \quad t \in (t_0^v, T].$$

Лемма 3. *Не существует интервала $\Delta_{u,v} \subset [0, T]$, на котором одновременно обе функции переключений $L_u(t)$ и $L_v(t)$ тождественно обращаются в нуль.*

Лемма 4. *Пусть интервал $\Delta_u = (t_1^u, t_2^u) \subset [0, T]$ является особым для оптимального управления $u_*(t)$. Тогда существует такое число $\epsilon_u > 0$, что на интервале $(t_1^u - \epsilon_u, t_2^u + \epsilon_u)$ оптимальное управление $v_*(t)$ постоянно и принимает одно из двух значений $v_{\min}$ или 1.*

Пусть интервал $\Delta_v = (t_1^v, t_2^v) \subset [0, T]$ является особым для оптимального управления $v_*(t)$. Тогда существует такое число $\epsilon_v > 0$, что на интервале $(t_1^v - \epsilon_v, t_2^v + \epsilon_v)$ оптимальное управление $u_*(t)$ постоянно и принимает одно из двух значений $u_{\min}$ или 1.

Следствие. *При возникновении особого участка у одного из оптимальных управлений $u_*(t)$ или $v_*(t)$ система (1) становится на этом участке системой с одним управлением.*

Особые участки системы (1) с управлением $u(t)$ при фиксированном постоянном управлении $v(t)$ в задаче минимизации (3) были изучены в [7]; особые участки этой системы с управлением $v(t)$ при фиксированном постоянном управлении $u(t)$ в такой задаче минимизации были исследованы в [8].

Одновременное поведение оптимальных управлений $u_*(t)$ и $v_*(t)$ в рассматриваемой задаче (1), (3) далее изучается численно с помощью расчетов в среде “BOCOP-2.0.5”. Результаты этих расчетов и их подробный анализ представлены в докладе.

Список литературы

1. *Roy P.K., Datta A.* Impact of cytokine release in psoriasis: a control based mathematical approach // J. Nonlinear Evol. Eqns. Appl. 2013. V. 2013, N 3. P. 23–42.
2. *Datta A., Li X.-Z., Roy P.K.* Drug therapy between T-cells and DCs reduces the excess production of keratinicytes: ausal effect of psoriasis // Math. Sci. Int. Res. J. 2014. V. 3, N 1. P. 452–456.
3. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
5. *Schättler H., Ledzewicz U.* Optimal control for mathematical models of cancer therapies: an application of geometric methods. Springer: New York, 2015.
6. *Зеликин М.И., Борисов В.Ф.* Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 11. С. 3–161.
7. *Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В.* Оптимальные стратегии лечения в математической модели псориаза // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, 17–26 апр. 2017 г.: Тез. докл. М.: МАКС Пресс, 2017. С. 53–54.
8. *Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В.* Исследование задачи оптимального управления для математической модели лечения псориаза // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, 23–27 окт. 2017 г.: Тез. докл. М.: МАКС Пресс, 2017. С. 85.

Прямое вычисление константы оптимального регулятора и функции Беллмана в задаче Фуллера с привлечением возможностей среды Maple (Direct calculation of the optimal regulator's constant and Bellman function in the Fuller problem using the Maple system possibilities)

Ю. Н. Киселёв (Yu. N. Kiselev),
С. Н. Аввакумов (S. N. Avvakumov)

Факультет вычислительной математики и кибернетики,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

kiselev@cs.msu.su, asn@cs.msu.su

В *задаче Фуллера* (см. [1–5]) наблюдается известный теоретический эффект — четтеринг — сгущение точек переключения оптимального управления в окрестности некоторого конечного момента времени T_*, зависящего от начального состояния управляемого объекта. Напомним постановку задачи Фуллера:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \quad x(0) = a, \quad x(\infty) = 0, \\ \dot{y} = u, \quad y(0) = b, \quad y(\infty) = 0, \quad |u| \le 1, \\ J[u] = \displaystyle\int_0^\infty x^2\,dt \to \min_{u(\cdot)}. \end{cases} \tag{1}$$

В задаче (1) оптимальный регулятор имеет вид

$$u(x, y; m) = \operatorname{sign}(-x - my|y|) = \begin{cases} -1, & (x, u) \in I_-, \\ +1, & (x, u) \in I_+, \end{cases} \tag{2}$$

причем константа регулятора определяется равенством

$$m = m_* = \frac{1}{12}\sqrt{6\big(\sqrt{33} - 1\big)} = 0.44\ldots \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

Для начальной точки $(a,b) \in I_-$ оптимальная программа имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in (0, t_1), \\ +1, & t \in (t_1, t_2), \\ -1, & t \in (t_2, t_3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 0, & t \in (T_*, +\infty), \end{cases} \qquad \lim_{k \to +\infty} t_k = T_* = T_*(a,b) \in (0, +\infty).$$

Рассматривается следующая задача: найти параметр $m \in (0, 1/2)$ из условия

$$F(a,b;m) \equiv J(u)|_{u=u(\cdot,\cdot;m)} \to \min_{m \in (0,\,1/2)}$$

для данного начального состояния (a,b). Показано, что минимизатор в этой задаче

$$m_* = \operatorname*{arg\,min}_{m \in (0,\,1/2)} F(a,b;m), \qquad m_* \approx 0.44,$$

не зависит от начального состояния (a,b) и имеет вид (3). Эти вычисления выполнены в среде Maple. Вводится вспомогательная переменная

$$q = \sqrt{\frac{1-2m}{1+2m}} \in (0,1) \qquad \Leftrightarrow \qquad m = m(q) \equiv \frac{1-q^2}{2(1+q^2)} \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Вводится функция

$$G(a,b;q) = F(a,b;m)|_{m=m(q)},$$

которая после ряда аналитических вычислений в среде Maple представляется в виде

$$G(a,b;q) = \frac{b}{15}(2b^4 + 10ab^2 + 15a^2) + \frac{\sqrt{2}\,g(q)}{240}(2a+b^2)^{5/2}, \quad (a,b) \in I_-,$$
$$G(a,b;q) = G(-a,-b;q), \qquad (a,b) \in I_+,$$

где

$$g(q) = \sqrt{1+q^2}\,\frac{23q^4 - 14q^2 + 23}{1-q^5}.$$

Минимизатор последней функции

$$q_* = \operatorname*{arg\,min}_{q \in (0,1)} G(a,b;q) = \operatorname*{arg\,min}_{q \in (0,1)} g(q) \in (0,1)$$

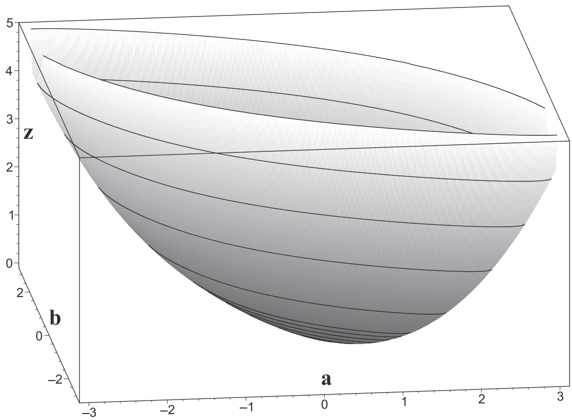


Рис. 1. Характер зависимости оптимального значения функционала от начальной точки (a, b) в задаче (1): поверхность $z = W(a, b)$

не зависит от начальной точки (a, b), вычисляется, и по нему находится оптимальный параметр регулятора

$$m_* = \frac{1 - q_*^2}{2(1 + q_*^2)} = \sqrt{\frac{\sqrt{33} - 1}{24}} \approx 0.44462\ldots,$$

$$q_* = \sqrt{\frac{1 - 2m_*}{1 + 2m_*}} \approx 0.24212\ldots.$$

Минимальное значение функции G определяет функцию Беллмана

$$W(a, b) = \frac{b}{15}(2b^4 + 10ab^2 + 15a^2) + w_* \cdot (2a + b^2)^{5/2}, \quad (a, b) \in I_-,$$

$$W(a, b) = W(-a, -b), \qquad (a, b) \in I_+,$$

где константа $w_* = \sqrt{2}\, g(q_*)/240 = 0.135\ldots$, а $W(0, 0) = 0$.

Функция $W(a, b)$ — гладкое решение уравнения Беллмана

$$a^2 + W_a'(a, b) \cdot b + W_b'(a, b) \cdot (\mp 1) = 0, \qquad (a, b) \in I_\mp.$$

Для линии переключения имеет место условие $W_b'(a, b) = 0$. Оптимальность регулятора (2), (3) для задачи (1) вытекает из теории динамического программирования для непрерывных управляемых систем.

Настоящие тезисы являются расширенной версией публикаций [5, 6].

Список литературы

1. *Фуллер А.Т.* Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Тр. I Конгр. ИФАК, 1960. М. Т. 2. С. 584–605.
2. *Wonham W.M., Johnson C.D.* Optimal bang–bang control with quadratic perfomance index: Preprint. Joint Automatic Control Conference, Univ. Minnesota, 1963.
3. *MacFarlane A.* Tom Fuller: a memoir (obitary) // Int. J. Control. 2000. V. 73, N 6. P. 457–463.
4. *Борисов В.Ф., Зеликин М.И., Манита Л.А.* Экстремали с накоплением переключений в бесконечномерном пространстве // Оптимальное управление. Тбилиси, 2008. С. 3–55. (Современная математика и ее приложения; Т. 58).
5. *Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.* Задача Фуллера: прямое вычисление константы регулятора и функции Беллмана // Обратные и некорректно поставленные задачи: Тез. докл. VI конф. М., 2000. С. 3.
6. *Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н.* Прямое вычисление константы оптимального регулятора и функции Беллмана в задаче Фуллера с привлечением возможностей среды Maple // Ломоносовские чтения: Науч. конф., Москва, фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, 17–26 апр. 2018 г.: Тез. докл. М., 2018. С. 66–66.

Решение задачи Фуллера на основе принципа максимума Понтрягина (Solution of Fuller's problem based on Pontryagin's maximum principle)

Ю. Н. Киселёв (Yu. N. Kiselev), М. В. Орлов (M. V. Orlov), С. М. Орлов (S. M. Orlov)

Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

kiselev@cs.msu.su, orlov@cs.msu.su, sergey.orlov@cs.msu.su

Рассмотрим классическую двумерную задачу Фуллера [1]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = a, \\ \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le 1, \quad x_2(0) = b, \\ J \equiv \displaystyle\int_0^{+\infty} x_1^2(t)\, dt \to \min_{u(\cdot)}. \end{cases} \tag{1}$$

Решение задачи (1) совпадает с оптимальным решением следующей задачи со свободным временем T:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = a, \quad x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le 1, \quad x_2(0) = b, \quad x_2(T) = 0, \\ J \equiv \displaystyle\int_0^{T} x_1^2(t)\, dt \to \min_{u(\cdot)}. \end{cases} \tag{2}$$

Напомним, что оптимальное решение задачи (2) обращает в нуль функцию Гамильтона $M(x, \psi)$ с некоторой функцией $\psi(\cdot)$, т.е.

$$M(x(t), \psi(t)) = K(x(t), \psi(t), u(t)) = 0 \qquad \forall t \in [0, T], \tag{3}$$

где $M(x, \psi) \equiv \max_{u \in [-1,1]} K(x, \psi, u)$, а функция Гамильтона–Понтрягина $K(x, \psi, u)$ для задачи (2) имеет вид

$$K(x, \psi, u) = -\frac{1}{2} x_1^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Для построения оптимального решения задачи (2) достаточно найти при некотором $T > 0$ решение краевой задачи принципа максимума специального вида, а именно

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = a, \\ \dot{x}_2 = \operatorname{sign}(\psi_2), \quad x_2(0) = b, \\ \dot{\psi}_1 = x_1, \quad x_1(T) = \psi_1(T) = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad x_2(T) = \psi_2(T) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Лемма 1. *Любое решение краевой задачи* (4) *определяет оптимальную траекторию задачи Фуллера.*

Для построения решения краевой задачи (4) на фазовой плоскости x_1, x_2 строится линия переключения AOB, определяемая уравнением

$$x_1 = \varphi(x_2), \qquad \text{где} \quad \varphi(x_2) = \begin{cases} \varphi_{AO}(x_2), & x_2 \le 0, \\ \varphi_{BO}(x_2), & x_2 > 0, \end{cases}$$

$$\varphi_{AO}(x_2) = \lambda \frac{x_2^2}{2}, \qquad \varphi_{BO}(x_2) = -\lambda \frac{x_2^2}{2},$$

причем $\varphi_{BO}(x_2) = -\varphi_{AO}(-x_2)$, $x_2 \ge 0$. Положительный параметр $\lambda \in (0, 1)$ пока не определен. Часть AO линии переключения расположена в четвертой четверти и определяется уравнением

$$x_1 = \varphi_{AO}(x_2) \equiv \lambda \frac{x_2^2}{2}, \qquad x_2 \le 0. \tag{5}$$

Часть BO линии переключения расположена во второй четверти и определяется уравнением

$$x_1 = \varphi_{BO}(x_2) \equiv -\lambda \frac{x_2^2}{2}, \qquad x_2 > 0. \tag{6}$$

Линия переключения AOB обладает свойством центральной симметрии, причем

$$\varphi_{AO}(-\infty) = +\infty, \qquad \varphi_{BO}(+\infty) = -\infty,$$

Предположим, что начальная точка $x(0)$ находится на линии переключения AO: с учетом (5) имеем $x_2(0) = b < 0$, $x_1(0) \equiv a = \lambda b^2/2 > 0$,

$\psi_2(0) = 0$. Начальное условие для ψ_1 найдем, привлекая соотношение (3), взятое при $t = 0$:

$$M(x(0), \psi(0)) \equiv -\frac{1}{2} x_1^2(0) + \psi_1(0)\, x_2(0) + |\psi_2(0)| = 0,$$

откуда

$$\psi_1(0) = \frac{x_1^2(0)}{2x_2(0)} = \lambda^2 \frac{b^3}{8} < 0.$$

Получаем задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = \lambda\, \dfrac{b^2}{2} > 0, \\ \dot{x}_2 = \operatorname{sign}(\psi_2), \quad x_2(0) = b < 0, \\ \dot{\psi}_1 = x_1, \quad \psi_1(0) = \lambda^2 \dfrac{b^3}{8} < 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad \psi_2(0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Лемма 2. *Существует единственное $\lambda \in (0,1)$ такое, что решение задачи Коши (7) на отрезке $[0,\tau]$, где $\tau = -(1 + q(\lambda))\, b > 0$, $q(\lambda) = \sqrt{(1-\lambda)/(1+\lambda)} \in (0,1)$, удовлетворяет соотношениям*

$$x_2(\tau) = -q(\lambda)\, b > 0, \qquad x_1(\tau) = -\lambda \frac{x_2^2(\tau)}{2} = -q^2(\lambda)\, \lambda\, \frac{b^2}{2} < 0,$$

т.е. $x(\tau)$ принадлежит линии переключения ВО,

$$\psi_2(\tau) = 0, \qquad \psi_1(\tau) = \lambda^2 \frac{x_2^3(\tau)}{8} = -q^3(\lambda)\, \lambda^2 \frac{b^3}{8} > 0,$$

кроме того,

$$\psi_2(t) > 0 \qquad \forall t \in (0, \tau).$$

Список литературы

1. *Фуллер А.Т.* Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Тр. I Конгр. ИФАК (Москва, 1960). М., 1961. Т. 2. С. 584–605.
2. *Борисов В.Ф., Зеликин М.И., Манита Л.А.* Экстремали с накоплением переключений в бесконечномерном пространстве // Оптимальное управление. Тбилиси, 2008. С. 3–55. (Современная математика и ее приложения; Т. 58).

3. *Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.* Задача Фуллера: прямое вычисление константы регулятора и функции Беллмана // Обратные и некорректно поставленные задачи: Тез. докл. VI конф., 2000. С. 3.
4. *Киселёв Ю.Н.* Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии: Матер. науч. сем., Планерное, Моск. обл. М.: Макс Пресс, 2003. С. 57–67.
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

Критерий корректности в параболической обратной задаче (Correctness criterion in an inverse parabolic problem)*

А. Б. Костин (A. B. Kostin)

НИЯУ МИФИ, Москва, Россия

abkostin@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0,T)$ рассматривается задача нахождения пары функций $\{u(x,t); f(x)\}$ из условий

$$u_t(x,t) - Lu(x,t) = h(x,t)f(x), \qquad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad \mathcal{B}\,u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

$$l(u) \equiv \int_0^T u(x,t)\,d\mu(t) = \chi(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

где функции h, μ, χ заданы, причем $h, h_t \in L_{\infty,2}(Q)$, $\chi(x) \in W_2^2(\Omega)$, $\mathcal{B}\chi(x) = 0$ на $\partial\Omega$, а L — равномерно эллиптический оператор вида

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)u$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы ПКС НИЯУ МИФИ, проект 02.а03.21.0005 (27.08.2013).

с коэффициентами $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $c \in L_\infty(\Omega)$, $c(x) \leq 0$, $c(x) \not\equiv 0$ в Ω; скалярная функция $\mu(t)$ принадлежит $\mathrm{BV}[0,T]$, $\mu(0) = \mu(0+)$. Оператор краевых условий $\mathcal{B}$ либо первого, либо третьего (второго) рода.

Определение 1. *Обобщенным решением* обратной задачи называется пара функций $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$ и $f(x) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (1)–(3).

Определение 2. Обратная задача (1)–(3) называется *корректной*, если для любой функции $\chi(x) \in W_2^2(\Omega)$ такой, что $B\chi(x) = 0$ на $\partial\Omega$, существует единственная функция $f(x) \in L_2(\Omega)$, для которой решение $u(x,t;f)$ прямой задачи (1), (2) удовлетворяет условию (3) и при этом справедлива оценка устойчивости

$$\|f\|_{2,\Omega} \leq C\,\|L\chi\|_{2,\Omega}.$$

Собственные функции и собственные значения задачи

$$-L\,v(x) = \lambda\,v(x), \quad x \in \Omega, \qquad \mathcal{B}\,v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

обозначим через $\{e_k(x)\}$ и $\{\lambda_k\}$, занумеровав λ_k в порядке возрастания модуля (с учетом кратности) и считая, что $\|e_k\|_{2,\Omega} = 1$. Введем в рассмотрение следующую систему функций ($k = 1, 2, \dots$):

$$\psi_k(x) := \lambda_k \int_0^T \left(\int_0^t e^{-\lambda_k\,(t-\tau)}\,h(x,\tau)\,d\tau \right) d\mu(t)\,e_k(x) \equiv \beta_k(x)\,e_k(x). \quad (4)$$

Теорема 1. *Пусть выполнены все приведенные выше условия. Обратная задача* (1)–(3) *корректна только тогда, когда система функций* $\{\psi_k(x)\}$ *образует базис Рисса в пространстве* $L_2(\Omega)$.

Замечание. Обратная задача (1)–(3) может трактоваться как задача управления. Например, в случае функции $\mu(t)$, равной единичному скачку при $t = t_1 \in (0,T]$, условие (3) приобретает вид $u(x,t_1) = \chi(x)$. Тогда задача (1)–(3) состоит в нахождении источника $f \in L_2(\Omega)$ (управления), переводящего систему из начального состояния (2) в финальное состояние (3) за время t_1. В этом случае система $\{\psi_k(x)\}$ приобретает вид

$$\psi_k(x) = \lambda_k \int_0^T e^{-\lambda_k(T-\tau)}\,h(x,\tau)\,d\tau\,e_k(x).$$

В работе [3] получено следующее достаточное условие корректности задачи (1)–(3).

Теорема 2. *Пусть* $\mu(t) \nearrow$ *на* $[0, T]$, *выполнены неравенства*

$$|l(h)(x)| \geq \delta > 0, \quad x \in \Omega, \qquad h(x,t)l(h)^{-1}(x) \geq 0, \quad (x,t) \in Q,$$

и хотя бы одно из условий

(i) $h_t(x,t)l(h)^{-1}(x) \geq 0$;

(ii) $d\mu(t) = \omega(t)\,dt$ *с функцией* $\omega \in W_1^1(0,T)$ *такой, что справедливо неравенство* $\omega'(t) + c(x)\,\omega(t) \leq 0$ *в* Q.

Тогда существует и притом единственное решение обратной задачи (1)–(3) $u \in W_2^{2,1}(Q)$, $f \in L_2(\Omega)$ *и справедлива оценка устойчивости*

$$\|f\|_{2,\Omega} + \|u\|_{2,Q}^{(2,1)} \leq C\,\|L\chi\|_{2,\Omega}.$$

В работе [4] близкие результаты получены в обратных задачах для уравнений в гильбертовом пространстве. В качестве следствия приведенных результатов получены достаточные условия базисности Рисса широкого класса систем функций вида (4).

Список литературы

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.
2. *Костин А.Б.* Базисность одной системы функций, связанной с обратной задачей нахождения источника // Диф. уравнения. 2008. Т. 44, №2. С. 246–256.
3. *Костин А.Б.* Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Мат. сб. 2013. Т. 204, №10. С. 3–46.
4. *Костин А.Б.* Критерии единственности решения и корректности в обратной задаче об источнике // Функциональный анализ. М.: ВИНИТИ, 2017. С. 81–119. (Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Темат. обзоры; Т. 133).

Уравнения Гамильтона–Якоби для динамических систем нейтрального типа (Hamilton–Jacobi equations for neutral-type dynamical systems)*

Н. Ю. Лукоянов (N. Yu. Lukoyanov)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

nyul@imm.uran.ru

В рамках позиционного подхода [1–6] рассматривается дифференциальная игра для динамической системы нейтрального типа

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\big(x[\tau]-g(\tau,x_\tau[\cdot])\big)=f(\tau,x_\tau[\cdot],u[\tau],v[\tau]),\qquad t_0\le\tau\le\vartheta,$$
$$x[\tau]\in\mathbb{R}^n,\qquad u[\tau]\in\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^l,\qquad v[\tau]\in\mathbb{V}\subset\mathbb{R}^m,\tag{1}$$

начального условия

$$x[t+\xi]=w[\xi],\quad \xi\in[-h,0],\qquad t\in[t_0,\vartheta),\tag{2}$$

и показателя качества процесса управления

$$\gamma=\sigma(x_\vartheta[\cdot]).\tag{3}$$

Здесь τ — время; $x[\tau]$ — состояние системы в момент τ; $x_\tau[\cdot]$ — история движения на промежутке $[\tau-h,\tau]$, так что $x_\tau[\xi]=x[\tau+\xi]$, $\xi\in[-h,0]$, где $h>0$ — константа запаздывания; $u[\tau]$ и $v[\tau]$ — текущие управляющие воздействия первого и второго игроков; $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ — известные компакты. Цель первого игрока — минимизировать показатель γ, цель второго — максимизировать γ.

Всюду ниже символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму, $\mathrm{Lip}([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство липшицевых функций из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Lip}=\mathrm{Lip}([-h,0],\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{G}=[t_0,\vartheta]\times\mathrm{Lip}$. Пространство Lip снабдим равномерной нормой $\|\cdot\|_\infty$. Для $\nu>0$ положим

$$D_\nu=\big\{y[\cdot]\in\mathrm{Lip}\colon\ \|y[\cdot]\|_\infty\le\nu,\ \|y[\tau]-y[\xi]\|\le\nu|\tau-\xi|,\ \tau,\xi\in[-h,0]\big\}.$$

Предполагаются выполненными следующие условия.

*Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН №01 “Фундаментальная математика и ее приложения” (грант PRAS-18-01).

- Отображение $g = g(\tau, y[\cdot]) \in \mathbb{R}^n$, $(\tau, y[\cdot]) \in \mathbb{G}$, липшицево: существуют такие $\lambda_g \in (0,1)$, $h_0 \in (0,h)$ и $\alpha_g > 0$, что

$$\|g(\tau, y[\cdot]) - g(\xi, z[\cdot])\| \leq \lambda_g \max_{\eta \in [-h, -h_0]} \|y[\eta] - z[\eta]\| +$$
$$+ \alpha_g \big(1 + \|y[\cdot]\|_\infty\big)|\tau - \xi|.$$

- Отображение $f = f(\tau, y[\cdot], u, v) \in \mathbb{R}^n$, $(\tau, y[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$, непрерывно по совокупности переменных.
- Для любого $\nu > 0$ найдется $\lambda_f > 0$, для которого справедлива оценка (условие локальной липшицевости f по $y[\cdot]$)

$$\|f(\tau, y[\cdot], u, v) - f(\tau, z[\cdot], u, v)\| \leq \lambda_f \|y[\cdot] - z[\cdot]\|_\infty, \quad y[\cdot], z[\cdot] \in D_\nu.$$

- Существует $\alpha_f > 0$, для которого имеет место оценка (условие подлинейного роста f по $y[\cdot]$)

$$\|f(\tau, y[\cdot], u, v)\| \leq \alpha_f \big(1 + \|y[\cdot]\|_\infty\big).$$

- Для любого $s \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство (условие седловой точки для маленькой игры [2, с. 79])

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(\tau, y[\cdot], u, v), s\rangle = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(\tau, y[\cdot], u, v), s\rangle,$$

  где угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают скалярное произведение.
- Начальная история движения липшицева: $x_t[\cdot] = w[\cdot] \in \mathrm{Lip}$.
- Функционал $\sigma = \sigma(y[\cdot]) \in \mathbb{R}$, $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}$, непрерывен.

Дифференциальной игре (1)–(3) ставится в соответствие функциональное уравнение Гамильтона–Якоби в коинвариантных (ci-) производных.

Обозначим через $X(t, w[\cdot])$ множество функций $x[\cdot] \in \mathrm{Lip}([t-h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию (2). Следуя [7, 8], функционал $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ называем ci-дифференцируемым в точке $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, если существуют такие $\partial_t \varphi = \partial_t \varphi(t, w[\cdot]) \in \mathbb{R}$ и $\nabla \varphi = \nabla \varphi(t, w[\cdot]) \in \mathbb{R}^n$, что для всякой функции $x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])$ при $\tau \in [t, \vartheta]$ имеет место равенство

$$\varphi(\tau, x_\tau[\cdot]) - \varphi(t, w[\cdot]) = (\tau - t)\partial_t \varphi + \langle x_\tau[0] - w[0], \nabla \varphi\rangle + o(\tau - t),$$

где $o(\delta)$ может зависеть от t и $x[\cdot]$, $o(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \downarrow 0$. Величины $\partial_t \varphi$ и $\nabla \varphi$ называются ci-производной по t и ci-градиентом функционала φ.

Пусть $\mathbb{G}_*$ — множество таких точек $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, в которых ci-дифференцируемы все координаты g_i отображения $g = (g_1, \ldots, g_n)$ из (1).

Положим $\partial_t g = (\partial_t g_1, \ldots, \partial_t g_n)$, $\nabla g = (\nabla g_1, \ldots, \nabla g_n)$. При сделанных предположениях для любых $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$ и $x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])$ имеем $(\tau, x_\tau[\cdot]) \in \mathbb{G}_*$, $\partial_t g(\tau, x_\tau[\cdot]) = \mathrm{d}g(\tau, x_\tau[\cdot])/\mathrm{d}\tau$ и $\nabla g(\tau, x_\tau[\cdot]) = 0$ при почти всех $\tau \in [t, \vartheta]$.

Определим гамильтониан H системы (1) равенством

$$H(t, w[\cdot], s) = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t, w[\cdot], u, v), s\rangle, \qquad (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}, \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим следующее уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\partial_t \varphi(t, w[\cdot]) + \big\langle \partial_t g(t, w[\cdot]), \nabla \varphi(t, w[\cdot])\big\rangle + H\big(t, w[\cdot], \nabla\varphi(t, w[\cdot])\big) = 0, \\ (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}_*. \tag{4}$$

Несмотря на то, что уравнение (4) рассматривается только на $\mathbb{G}_* \subset \mathbb{G}$, искомым является функционал φ, определенный на $\mathbb{G}$. Из-за второго слагаемого, обусловленного нейтральным типом динамической системы (1), к уравнению (4) неприменимы результаты, ранее полученные в теории уравнений Гамильтона–Якоби для обыкновенных дифференциальных систем [6] и систем запаздывающего типа [7, 8].

В работе получены следующие результаты. Показано, что если существует достаточно гладкое решение уравнения (4), удовлетворяющее краевому условию

$$\varphi(\vartheta, w[\cdot]) = \sigma(w[\cdot]), \qquad w[\cdot] \in \mathrm{Lip}, \tag{5}$$

где функционал σ взят из показателя качества (3), то это решение совпадает с функционалом цены рассматриваемой дифференциальной игры (1)–(3), формализуемой в классах чистых позиционных стратегий с памятью истории движения. При этом оптимальные стратегии игроков могут быть построены экстремальным сдвигом в направлении ci-градиентов данного решения. В негладком случае липшицева функционала цены установлено, что он совпадает с обобщенным минимаксным [6] решением задачи (4), (5). При этом оптимальные стратегии игроков строятся по минимаксному решению на основе подходящей модификации [9] метода экстремального сдвига на сопутствующие точки [2, 3], использующей две вспомогательные модели [4, 5]. В общем случае показано, что при указанных условиях минимаксное решение задачи (4), (5) определяет функционал цены дифференциальной игры (1)–(3), формализуемой в классах стратегий управления с поводырем.

По аналогии с теорией динамической оптимизации обыкновенных [6] и наследственных [7, 8] систем полученные результаты позволяют трактовать уравнение (4) как уравнение Гамильтона–Якоби для функционально-дифференциальных систем нейтрального типа вида (1).

Список литературы

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. *Осипов Ю.С.* Дифференциальные игры систем с последействием // ДАН СССР. 1971. Т. 196, №4. С. 779–782.
4. *Кряжимский А.В.* Об устойчивом позиционном управлении в дифференциальных играх // ПММ. 1978. Т. 42, №6. С. 963–968.
5. *Максимов В.И.* Дифференциальная игра наведения для систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Задачи динамического управления: сб. ст. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 33–45.
6. *Subbotin A.I.* Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston etc.: Birkhäuser, 1995.
7. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения типа Гамильтона–Якоби и дифференциальные игры с наследственной информацией // ДАН. 2000. Т. 371, №4. С. 457–461.
8. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011.
9. *Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.* Существование цены и седловой точки в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, №2. С. 101–112.

Задача управления для системы второго порядка при наличии возмущений (Control problem for a second-order system in the presence of perturbations)*

Л. Н. Лукьянова (L. N. Luk'yanova)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

lln@cs.msu.su

Рассматривается задача терминального управления для линейной системы второго порядка, содержащей управляемые параметры и параметры возмущений. В текущий момент времени доступна информация о предыстории поведения возмущения. Будущее поведение параметра возмущения неизвестно. Известно множество, его ограничивающее. В работах [1–5] получены теоремы существования решений дифференциальных игр с нефиксированным моментом окончания. В настоящей работе приводится теорема существования решения игры с нефиксированным временем окончания для инерционного объекта второго порядка. Предложена конструкция управления, использующая знание возмущения в текущий момент времени, позволяющая при неэкстремальном параметре возмущения закончить процесс приведения в конечное положение раньше гарантированного времени окончания.

1. Постановка задачи. Пусть фазовые координаты объекта $z \in E^n$ изменяются со временем по закону

$$z'' + \alpha z'(t) = \varphi(u, v), \qquad z(0) = z_0, \quad z'(0) = z_0', \tag{1}$$

где $u(t)$ — вектор управления, $v(t)$ — вектор возмущения. Векторы $u(t)$ и $v(t)$ являются измеримыми функциями, значения которых лежат в компактных множествах $U \in E^r, V \in E^s$. При выборе управления $u(t)$ в момент t возможно использовать лишь знание начального положения z_0 и возмущения $v(t)$. Здесь $\alpha \in E^1$, $\alpha > 0$. Относительно функции $\varphi\colon E^r \times E^s \to E^n$ предположим, что она непрерывна по своим аргументам и множество

$$\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v)\colon\ u \in U\}$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00539).

выпукло при каждом $v \in V$. Вектор возмущения $v(t)$ порождает также движение вектора $y(t) \in E^n$, подчиняющееся уравнению

$$y''(t) + \beta y'(t) = v(t), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

На движение вектора $y(t)$ наложено ограничение: он не может покидать область C, определенную неравенствами

$$(\psi_k, y(t)) < w_k, \qquad k = 1, \ldots, \ell.$$

Задача состоит в таком выборе управления $u(t)$ по вектору возмущения $v(t)$ согласно приведенным выше правилам, что $z(t) \in M$ в некоторый момент времени t, где M — выпуклое замкнутое множество, до того как вектор y покинет множество C. Множество M может иметь вид

$$M = a + M^0, \tag{2}$$

где M^0 — линейное подпространство.

2. Формулировка результата. Предположим, что справедливо включение

$$0 \in D = \bigcap_{v \in V} \varphi(U, v),$$

где D — телесное множество. Рассмотрим уравнение относительно λ, u и m при фиксированном $v \in V, z(T_1)$:

$$\varphi(u, v) = \lambda(m - z(T_1)), \qquad u \in U, \quad m \in M, \tag{3}$$

где

$$z(T_1) = z_0 + z'_0\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha T_1}}{\alpha}\left(2 + \frac{1}{\alpha T_1}\right) + \frac{1}{\alpha^2 T_1}\right), \qquad T_1 > 0.$$

При этом ищется решение с $\lambda \geq 0$, если только M не имеет вида (2). В последнем случае знак λ произволен. Обозначим через $\lambda(v, s)$ максимальное λ, при котором система (3) совместна.

Допустим, что система (3) совместна при любом $v \in V$ и выбрано какое-либо измеримое управление $v(t) \in V$. Тогда согласно [3] каждому $v(t)$ можно поставить в соответствие решение системы (3) $u(t), m(t)$ так, что функции $u(t)$, $m(t)$, $\lambda(v(t))$ измеримы. Положим

$$\lambda_0(v, t, T_1 + T_2) = \frac{1 - e^{-\alpha(T_1 + T_2 - t)}}{\alpha} \lambda(v),$$

$$\lambda_k(v, t, T) = \frac{\left(\psi_k, \frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta} v(t)\right)}{w_k - \left(\psi_k, y_0 + \frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta} y'_0\right)}.$$

Теорема. *Пусть определена функция* $\lambda_0(v)$, $v \in V$, *и для каждого* $T_1 > 0$ *существует такое число* $T_2 > T_1$, *что*

$$\min_{v(\cdot)}\max\Big\{\int_{T_1}^{T_1+T_2}\lambda_0(v(t),t,T_1+T_2)\,dt,$$
$$\int_0^{T_1+T_2}\lambda_1(v(t),t,T_1+T_2)\,dt,\ldots,\int_0^{T_1+T_2}\lambda_\ell(v(t),t,T_1+T_2)\,dt\Big\}\geq 1. \quad (4)$$

Тогда за счет выбора управлений $u(t)$ *из уравнения*

$$\varphi(u(t),v(t)) = \lambda(v(t))(m(t)-z(T_1))$$

найдется такой момент времени t^*, *что либо* $z(t^*) \in M$, $y(t^*) \in C$, $t^* \leq T_1+T_2$, *либо* $y(t^*) \in \partial C$, $t^* \leq T_1 + T_2$.

3. Доказательство. Пусть $v(t) \in V$, $t \geq 0$, — произвольная измеримая функция. Опишем способ выбора управления $u(t)$ на отрезках времени $t \in [0, T_1]$ и $t \in [T_1, T_2]$, $0 \leq T_1 \leq T_2$. Для $t \in [0, T_1]$ положим

$$\varphi(u(t),v(t)) = -\frac{e^{-\alpha t}}{T_1}z_0' = d(t) \in D. \quad (5)$$

Отметим, что при увеличении T_1 величина вектора d может быть сделана малой. При таком выборе управления $u(t)$ для векторов $z(T_1)$, $z'(T_1)$ имеем соотношения

$$z(T_1) = z_0 + \frac{1-e^{-\alpha T_1}}{\alpha}z_0' - \frac{e^{-\alpha T_1}\left(T_1+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}}{\alpha T_1}z_0' =$$
$$= z_0 + z_0'\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha T_1}}{\alpha}\left(2+\frac{1}{\alpha T_1}\right)+\frac{1}{\alpha^2 T_1}\right), \quad (6)$$
$$z'(T_1) = 0. \quad (7)$$

Для $t \in [T_1, T_2]$ положим

$$\varphi(u(t),v(t)) = \lambda(v(t))(m(t)-z(T_1)). \quad (8)$$

При таком выборе управления $u(t)$, $t \in [T_1, T_1+T_2]$, для вектора $z(T_2)$ имеем соотношение

$$z(t) = z(T_1) + \int_{T_1}^{t}\frac{1-e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha}\lambda(v(s))(m(s)-z(T_1))\,ds =$$

$$= z(T_1)\left(1 - \int_{T_1}^{t} \frac{1 - e^{-\alpha(t+T_1-s)}}{\alpha} \lambda(v(s))\, ds\right) +$$
$$+ \int_{T_1}^{t} \frac{1 - e^{-\alpha(t+T_1-s)}}{\alpha} \lambda(v(s)) m(s)\, ds. \qquad (9)$$

При выполнении условий теоремы в случае выполнения соотношения $\int_{T_1}^{T_1+T_2} \lambda_0(v(t), t, T_1 + T_2)\, dt = 1$ найдется момент $t^* \le T_1 + T_2$, для которого $z(t^*) = 0$. При этом $t^* = t^*(v(\cdot))$ зависит от управления $v(\tau)$, $\tau \in [T_1, t^*]$. $\square$

4. Вспомогательное соотношение для нахождения T_2 из (4). Приведем достаточное условие, гарантирующее выполнение соотношения (4). Положим $f(t) = (1 - e^{-\alpha(T_1+T_2-t)})/\alpha > 0$, $t \ge 0$. Имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\min_{v(t)\in V} \int_{T_1}^{T_2} f(t)\lambda(v(t))\, dt \ge \int_{T_1}^{T_2} f(t) \min_{v\in V} \lambda(v)\, dt = \min_{v\in V} \lambda(v) \int_{T_1}^{T_2} f(t)\, dt =$$
$$= \min_{v\in V} \lambda(v) \left(\frac{T_2 - T_1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\big(e^{-\alpha T_1} - e^{-\alpha T_2}\big)\right). \qquad (10)$$

Следовательно, если

$$\rho = \min_{v\in V} \lambda(v) > 0, \qquad (11)$$

то при достаточно больших T_2 соотношение (4) выполнено. При этом левая часть в (4) больше, чем $T\rho$, и поэтому для T справедлива оценка $T \le \rho^{-1}$.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные труды. М.: Макс Пресс, 2004.
2. *Осипов Ю.С.* Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009.
3. *Пшеничный Б.Н. Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992.
4. *Никольский М.С.* Исследование обобщенного контрольного примера Л.С. Понтрягина из теории дифференциальных игр // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, №2. С. 211–217.
5. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.

Обратная связь в задачах обращения–управления (Feedback in inversion–control problems)

В. И. Максимов (V. I. Maksimov)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

maksimov@imm.uran.ru

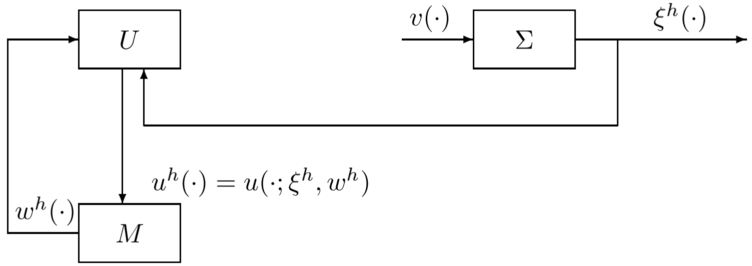
В докладе обсуждаются два типа задач: задача устойчивого гарантированного управления при наличии неконтролируемых возмущений, а также задача устойчивого динамического восстановления структурных характеристик. Приводятся алгоритмы решения этих задач, устойчивые к информационным помехам и погрешностям вычислений. Алгоритмы, ориентированные на компьютерную реализацию, позволяют осуществлять процесс решения в темпе "реального" времени. Они адаптивно учитывают неточные измерения фазовых траекторий и являются регулирующими в том смысле, что конечный результат тем лучше, чем точнее поступающая информация. В основе предлагаемых алгоритмов лежат метод экстремального сдвига Н.Н. Красовского и теория динамического обращения Ю.С. Осипова. На простейшем примере проиллюстрируем содержательную постановку обсуждаемых задач. На промежутке времени рассматривается система, описываемая векторным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(u(t) - v(t)), \qquad t \in T. \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $u, v \in \mathbb{R}^m$, $x(t_0) = x_0$, B — матрица размера $n \times m$, функция f липшицева по совокупности аргументов, $v(t)$ — помеха, u — управление. Фиксирована равномерная сетка $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$. Решение уравнения (1) зависит от изменяющегося во времени управления $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^m)$ и неизвестного возмущения $v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^m)$. Функция $x(\cdot)$ также неизвестна. В моменты $\tau_i \in \Delta$ состояние $x(\tau_i)$ (или его "часть") измеряется с ошибкой. Результаты измерений $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$, $i \in [0 : m-1]$, удовлетворяют неравенствам $|\xi_i^h - x(\tau_i)|_n \le h$. Здесь $h \in (0, 1)$ — величина информационной погрешности, $|\cdot|_n$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Задача устойчивого управления. Имеется эталонное движение, которое описывается уравнением $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = x_0$, $t \in T$. Требуется указать алгоритм формирования по принципу обратной связи управления $u(t, \xi_i^h)$, $t \in T$, такой, что как траектория $x(t)$ уравнения (1), так и ее скорость изменения $\dot{x}(t)$ останутся при всех $t \in T$ в некоторой окрестности эталонного движения.

Задача динамического обращения. В уравнении (1) $u = u(t) = 0$, $t \in T$. Требуется построить динамический алгоритм, который позволяет восстановить неизвестную помеху $v = v(\cdot)$ в "реальном времени". Для решения указанных задач может быть использован единый подход, основанный на методе позиционно-управляемых моделей [1, 2]. Ниже приведена схема алгоритма решения задачи динамического обращения.



Список литературы

1. *Osipov Ju.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
2. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2011.

Об оценивании множества достижимости для некоторых классов управляемых объектов (Estimation of the attainable set for some classes of control objects)

М. С. Никольский (M. S. Nikolskii)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

mni@mi.ras.ru

Проблемам изучения и оценивания множеств достижимости управляемых объектов посвящено довольно много работ (см., например, [1–4] и др.). Мы будем заниматься оцениванием сверху множеств достижимости квазилинейных управляемых объектов вида

$$\dot{x} = A(u)x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u \in \mathbb{R}^r$, $r \geq 1$, $u \in U$, U — компакт из $\mathbb{R}^r$, $A(u)$ — квадратная матрица порядка n, зависящая от $u \in U$ непрерывным образом. Фиксировано начальное состояние управляемого объекта (1) $x(0) = x_0$, причем вектор x_0 является ненулевым и все его координаты неотрицательны. Рассматриваются всевозможные измеримые по Лебегу управления $u(t) \in U$ при $t \in [0, T]$, где $T > 0$ — фиксированное число. Нас будет интересовать множество достижимости $D(x_0, T)$ управляемого объекта (1).

Для приложений представляет интерес получение оценок сверху для $D(x_0, T)$ в виде просто устроенных компактных множеств. Такими множествами могут быть, например, шары, эллипсоиды, параллелепипеды и т.д. Мы в качестве оценивающих сверху множеств будем рассматривать параллелепипеды со сторонами, параллельными осям координат. Построение оценивающего сверху параллелепипеда производится с помощью построения вершинных точек искомого параллелепипеда.

Предполагается выполненным следующее

Условие S. При любом $u \in U$ все элементы $a_{ij}(u)$ матрицы $A(u)$, где $i \neq j$, неотрицательны.

Введем в рассмотрение две квадратные матрицы B и C порядка n с элементами $b_{ij} = \max_{u \in U} a_{ij}$, $c_{ij} = \min_{u \in U} a_{ij}$. Рассмотрим также матричные экспоненты $\exp(tB)$, $\exp(tC)$, где $t \in \mathbb{R}^1$. Для произвольных векторов ξ, η из $\mathbb{R}^n$ условимся писать $\xi \leq \eta$ тогда и только тогда, когда при всех $i = 1, \ldots, n$ выполняются неравенства $\xi_i \leq \eta_i$.

В работе обосновываются следующие векторные неравенства:

$$\exp(TC)x_0 \leq z \leq \exp(TB)x_0 \tag{2}$$

для произвольного вектора $z \in D(x_0, T)$. Отметим, что существуют надежные методы для приближенного вычисления левой и правой частей векторного неравенства (2) с любой заданной точностью. Поэтому векторные неравенства (2) являются конструктивными. Векторные неравенства (2), расписанные в покоординатной форме, определяют некоторый параллелепипед P, причем согласно (2)

$$D(x_0, T) \subset P.$$

Отметим, что если $B = A(u^1)$, $C = A(u^2)$ при некоторых векторах u^1, u^2 из U, то полученная оценка является неулучшаемой по объему оценивающего сверху параллелепипеда со сторонами, параллельными осям координат. Это обстоятельство имеет место, например, если все элементы, кроме одного, матрицы $A(u)$ являются не зависящими от $u \in U$. Заметим также, что при сделанных предположениях можно обосновать, что все элементы матриц $\exp(tB)$ и $\exp(tC)$ являются неотрицательными величинами при $t \geq 0$.

Пример. В качестве примера полученных результатов рассмотрим двумерную билинейную управляемую систему вида

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + ux_2, \qquad \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \tag{3}$$

где константы a_{11}, a_{22} отрицательны, а константа a_{21} положительна, управление $u \in U = [p, q]$, причем $0 < p < q$. Эту систему можно рассматривать как управляемый вариант известной в политологии модели Ричардсона вооружения двух государств. Тогда величины x_1, x_2 интерпретируются как расходы двух государств на вооружение, причем в динамике расходов первого государства коэффициент при x_2 является управляемым и его можно изменять измеримым по Лебегу образом. В этом примере согласно нашим результатам нужно вычислить только элементы b_{12}, c_{12}, так как остальные элементы b_{ij}, c_{ij} совпадают с элементами a_{ij} матрицы $A(u)$. Нетрудно видеть, что $b_{12} = q$, $c_{12} = p$. Отметим, что в этом примере оценочный прямоугольник P, возникающий с помощью векторных неравенств (2), обладает свойством минимальности площади среди всех прямоугольников, содержащих множество достижимости $D(x_0, T)$, со сторонами, параллельными осям координат.

Заметим, что в этом примере матричные экспоненты $\exp(tB)$, $\exp(tC)$ могут быть вычислены в аналитической форме.

Используя результаты этих вычислений, можно проследить поведение прямоугольника P как функции параметров a_{11}, a_{21}, a_{22}, p, q и времени $T > 0$. Используя это обстоятельство, можно оценить в грубой форме динамические возможности управляемого объекта (3) при меняющемся $T > 0$, что представляет интерес для приложений.

В заключение рассмотрим управляемые объекты более общего вида, нежели управляемые объекта вида (1):

$$\dot{x} = A(u)x + h(t), \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, U — компакт из $\mathbb{R}^r$, $x(0) = x_0$, причем все его компоненты неотрицательны, $A(u)$ — непрерывная на U квадратная матрица порядка n, $h(t)$ — непрерывная n-мерная векторная функция на $[0, T]$. На управляемый объект (4), помимо условия S на функцию $A(u)$, наложим еще условие неотрицательности всех скалярных компонент $h_i(t)$ векторной функции $h(t)$ для $t \in [0, T]$. При сделанных предположениях для точек $z \in D(x_0, T)$ в докладе обосновываются следующие векторные неравенства:

$$\eta(T, x_0) \le z \le \xi(T, x_0), \tag{5}$$

где функции $\xi(t, x_0)$, $\eta(t, x_0)$ являются соответственно решениями с начальным вектором x_0 следующих уравнений:

$$\dot{\xi} = B\xi + h(t), \qquad \dot{\eta} = C\eta + h(t)$$

(определение матриц B, C см. выше). Отметим, что решения $\xi(t, x_0)$, $\eta(t, x_0)$ с использованием матричных экспонент $\exp(tB)$, $\exp(tC)$ могут быть явно выписаны по известной формуле Коши. Это обстоятельство делает неравенства (5) конструктивными. Расписывая векторные неравенства (5) в покоординатной форме, мы получим некоторый параллелепипед Q и включение $D(x_0, T) \subset Q$.

Список литературы

1. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
2. *Kurzhanskii A.B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Birkhäuser, 1997.

3. *Зайцев В.В.* Покоординатные оценки множества достижимости динамической системы // Диф. уравнения. 1993. Т. 29, №4. С. 575–584.
4. *Гусев М.И.* О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №1. С. 60–69.

Множество достижимости для машины Дубинса с односторонним поворотом (Reachable set for a Dubins car with one-sided turn)

В. С. Пацко (V. S. Patsko), А. А. Федотов (A. A. Fedotov)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

patsko@imm.uran.ru, andreyfedotov@mail.ru

Работа посвящена исследованию множества достижимости в момент для "машины Дубинса" — одной из самых популярных в задачах математической теории управления и прикладных работах моделей управляемого движения на плоскости. Динамика движения с постоянной по величине линейной скоростью и с оговоренным диапазоном возможных значений угловой скорости задается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка. Две фазовые переменные характеризуют геометрическое положение объекта на плоскости, третья переменная — угол направления вектора скорости. Скалярное управление определяет текущую угловую скорость вращения вектора линейной скорости или, что эквивалентно, мгновенный радиус поворота. Допустимые значения управляющего параметра принадлежат замкнутому отрезку.

В 1957 г. Л. Дубинс опубликовал статью [1] (относящуюся скорее к теории функций), из которой для указанной динамики с симметричным относительно нуля ограничением на управление вытекает решение задачи быстродействия. Было установлено, что наискорейший переход из точки в точку с заданными начальным и конечным направлениями линейной скорости осуществляется при помощи кусочно постоянного управления с не более чем двумя переключениями. Были выделены шесть возможных вариантов управления и показано, что при поиске оптимального программного управления можно ограничиться только ими.

Результаты, полученные Л. Дубинсом, оказались очень полезными при изучении движения объектов с ограничением на радиус поворота и с постоянной по величине линейной скоростью. Такие объекты стали называть машинами Дубинса. Следует отметить, однако, что подобными задачами еще в 1889 г. занимался А.А. Марков [2], исследуя вопросы оптимальной прокладки железных дорог. Р. Айзекс в своих работах по дифференциальным играм [3] при описании движения автомобиля также использовал такую динамику.

Различные задачи оптимального управления с использованием машины Дубинса рассмотрены в работах Ю.И. Бердышева, Ж.-П. Ламона (J.-P. Laumond), П. Циотраса (P. Tsiotras), Т. Шимы (T. Shima) и других авторов.

Для машины Дубинса множеством достижимости $G(t_f)$ *в момент* t_f назовем совокупность всех точек *трехмерного* фазового пространства, в каждую из которых можно попасть в момент времени t_f из заданного начального фазового состояния (считаем его нулевым) при помощи некоторого допустимого управления. Множество достижимости *в момент* следует отличать от множества достижимости *к моменту*. Множество достижимости к моменту t_f представляет собой объединение всех множеств достижимости в моменты, предшествующие t_f.

Построение множеств достижимости для случая, когда возможны как левый, так и правый повороты, описано в статьях [4, 5].

В работе рассматриваются множества достижимости в момент для случая, когда поворот возможен только в одну сторону. А именно, предполагается, что скалярное управление u принадлежит отрезку $[u_1, u_2]$, где $0 \leq u_1 < u_2 = 1$. При изучении границы трехмерного множества достижимости используем принцип максимума Понтрягина, который является необходимым условием приведения системы на границу множества достижимости. Исследован вопрос о числе и характере переключений управлений, ведущих на границу множества достижимости. Показано, что при $u_1 > 0$ (т.е. когда не допускается движение по прямой) сечения трехмерного множества достижимости в момент *по угловой координате* являются выпуклыми. Выпуклость сечений в случае $u_1 = 0$ доказана в статье [6].

Возможные приложения модели Дубинса с односторонним поворотом к авиационным задачам рассмотрены в работе [7].

Список литературы

1. *Dubins L.E.* On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Am. J. Math. 1957. V. 79, N 3. P. 497–516.
2. *Марков А.А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщ. Харьков. мат. о-ва. Сер. 2. 1889. Т. 1, №2. С. 250–276.
3. *Isaacs R.* Games of pursuit: Scientific report of the RAND Corporation, Santa Monica, 1951.
4. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. №3. С. 8–16.
5. *Fedotov A., Patsko V., Turova V.* Reachable sets for simple models of car motion // Recent advances in mobile robotics / Ed. by A.V. Topalov. Rijeka, Croatia: InTech, 2011. P. 147–172. http://home.imm.uran.ru/kumkov/Intech_paper_2011
6. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Множество достижимости для машины Дубинса с односторонним поворотом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, №1. С. 143–155.
7. *Choi H.* Time-optimal paths for a Dubins car and Dubins airplane with a unidirectional turning constraint: PhD Dissertation. Univ. Michigan, 2014.

Об одной задаче группового преследования с дробными производными (On a problem of group pursuit with fractional derivatives)*

Н. Н. Петров (N. N. Petrov)

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

kma3@list.ru

Важное направление развития современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования-уклонения с участием нескольких объектов [1–3], причем,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00346) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект 1.5211.2017/8.9).

кроме углубления классических методов решения, активно ведется поиск новых задач, к которым применимы уже разработанные методы. В частности, в работе [4] рассматривалась задача преследования двух лиц, описываемая уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки.

В данной работе рассматривается задача преследования группой преследователей группы убегающих с равными возможностями участников и их движение описывается уравнениями с дробными производными. Предполагается, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Приведены достаточные условия многократной поимки заданного числа убегающих.

Определение 1 [5]**.** Пусть $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$ — абсолютно непрерывная функция, $\mu \in (0,1)$. *Производной по Капуто* порядка μ функции f называется функция $D^{(\mu)}f$ вида

$$\big(D^{(\mu)}f\big)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\mu}}\,ds, \qquad \text{где} \quad \Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-s}s^{\beta-1}\,ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1,\ldots,P_n$ и m убегающих $E_1,\ldots,E_m$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\mu)}x_i = ax_i + u_i, \qquad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V. \tag{1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$D^{(\mu)}y_j = ay_j + v_j, \qquad y_j(0) = y_j^0, \quad v_j \in V. \tag{2}$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1,\ldots,n\}$, $j \in J = \{1,\ldots,m\}$, V — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$, a — вещественное число. Кроме того, $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Цель группы преследователей — осуществить поимку не менее q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее r преследователей $(r \geq 1,\ 1 \leq q \leq m)$ при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[0,\infty)$, а затем преследователи на основе информации о выборе убегающих выбирают свои управления и, кроме того, каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Считаем, что $n \geq rq$, $m \geq q$.

Многократная поимка убегающего в задаче простого преследования исследовалась в работе [6], а в примере Л.С. Понтрягина — в работе [7]. Проблема поимки заданного числа убегающих в задаче простого преследования при условии, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего, представлена в [8], где были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования. Достаточные условия поимки заданного числа убегающих в стационарном примере Л.С. Понтрягина получены в [9]. Задача преследования одного убегающего с фазовыми ограничениями и дробными производными порядка $\mu \in (0,1)$ рассматривалась в [10].

Вместо систем (1), (2) рассмотрим систему

$$D^{(\mu)} z_{ij} = a z_{ij} + u_i - v_j, \qquad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0, \quad u_i, v_j \in V.$$

Определение 2. В игре *происходит r-кратная поимка* (при $r = 1$ *поимка*) убегающего E_β, если существует $T > 0$, при котором для любых допустимых управлений $v_j(t)$, $j \in J$, $t \in [0, \infty)$, убегающих E_j, $j \in J$, найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s), s \in [0, \infty), j \in J)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, моменты времени $\tau_1, \ldots, \tau_r \in [0, T]$ и попарно различные натуральные числа $i_1, \ldots, i_r \in I$ такие, что $z_{i_p\beta}(\tau_p) = 0$ для всех $p = 1, \ldots, r$.

Определение 3. В игре *происходит r-кратная поимка* (при $r = 1$ *поимка*) *не менее q убегающих*, если существует $T > 0$, при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$, $t \in [0, \infty)$, $j \in J$, убегающих найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s), s \in \in [0, \infty), j \in J)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$M \subset J, \quad |M| = q, \quad \{N_\alpha, \alpha \in M\}, \quad N_\alpha \subset I, \quad |N_\alpha| = r \quad \forall\, \alpha \in M,$$

$$N_\alpha \cap N_\beta = \varnothing \quad \forall\, \alpha, \beta \colon \alpha \neq \beta,$$

такие, что группа преследователей $\{P_\alpha, \alpha \in N_\beta\}$ не позднее момента T осуществляет r-кратную поимку убегающего E_β, причем если преследователь P_α ловит убегающего E_β, то остальные убегающие считаются им не пойманными.

Введем следующие обозначения: $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{co} A$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A,

$$\lambda(z, v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda z \in V - v\},$$

$$\Omega_N(p) = \{(i_1, \ldots, i_p) \mid i_\alpha \in N \ \ \forall\, \alpha = 1, \ldots, p, \ i_\alpha \neq i_\beta \ \text{при} \ \alpha \neq \beta\},$$

$$\delta_N(\beta) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(z_{\alpha\beta}^0, v).$$

Теорема 1. *Пусть* $m = 1$, $a \leq 0$ *и* $\delta_I(1) > 0$. *Тогда в игре происходит* r*-кратная поимка.*

Теорема 2. *Пусть* $a \leq 0$ *и для каждого* $p \in \{0, \ldots, q-1\}$ *выполнено следующее условие*: *для любого множества* $N \subset I$, $|N| = n - pr$, *найдется множество* M, $|M| = q - p$, *такое, что* $\delta_N(\beta) > 0$ *для всех* $\beta \in M$. *Тогда в игре происходит* r*-кратная поимка не менее* q *убегающих.*

Теорема 3. *Пусть* $a \leq 0$, V *— строго выпуклый компакт с гладкой границей и для каждого* $p \in \{0, \ldots, q-1\}$ *выполнено следующее условие*: *для любого множества* $N \subset I$, $|N| = n - pr$, *существует множество* $M \subset J$, $|M| = q - p$, *такое, что*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(n-r+1)} \operatorname{Int} \operatorname{co}\big\{z^0_{\alpha\beta},\ \alpha \in \Lambda\big\}$$

для всех $\beta \in M$. *Тогда в игре происходит* r*-кратная поимка не менее* q *убегающих.*

Список литературы

1. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
2. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
3. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009.
4. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, №3. С. 262–278.
5. *Caputo M.* Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent. II // Geophys. J. R. Astron. Soc. 1967. N 13. P. 529–539.
6. *Григоренко Н.Л.* Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. Моск. ун-та. Вычислительная математика и кибернетика. 1983. №1. С. 41–47.
7. *Петров Н.Н.* Многократная поимка в примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // ПММ. 1997. Т. 61, №5. С. 725–732
8. *Петров Н.Н., Прокопенко В.А.* Об одной задаче преследования группы убегающих // Диф. уравнения. 1987. Т. 23, №4. С. 724–726.
9. *Петров Н.Н.* Об одной задаче преследования группы убегающих // Автоматика и телемеханика. 1996. №6. С. 48–54.

10. *Петров Н.Н.* Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2017. Т. 27, №1. С. 54–59.

On necessary conditions in the Mayer problem with differential inclusion*

Evgenii Polovinkin

Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia

polovinkin.es@mipt.ru

The author developed a direct method for obtaining necessary optimality conditions for the solution of the Mayer problem, in which the differential inclusion is introduced as a constraint under the conditions of unboundedness and pseudo-Lipschitz property of the right-hand side of the differential inclusion. The necessary optimality conditions are obtained in the form of a differential inclusion of the Euler–Lagrange type and generalize the results from the works of F. Clarke and the author (see [1, 2]).

Statement of the problem and conditions. We consider the interval $T := [0,1]$, closed sets $C_0, C_1 \subset \mathbb{R}^n$, a locally Lipschitz function $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ and a multivalued mapping $F\colon T \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, with the help of which we have the differential inclusion of the form

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \qquad \text{for a.e. } t \in T. \tag{1}$$

The symbol $\mathcal{R}_T(F, C_0)$ denotes the (possibly empty) set of all trajectories $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0) \subset \mathrm{AC}(T, \mathbb{R}^n)$ of the differential inclusion (1) with the initial condition $x(0) \in C_0$.

The *Mayer problem* is to find the minimum of the values $\varphi(x(1))$ over all end points $x(1) \in C_1$ of the trajectories $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$.

Let $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ be a trajectory that solves the Mayer problem; i.e., its end value $\widehat{x}(1) \in C_1$ is such that $\varphi(\widehat{x}(1))$ takes a minimum value for all

*Supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00259) and by the Russian Science Foundation (project no. 18-11-00073).

trajectories (1). To obtain the necessary conditions for optimality, it suffices to formulate local conditions on the mapping F near the trajectory $\widehat{x}(\cdot)$.

We assume that the mapping $F\colon T \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ is $(\mathcal{L} \times \mathcal{B})$-measurable and for almost every $t \in T$ the set $\operatorname{Graph} F(t,\cdot) := \{(x,y) \mid y \in F(t,x)\}$ is a closed subset in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Let there be numbers $\varepsilon > 0$, $\nu > 0$, a function $l(\cdot) \in L^1(T,\mathbb{R}^n)$ and a measurable function $R\colon T \to (0,+\infty]$ such that the following two conditions are satisfied:

(i) pseudo-Lipschitz condition: for almost every $t \in T$ and any $x_1, x_2 \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t))$, the following inclusion holds:

$$F(t,x_1) \cap (\widehat{x}'(t) + R(t)B_1(0)) \subset F(t,x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\,\overline{B_1(0)};$$

(ii) non-degeneracy condition: $l(t) \le \nu\, R(t)$ for a.e. $t \in T$.

As usual, we denote by $T_L(A;a)$ and $T_C(A;a)$, respectively, the lower tangent cone and the Clarke tangent cone to the set A at the point $a \in \overline{A}$ (see [2]).

Let there be given a measurable multivalued mapping $K\colon T \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, whose values are closed cones, that satisfies for a.e. $t \in T$ the inclusion

$$T_C(\operatorname{Graph} F(t,\cdot); (\widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))) \subset K(t) \subset T_L(\operatorname{Graph} F(t,\cdot); (\widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))).$$

Examples of such a map $K(t)$ are the Clarke tangent cone, the Michel–Peno tangent cone, and the asymptotic lower tangent cone to the set $\operatorname{Graph} F(t,\cdot)$ at the point $(\widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))$ (see [1, 2]).

Let K_0 and K_1 be Boltyanskii tents to the sets C_0 and C_1 at the points $\widehat{x}(0)$ and $\widehat{x}(1)$, respectively (see [3]). Let $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ be a convex positively homogeneous function that is the upper convex approximation of the function φ at the point $\widehat{x}(1)$. For every cone K we denote its polar cone by K^0.

Main result. The necessary conditions for the optimality of the solution of the Mayer problem take the following form.

Theorem. *Let $\widehat{x}(\cdot)$ be the solution of the Mayer problem and the above conditions be satisfied in the neighborhood of $\widehat{x}(\cdot)$. Then there exist a number $\lambda \ge 0$ and an arc $p(\cdot) \in \mathrm{AC}(T,\mathbb{R}^n)$ satisfying the nontriviality condition $\lambda + \|p(\cdot)\|_{\mathrm{AC}} \ne 0$ and the transversality condition $p(0) \in K_0^0$, $-p(1) \in K_1^0 + \lambda\,\partial\psi(0)$ and such that the arc p satisfies the Euler inclusion*

$$(p'(t), p(t)) \in K^0(t) \qquad \text{for a.e. } t \in T. \tag{2}$$

Corollary. *If in addition for all* $t \in T$ *and* $x \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t))$ *the set* $F(t,x) \cap (\widehat{x}'(t) + R(t)B_1(0))$ *is convex, then the arc* p *satisfies the Pontryagin maximum principle*

$$\langle p(t), \widehat{x}'(t)\rangle \geq \langle p(t), y\rangle \qquad \forall y \in F(t, \widehat{x}(t)) \cap (\widehat{x}'(t) + R(t)B_1(0))$$

for a.e. $t \in T$.

References

1. *Clarke F.H.* Necessary conditions in dynamic optimization. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2005. (Mem. Am. Math. Soc.; V. 173, N 816).
2. *Polovinkin E.S.* Set-valued analysis and differential inclusions. Moscow: Fizmatlit, 2014.
3. *Boltyanskii V.G.* The method of tents in the theory of extremal problems // Russ. Math. Surv. 1975. V. 30, N 3. P. 1—54.

Задачи оптимального управления динамическими системами дробного порядка с сосредоточенными и распределенными параметрами (Optimal control problems for fractional-order dynamical systems with lumped and distributed parameters)

С. С. Постнов (S. S. Postnov)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

postnov.sergey@inbox.ru

Одно из заметных направлений развития современной теории управления составляют исследования вопросов оптимального управления системами дробного порядка [1]. Наличие интегрального представления для систем дробного порядка позволяет применять для поиска оптимальных управлений метод моментов по аналогии с системами целого порядка. Данный метод позволяет строить в явном виде оптимальные управления и исследовать их свойства, в том числе в случаях, когда управления не предполагаются дифференцируемыми и/или непрерывными функциями. В настоящей работе рассматривается применение метода моментов для систем дробного порядка как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами.

В качестве системы с сосредоточенными параметрами рассматривается линейная многомерная стационарная система следующего вида:

$$ {}_0D_t^{\rho_i} q_i(t) = a_{ij} q_j(t) + b_{ij} u_j(t) + f_i(t), \qquad i, j = 1, \ldots, N, \tag{1} $$

где функции $\vec{q}(t) = (q_1(t), \ldots, q_N(t))$, $\vec{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))$ и $\vec{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_N(t))$ определяют состояние, управление и возмущение соответственно; $t \in (0, T]$, $T > 0$; a_{ij} и b_{ij} — коэффициенты; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Оператор дробного дифференцирования ${}_0D_t^{\rho_i}$ в формуле (1) понимается в смысле Хильфера [2], индекс ρ_i является составным, $\rho_i = (\alpha_i, \mu_i)$, $\alpha_i \in (0, 1]$, $\mu_i \in [0, 1]$. Рассматриваются управления, принадлежащие классу функций $L_p(0, T]$, $1 < p < \infty$, или $L_\infty(0, T]$.

Начальные условия для системы (1) задаются в виде

$$ \lim_{t \to 0+} \left[{}_0I_t^{\sigma_i} q_i(t) \right] = s_i^0, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{2} $$

где оператор дробного интегрирования ${}_0I_t^{\sigma_i}$ понимается в смысле Римана–Лиувилля [1] с показателем $\sigma_i = (1 - \alpha_i)(1 - \mu_i)$.

Конечные условия для системы (1) задаются в виде

$$ q_i(T) = q_i^T, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{3} $$

Исследуются две задачи оптимального управления:

1) задача поиска управления, переводящего систему (1) из начального состояния, определяемого условиями (2), в конечное состояние (3) и имеющего минимальную норму при заданном времени управления T;
2) задача поиска управления, переводящего систему (1) из начального состояния, определяемого условиями (2), в конечное состояние (3) за минимальное время при заданном ограничении на норму управления, $\|\vec{u}(t)\| \le l$, $l > 0$.

Обе задачи сводятся к l-проблеме моментов [3], для которой исследуются условия, определяющие возможность постановки и разрешимость. Показано, что при одинаковых показателях дробного дифференцирования $\alpha_i = \alpha$, $i = 1, \ldots, N$, упомянутая проблема моментов может быть поставлена и является разрешимой при выполнении неравенства

$$\alpha > \frac{1}{p}. \tag{4}$$

В случае $a_{ij} = \delta_{i,j-1}$, $b_{ij} = \delta_{i,N}$, $f_i(t) = 0$ аналогичное условие накладывается только на показатель α_N. Полученные условия идентичны таковым для системы (1), где оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Капуто [4], Римана–Лиувилля [5] или Адамара [6].

Для системы (1) получено общее аналитическое решение задач оптимального управления в одномерном случае, а для двумерной системы эти задачи решены в частном случае двойного интегратора. Также исследована динамика системы на фазовой плоскости: вычислены границы области, в которой заключены допустимые траектории системы, и фазовые траектории системы в режиме оптимального управления.

В качестве системы с распределенными параметрами рассматривается система вида

$$r(x)\ {}_0D_t^{\alpha} Q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right] - q(x)Q(x,t) + f(x,t) + u(x,t), \tag{5}$$
$$t \geq 0, \qquad x \in [0, L],$$

где $Q(x,t)$ — состояние системы, $f(x,t)$ — возмущение, $u(x,t)$ — распределенное управление. Функции $r(x) > 0$, $w(x) > 0$ и $q(x)$ будем считать непрерывными на отрезке $[0, L]$. Дробная производная здесь понимается в смысле Капуто [1]. Показатель α при этом может меняться в более широких пределах, чем ранее: при $\alpha \in (0, 1]$ уравнение (5) будет представлять собой уравнение диффузии дробного порядка, а при $\alpha \in (1, 2]$ — уравнение колебаний дробного порядка.

Начальные и граничные условия для уравнения (5) суть

$$\frac{\partial^k Q(x, 0+)}{\partial x^k} = \varphi^k(x), \qquad x \in [0, L], \quad k = 1, 2, \tag{6}$$

$$\left[b_i \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + a_i Q(x,t)\right]_{x=x^i} = h_i(t) + u^i(t), \qquad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \tag{7}$$

где a_i и b_i — постоянные коэффициенты, $b_1 \leq 0$, $b_2 \geq 0$, $h_i(t)$ — некоторые известные вполне регулярные функции, $x^1 = 0$, $x^2 = L$.

Граничные управления $u^{1,2}(t)$ считаются элементами либо пространства $L_p[0, T]$, $1 < p < \infty$, либо пространства $L_\infty[0, T]$. Распределенное управление $u(x,t)$ считается функцией из пространства $L_\infty(\Omega)$, $\Omega =$

$= [0,T] \times [0,L]$, либо функцией, интегрируемой со степенью p_1 по пространственной переменной и со степенью p_2 по временно́й $(1 < p_{1,2} < \infty)$.

Конечные условия формулируются так, чтобы в некоторый момент времени $T > 0$ состояние системы (5) совпадало с заданным желаемым состоянием $Q^*(x)$, а скорость его изменения соответствовала заданной зависимости $A(x)$:

$$\begin{gathered} Q(x,T) = Q^*(x), \\ \frac{\partial Q(x,T)}{\partial x} = A(x), \qquad T > 0, \quad x \in [0,L]. \end{gathered} \tag{8}$$

Для системы (5) с граничными условиями (7), как и выше для системы (1), могут быть поставлены задачи оптимального управления как задачи перевода системы из начального состояния, определяемого выражениями (6), в конечное состояние (8) при требовании минимальности нормы управления или времени перехода. Эти задачи могут быть сведены к форме обобщенной счетномерной проблемы моментов, которая может быть поставлена и будет разрешимой при выполнении условия

$$\{\alpha\} > \frac{1}{p}, \tag{9}$$

где $\{\alpha\}$ — дробная часть числа α. Для системы (5) построено приближенное решение задач оптимального управления и изучены его свойства.

Список литературы

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. *Hilfer R.* Fractional time evolution // Applications of fractional calculus in physics. Singapore: World Scientific, 2000. P. 87–130.
3. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
4. *Kubyshkin V.A., Postnov S.S.* The optimal control problem for linear systems of non-integer order with lumped and distributed parameters // Discontinuity, Nonlinearity and Complexity. 2015. V. 4, N 4. P. 429–443.
5. *Kubyshkin V.A., Postnov S.S.* Optimal control problem investigation for linear time-invariant systems of fractional order with lumped parameters described by equations with Riemann–Liouville derivative // J. Control Science and Engineering. 2016. V. 2016. Paper 4873083.
6. *Постнов С.С.* Задачи оптимального управления для линейных систем дробного порядка, заданных уравнениями с производной Адамара // ДАН. 2017. Т. 476, № 2. С. 143–147.

Определение функции управления для динамических систем нецелого порядка (Determination of a control function for dynamic systems of non-integer order)

Е. А. Постнова (E. A. Postnova)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

postnova@ipu.ru

Интегро-дифференциальное исчисление нецелого (дробного) порядка сравнительно недавно применяют для описания динамических систем с управлением, поскольку с его появлением стало возможным учитывать наличие как пространственных, так и временны́х нелокальных зависимостей [1]. В данной работе этот математический аппарат использовался для исследования задач оптимального управления линейной динамической системой нецелого порядка, когда начальные и конечные условия имеют параметрический вид, т.е. являются некоторыми функциями, зависящими от временно́го параметра T. Главный акцент был поставлен на отыскании функции управления с минимальной нормой. Дополнительно к этому проанализированы зависимости нормы управления от значений показателей дробного дифференцирования и времени управления.

В работе рассматривались два типа линейных систем дробного порядка: одномерная система общего вида и двумерная система частного вида — двойной интегратор. Первая из них описывается уравнением следующего вида:

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} q(t) = aq(t) + bu(t), $$

где $q(t)$ — фазовая координата системы; D_t^{α} — оператор дробного дифференцирования, понимается в смысле Капуто; $u(t)$ — искомая функция управления, заданная в пространстве $L_\infty[t_0, T]$; a, b — некоторые константы.

Вторая линейная система нецелого порядка — двойной интегратор представляется в виде системы двух уравнений

$$ \begin{cases} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} q_1(t) = q_2(t), \\ {}_{t_0}^{C}D_t^{\beta} q_2(t) = u(t), \end{cases} $$

где $q_1(t)$ и $q_2(t)$ — фазовые координаты системы, зависящие от времени $t \in [t_0, T]$; $u(t)$ — искомая функция управления, заданная в пространстве $L_\infty[t_0, T]$; α и β — показатели дробного дифференцирования, принимают значения на интервале $(0, 1]$; D_t^α и D_t^β — операторы дробного дифференцирования. Случай, когда $u(t) \in L_2[t_0, T]$, был рассмотрен в [2].

Начальные и конечные условия имели параметрический вид, определяемый законами движения системы. Рассмотрены четыре различных случая, которые при $\alpha = 1$ соответствуют переводу систем из состояния покоя в равномерное, равноускоренное и периодическое движения, а также из равномерного движения в равноускоренное. Например, в последнем случае были выбраны параметрические зависимости следующего вида:

$$\begin{cases} q_1^0 = t_0, \\ q_2^0 = 1, \\ q_1^T = (T - t_0)^2 + (T - t_0) + 1, \\ q_2^T = 2(T - t_0) + 1. \end{cases}$$

При решении поставленных задач для определения функции управления применялся метод моментов [3], позволяющий в том числе работать с разрывными управлениями и рассматривать явные ограничения на норму управления. На этапе поиска минимального значения функции только в системах второго типа при $u(t) \in L_\infty[t_0, T]$ возникает трансцендентное уравнение, корни которого были найдены графическим способом.

В результате проведенных исследований были получены следующие результаты. Построено решение поставленной задачи оптимального управления движением, получены явные формулы для управления, и вычислена его норма. Исследовано поведение нормы и времени оптимального управления в зависимости от показателей дробного дифференцирования и продемонстрировано, что во всех случаях перевода систем из состояния равномерного движения в равноускоренное норма управления имеет экстремум на малых временах ($T < 1$). Физически это может означать, что существуют такие параметры, при которых внешнее управляющее воздействие достигает минимального значения. Сравнение норм управлений для неклассического и классического случаев ($\alpha = 1$, $\beta = 1$) выявило резкое отличие в поведении систем на малых временах и аналогичное — на больших.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при расчетах управления для систем нецелого порядка. Практическое применение результатов может привести к экономии энергетических затрат на управление всей системы в целом.

Список литературы

1. *Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J.* Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, 2006.
2. *Постнова Е.А.* Оптимальное управление движением системы, моделируемой двойным интегратором нецелого порядка // Проблемы управления. 2018. № 2 (в печати).
3. *Кубышкин В.А., Постнов С.С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 3–17.

Задачи оптимального управления и обратные задачи для уравнений первого порядка в банаховых пространствах (Optimal control and inverse problems for first-order equations in Banach spaces)

А. И. Прилепко (A. I. Prilepko)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

prilepko.ai@yandex.ru

Пусть заданы: число $T > 0$, равномерно выпуклые банаховы пространства E, E_1, $U = V(O,T;E_1)$ и их сопряженные пространства E^*, E_1^*, $U^* = V^*(O,T;E_1^*)$, операторы $B(t)$, $B^*(t)$ такие, что $B(t)u(t) \in \in V(O,T;E)$, $B^*(t)u^*(t) \in V^*(O,T;E^*)$. Пусть $\mathcal{A}(t)$ — семейство линейных операторов, а $S_{\mathcal{A}}(t,\tau)$ — эволюционный оператор соответствующей задачи Коши.

Задача управления. Для данного элемента $e \in E$ найти пару $u(t) \in U$ и $y(t)$ из условий

$$\dot{y}(t) = \mathcal{A}(t)y(t) + B(t)u(t), \quad 0 < t < T, \qquad y(0) = 0, \quad y(T) = e. \quad (1)$$

Запишем *операторную задачу управления*. При заданном $e \in E$ требуется найти $u(t) \in U$ из уравнения

$$\mathcal{A}_T u = e, \qquad \mathcal{A}_T u \equiv \int_0^T S_{\mathcal{A}}(T,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau, \qquad \mathcal{A}_T \in \mathcal{L}(U,E). \quad (2)$$

Решение u_e задачи (1) (или (2)) называем *точным управлением* (или *управлением*), а минимальное по норме пространства U управление называем *оптимальным управлением* $u_e^{\mathrm{opt}} \equiv u_e^0$ (см. [1]). Задачу

$$\mathcal{A}_T^* e^* = u^*, \qquad \mathcal{A}_T^* e^* \equiv B^*(t)S_{\mathcal{A}}^*(T,t)e^*, \qquad \mathcal{A}_T^* \in \mathcal{L}(E^*,U^*), \quad (3)$$

сопряженную к (2), называем *непрерывно наблюдаемой*, если выполняется обратное неравенство

$$\exists\, \mu > 0\colon \quad \|\mathcal{A}_T^* e^*\| \geq \mu\|e^*\| \quad \forall\, e^* \in E^*.$$

Введем в рассмотрение следующую обратную задачу.

Обратная задача. Пусть элемент $e \in E$ задан. Найти $e^* \in E^*$ и функцию $w(t)$ из условий

$$\dot w(t) = \mathcal{A}(t)w(t) + G(t)e^*, \quad 0 < t < T, \qquad w(0) = 0, \quad w(T) = e, \quad (4)$$

где оператор $G(t) = B(t)J_u B^*(t)S_{\mathcal{A}}^*(T,t)$ задан, а $J_u \in (U^* \to U)$ есть дуальный оператор из U^* в U. Если пространства гильбертовы, то $J_u \in \mathcal{L}(U^*,U)$ есть оператор Рисса.

Теорема. *Непрерывная наблюдаемость задачи* (3) *эквивалентна существованию единственного решения обратной задачи* (4) *и эквивалентна существованию единственного оптимального управления* u_e^0 *задачи* (2), *причем выполнено неравенство* $\|u_e^0\| \leq \|e\|/\mu$.

Замечание. Обратное неравенство для (3) в гильбертовых пространствах получено во многих монографиях и статьях, посвященных задачам управления уравнениями с частными производными (см. [2] и др.).

Список литературы

1. *Прилепко А.И.* Метод Банаха и метод монотонных отображений нахождения оптимальных управлений в рефлексивных (B)-пространствах // ДАН. 2017. Т. 476, № 4. С. 377–380.
2. *Lions J.-L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30, N 1. P. 1–68.

On optimal solutions in a problem with two-dimensional bounded control*

M. I. Ronzhina[a,b], **L. A. Manita**[c]

[a]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[b]*Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University), Moscow, Russia*
[c]*National Research University Higher School of Economics, MIEM HSE, Moscow, Russia*

maryaronzhina@gmail.com, lmanita@hse.ru

We consider an optimal control problem that is affine in two-dimensional control. The origin is a singular trajectory in this problem. We study the structure of optimal solutions in a neighborhood of the origin. We use the resolution of singularity via blow up and the invariant manifold theorems to find a family of optimal solutions.

Consider the following optimal control problem:

$$\int_0^\infty \langle x(t), x(t)\rangle \, dt \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = Kx + u, \tag{2}$$

$$x(0) = x^0, \qquad y(0) = y^0, \tag{3}$$

$$\|u(t)\| \le 1. \tag{4}$$

Here $x, y, u \in \mathbb{R}^2$, K is a 2×2 diagonal matrix, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and $\|\cdot\|$ are the scalar product and the standard Euclidean norm on $\mathbb{R}^2$. If (x^0, y^0) are sufficiently close to the origin, then there exists a unique solution to (1)–(4). Under additional assumptions on the matrix K, optimal solutions exist for all (x^0, y^0).

We use the Pontryagin maximum principle. It can be shown that the problem is regular; that is, we can define the Hamiltonian as

$$H(x, y, \phi, \psi, u) = -\frac{1}{2}\langle x, x\rangle + \langle y, \phi\rangle + \langle Kx, \psi\rangle + \langle u, \psi\rangle$$

*This research was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 17-01-00805.

where ϕ and ψ are adjoint functions. The Hamiltonian system of the Pontryagin maximum principle has the form

$$\begin{aligned}\dot{\phi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = x - K\psi, \qquad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\phi,\\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \phi} = y, \qquad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \psi} = Kx + \hat{u}\end{aligned} \tag{5}$$

where the optimal control $\hat{u}(t)$ is determined by the maximum condition

$$\begin{aligned}H(x(t), \phi(t), \psi(t), \hat{u}(t)) &= \max_{\|u(t)\|\le 1} H(x(t), \phi(t), \psi(t), u)\\ &= -\frac{1}{2}\langle x, x\rangle + \langle y, \phi\rangle + \langle Kx, \psi\rangle + \max_{\|u(t)\|\le 1}\langle u, \psi\rangle.\end{aligned} \tag{6}$$

Because of that, we get $\hat{u}(t) = \psi(t)/\|\psi(t)\|$ if $\psi(t) \neq 0$. If $\psi = 0$, then any admissible control meets (6). Denote $z_1 = \psi$, $z_2 = -\phi$, $z_3 = -x$, $z_4 = -y$. We can rewrite system (5) as follows:

$$\begin{aligned}&\dot{z}_1 = z_2, \qquad \dot{z}_2 = z_3 + Kz_1,\\ &\dot{z}_3 = z_4, \qquad \dot{z}_4 = -\hat{u} + Kz_3, \qquad \hat{u} = \frac{z_1}{\|z_1\|}.\end{aligned} \tag{7}$$

Put $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^8$. A solution $z(t)$ of (7) is said to be *singular* on an interval (t_1, t_2) if $z_1(t) = 0$ for all $t \in (t_1, t_2)$. For (1)–(4), $z(t) = 0$ is a unique singular solution. It was proved [1] that optimal solutions, starting from a small enough neigbourhood of the origin, reach zero in finite time T which depends on (x^0, y^0). Moreover, the optimal control $\hat{u}(t)$ does not have a limit at $t \to T-0$. It was shown in [2] that if the initial data x^0 and y^0 are colinear, then the solutions $x(t)$ and $y(t)$ are colinear for every t. In this case the behavior of the optimal solutions of problem (1)–(4) in the neigbourhood of the origin is similar to the optimal synthesis of the Fuller problem with a scalar control. More precisely, the optimal control $\hat{u}(t)$ has an infinite number of switchings on a finite time interval, i.e., $\hat{u}(t)$ is a chattering control.

In the following, we use the complex notation for vectors in $\mathbb{R}^2$:

$$Re^{i\varphi} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi).$$

In [2, 3] for system (7) with $K = 0$ a family of optimal solutions $\hat{z}(t) = (\hat{z}_1(t), \hat{z}_2(t), \hat{z}_3(t), \hat{z}_4(t))$, $0 \le t < T$, was found:

$$\begin{aligned}\hat{z}_m(t) = -BA_{m-1}(T-t)^{5-m}e^{i\alpha\ln|T-t|}, \qquad m = \overline{1,4},\\ \hat{u}(t) = -Be^{i\alpha\ln|T-t|},\end{aligned} \tag{8}$$

where $B \in \mathcal{SO}(2)$, $i^2 = -1$, $\alpha = \pm\sqrt{5}$, $A_0 = 1/126$, $A_{j+1} = -A_j(4-j+i\alpha)$, $j = 0, 1, 2$.

Note that the trajectories (8) hit the origin in a finite time T. Moreover, the optimal control $\hat{u}(t)$ performs an infinite number of rotations along the circle S^1. If $K = 0$ then system (7) is homogeneous with respect to the action of the Fuller group. In [2, 3] this property was used to find the logarithmic spirals (8). If $K \neq 0$ then (7) does not possess this property. However, we will show that in this case there are similar optimal logarithmic spirals.

Theorem. *In a sufficiently small neighborhood of the origin there exist the following solutions to* (7):

$$z_m^*(t) = C_m\,(T_* - t)^{5-m} e^{i\alpha \ln |T_* - t|}(1 + o(1)), \qquad m = \overline{1, 4},$$

$$u^*(t) = C_0\, e^{i\alpha \ln |T_* - t|}(1 + o(1)), \qquad t \to T_* - 0,$$

and all its possible rotations. Here $0 < T_* < \infty$ *is a time at which* $z^*(t)$ *hits the origin* (*hitting time*), $C_m \in \mathbb{C}$, $m = \overline{0, 4}$. *The constants* T_* *and* C_m *depend on* $z^*(0)$.

Corollary. *There exist optimal solutions to problem* (1)–(4) *of the following form*:

$$x^*(t) = -C_3\,(T_* - t)^2 e^{i\alpha \ln |T_* - t|}(1 + o(1)),$$

$$y^*(t) = -C_4\,(T_* - t)\, e^{i\alpha \ln |T_* - t|}(1 + o(1)),$$

$$u^*(t) = C_0\, e^{i\alpha \ln |T_* - t|}(1 + o(1)), \qquad t \to T_* - 0,$$

To prove the theorem, we use the procedure of resolution of singularity for the Hamiltonian system (7). We use the same scheme as in [2, 4] and a similar change of coordinates. Doing this turns (7) into a system that is a small perturbation of the corresponding system with $K = 0$. In this case in the new coordinates the logarithmical spirals (8) turn into a periodic trajectory (cycle) for the case $K = 0$ as well as for $K \neq 0$. Then our main result follows from the invariant manifold theorems for the limit cycle [5].

References

1. *Zelikin M.I.* One-parameter families of solutions to a class of PDE optimal control problems // Contemp. Math. 1997. V. 209. P. 339–349.
2. *Zelikin M., Borisov V.* Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics and engineering. Boston: Birkhäuser, 1994.
3. *Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., Hildebrand R.* Geometry of neighborhoods of singular trajectories in problems with multidimensional control // Proc. Steklov Inst. Math. 2012. V. 277. P. 67–83.

4. *Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., Hildebrand R.* Typicality of chaotic fractal behavior of integral vortices in Hamiltonian systems with discontinuous right hand side // J. Math. Sci. 2017. V. 221, N 1. P. 1–136.
5. *Hartman Ph.* Ordinary differential equations. New York: J. Wiley & Sons, 1964.

Динамическая реконструкция входов диффузионной стохастической системы (Dynamical reconstruction of inputs in a stochastic diffusion system)*

В. Л. Розенберг (V. L. Rozenberg)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

rozen@imm.uran.ru

Задачи реконструкции входов динамических систем на основе неточной и/или неполной информации о фазовом состоянии, возникающие во многих научных и прикладных исследованиях, как правило, являются некорректными и требуют применения регуляризующих процедур. Подход к решению, предложенный в работах А.В. Кряжимского и Ю.С. Осипова [1] изначально для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и получивший название метода динамического обращения, основан на сочетании принципов теории позиционного управления и идей теории некорректных задач. Задача восстановления сводится к задаче управления по принципу обратной связи вспомогательной динамической системой (моделью), при этом адаптация модельных управлений к результатам текущих наблюдений обеспечивает аппроксимацию неизвестных входных воздействий. Обзор алгоритмов динамического восстановления входов для систем ОДУ приведен в [2].

В докладе с позиций указанного подхода исследуется задача для системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с диффузией, зависящей от фазового состояния, в постановке, в которой

*Работа выполнена при финансовой поддержке комплексной программы УрО РАН, проект 18-1-1-9 “Оценивание динамики нелинейных управляемых систем и маршрутная оптимизация”.

одновременная реконструкция неслучайных возмущений в детерминированной и стохастической частях системы проводится на основе дискретной информации о некотором количестве реализаций случайного процесса. Скалярный случай задачи был рассмотрен в [3].

Рассматривается система СДУ с диффузией, зависящей от фазового состояния:

$$\begin{gathered} dx(t,\omega) = (A(t)x(t,\omega) + B(t)u_1(t) + f(t))\,dt + U_2(t)x(t,\omega)\,d\xi(t,\omega), \\ x(0,\omega) = x_0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $t \in T = [0,\vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}$, x_0 — известная детерминированная или случайная (нормально распределенная) величина; $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) — вероятностное пространство; $\xi(t,\omega)$ — стандартный скалярный винеровский процесс (т.е. выходящий из нуля процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной t); $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ — непрерывные матричные функции размерности $n \times n$, $n \times r$ и $n \times 1$ соответственно. На систему действуют два внешних возмущения: вектор $u_1(t) \in \mathbb{R}^r$ и диагональная матрица $U_2(t) = \{u_2(t)\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Полагаем, что векторы u_1 и u_2 принимают значения из заданных выпуклых компактов S_{u1} и S_{u2}, их элементы принадлежат пространству $L_2(T)$, а координаты вектора u_2 неотрицательны. Воздействие u_1 входит в детерминированную компоненту и влияет на математическое ожидание искомого процесса, вектор u_2 регулирует амплитуду случайных помех.

Решение системы (1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий при любом t с вероятностью 1 соответствующему интегральному тождеству, содержащему в правой части стохастический интеграл Ито. При сделанных предположениях существует единственное решение, являющееся нормальным марковским процессом с непрерывными реализациями [4].

В дискретные достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l$, $i \in [0:l]$, поступает информация о некотором количестве N реализаций случайного процесса $x(\tau_i)$. Полагаем, что $l = l(N)$ и существуют оценки m_i^N математического ожидания процесса $m(t) = Mx(t)$ и D_i^N ковариационной матрицы $D(t) = M(x(t)-m(t))(x(t)-m(t))'$ такие, что выполняется соотношение

$$P\Big(\max_{i\in[1:l(N)]}\big\{\|m_i^N - m(\tau_i)\|, \|D_i^N - D(\tau_i)\|\big\} \le h(N)\Big) = 1 - g(N), \tag{2}$$

причем $h(N), g(N) \to 0$ при $N \to \infty$.

Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестных возмущений $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, определяющих случайный процесс $x(\cdot)$, по дискретной информации о его реализациях, причем вероятность сколь угодно малого отклонения приближений от искомых входов в метрике соответственно пространств $L_2(T;\mathbb{R}^r)$ и $L_2(T;\mathbb{R}^n)$ должна быть близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованном с N шаге временно́й дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$. Такую обратную задачу можно трактовать как восстановление входа СДУ в условиях, когда возможны одновременные измерения достаточно большого количества траекторий (например, движения однотипных частиц).

Специфика системы (1) допускает сведение (в соответствии с методом моментов [5]) задачи для СДУ к задаче для систем ОДУ, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица искомого процесса. Полученная совокупная система нелинейна по фазовым переменным. Для создания конечношаговой программно-ориентированной процедуры восстановления входов $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ фактически применяется разрешающий алгоритм из [1], при этом доказывается конструктивное согласование его параметров с количеством доступных измерению реализаций исходного случайного процесса.

Приведем основные результаты работы.

Лемма. *Стандартные статистические оценки m_i^N математического ожидания $m(\tau_i)$ и D_i^N ковариационной матрицы $D(\tau_i)$, построенные по N $(N > 1)$ реализациям случайных величин $x(\tau_i)$, допускают модификации, обеспечивающие выполнение* (2). *Зависимости $l(N)$, $h(N)$ и $g(N)$ выписываются явно.*

Теорема. *При согласовании параметров алгоритма реконструкции и величин N, $\delta(N)$, $h(N)$ и $g(N)$ имеет место сходимость его выхода $(v_1^N(\cdot), v_2^N(\cdot))$ к реальным воздействиям $(u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot))$ в среднеквадратичной метрике. В предположении об ограниченности вариации реальных входов справедлива следующая оценка точности алгоритма относительно количества реализаций процесса, доступных измерению*:

$$P\biggl(\max\bigl\{\|v_1^N(\cdot) - u_1^*(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}, \|v_2^N(\cdot) - u_2^*(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^n)}\bigr\} \le C_1\Bigl(\frac{1}{N}\Bigr)^{2/13}\biggr) = \\ = 1 - C_2\Bigl(\frac{1}{N}\Bigr)^{2/13}, \quad (3)$$

где $u_1^*(\cdot)$ *и* $u_2^*(\cdot)$ — *минимальные по норме входы, порождающие наблюдаемую пару* $(m(\cdot), D(\cdot))$, C_1 *и* C_2 — *некоторые константы, не зависящие от оцениваемых величин.*

Отметим, что возможны различные модификации оценки (3).

В докладе приводится пример, иллюстрирующий основные конструкции алгоритма.

Список литературы

1. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. №2. С. 51–60.
2. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Некоторые алгоритмы восстановления входов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №1. С. 129–161.
3. *Розенберг В.Л.* Динамическая реконструкция возмущений в квазилинейном стохастическом дифференциальном уравнении // Тихоновские чтения 2017: Тез. докл. науч. конф. М.: МГУ, 2017. С. 87–88.
4. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003.
5. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.

Численное решение задачи оптимального управления с интегральным функционалом качества (Numerical solution of an optimal control problem with integral cost functional)

С. П. Самсонов (S. P. Samsonov)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

samsonov@cs.msu.su

Работа посвящена рассмотрению численных методов решения линейных задач оптимального управления с интегральным функционалом качества. Использование линейности управляемой системы позволяет построить эффективно работающие численные алгоритмы. Разработке численных методов для линейных задач оптимального управления посвящен целый ряд работ. Следует, однако, заметить,что в большинстве опубликованных работ исследуется только сходимость методов и задается какой-то критерий остановки вычислений, который обеспечивает “близость” вычисляемых величин искомым, но не гарантирует заданной точности. Обычно используемые численные алгоритмы требуют численного решения некоторых задач из теории дифференциальных уравнений, линейной алгебры и т.д. Однако вычислительные погрешности решения этих вспомогательных задач могут оказаться весьма значительными, поэтому большой интерес представляют такие численные методы, для которых удается получить оценку точности вычислений с учетом вычислительных погрешностей. Данный доклад как раз и посвящен численным методам, решающим линейные задачи оптимального управления с интегральным функционалом качества с заданной точностью и с учетом вычислительных погрешностей [1].

Список литературы

1. *Самсонов С.П.* Численный метод решения линейных задач оптимального управления с заданной точностью // Проблемы динамического управления. 2009. № 4. С. 156–158.

A method for calculation of program package elements for singular clusters*

Nikita Strelkovskii[a], Sergey Orlov[b]

[a]*International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria*
[b]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
strelkon@iiasa.ac.at, sergey.orlov@cs.msu.ru

For a linear controlled dynamic system a fixed-time problem of package guidance on a convex and closed set [1] is considered. A (program) package is a family of open-loop controls having their values in the predefined convex compact, parametrised by admissible initial states from a predefined finite

*Supported by the Russian Science Foundation under grant 14-11-00539.

set and satisfying the non-anticipatory condition for the linear observations of the system

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + c(t), \quad x(t_0) = x_0, \;\; u(t) \in P, \;\; t \in [t_0, \vartheta]. \tag{1}$$

These observations, in general, do not give the full information about the exact initial state of the system. The solvability criterion of this problem comprises a finite-dimensional problem of maximisation of the concave function over a convex compact set [2] which can be solved with standard optimisation methods. If the problem is solvable, the modified method of successive approximations can be used for calculation of the program package elements. However, this method can be applied only to regular clusters of the initial states set.

Definition. A cluster of initial states $X_{0j}(\tau_k)$, $j = 1, \ldots, J$, is called regular when the left-hand side of the minimum condition is non-zero for the entire $[\tau_{k-1}, \tau_k]$, i.e.

$$\sum_{x_0 \in X_{0j}(\tau_k)} B^{\mathrm{T}}(t) F^{\mathrm{T}}(\vartheta, t) l^*_{x_0} \neq 0, \qquad t \in [\tau_{k-1}, \tau_k);$$

here τ_k, $k = 1, \ldots, K$, are the uniform signal (which corresponds to the cluster $X_{0j}(\tau_k)$) splitting moments, $l^*_{x_0}$ are support vectors for the corresponding initial state x_0 and $F(\vartheta, t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, is the matricant of system (1). Clusters which are not regular are called singular.

For calculation of the program package elements for singular clusters, a modification of the method for singular controls [3] is proposed.

First, the elements of the program package are calculated for all regular clusters. Then an integral equation of the form

$$\int_{T_{x_0}} f(t) u_{x_0}(t)\, dt = z_{x_0},$$

where T_{x_0} is the union of all time segments where an initial point x_0 belongs to any singular cluster, $f(t)$ is a known measurable vector-function and z_{x_0} is a known vector, is solved for all initial states x_0 belonging to a singular cluster using the method from [4].

After a maximum of $m \times n$ steps (where m is a number of initial states in singular clusters and n is the dimension of system (1)) the elements of the guiding program package are calculated.

References

1. *Kryazhimskiy A.V., Osipov Yu.S.* On the solvability of problems of guaranteeing control for partially observable linear dynamical systems // Proc. Steklov Inst. Math. 2012. V. 277. P. 144–159.
2. *Kryazhimskiy A.V., Strelkovskii N.V.* An open-loop criterion for the solvability of a closed-loop guidance problem with incomplete information. Linear control systems // Trudy IMM UrO RAN. 2014. V. 20. N 3. P. 132–147.
3. *Gabasov R.F., Kirillova F.M.* Linear systems optimisation. Functional analysis methods. Minsk: Izd. BGU. 1973. 248 p.
4. *Gindes V.B.* Singular control in optimal systems // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1967. N 7. P. 34–42.

Сопряженные переменные в задачах динамической реконструкции (Adjoint variables in dynamic reconstruction problems)*

Н. Н. Субботина (N. N. Subbotina)[a], **Т. Б. Токманцев (T. B. Tokmantsev)**[б]

[a]*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

[б]*Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*

subb@uran.ru, tokmancev@mail.ru

Введение. В работе предложенный ранее авторами метод решения задач реконструкции траекторий и управлений динамической системы по апостериорной зашумленной информации о реализованной фазовой траектории распространен на решение задач динамической реконструкции. Рассматриваемые модели управляемых динамических систем используются при описании динамических процессов в таких приложениях, как инженерия [4, 1, 2, 5], экономика, биология, медицина, а также в исследовании процессов технологического развития.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 18-01-00264а и 17-01-00074а.

Предлагаемый метод близок к подходу, развитому Ю.С. Осиповым и А.В. Кряжимским [3], основу которого составляет экстремальное прицеливание на движение модели-поводыря, динамика которой копирует динамику исходной управляемой системы.

Основу предлагаемого авторами метода [6, 7] составляет введение подсистемы сопряженных переменных, движение которой организовано так, что полная система осциллирует вокруг получаемых в режиме онлайн замеров реализующейся фазовой переменной.

Постановка задачи динамической реконструкции. В общем виде модель и соответствующая задача динамической реконструкции могут быть описаны следующим образом:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + G(t, x(t))u(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовые переменные, параметры $u \in \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, — управления, стесненные ограничениями

$$u \in U = \big\{u_i \in [a_i^-, a_i^+],\ a_i^- < a_i^+,\ i = 1, 2, \ldots, m\big\}. \tag{2}$$

Наблюдатель получает информацию о неаккуратных замерах фазовых переменных $x(t)$ реального (базового) движения системы, т.е. решения $x^*(t)$ задачи (1), (2) в дискретные моменты времени t_i, $t_0 = 0 < < t_1 < \ldots < t_N = T$, причем справедливы соотношения

$$|x(t) - x^*(t)| \leq \delta, \tag{3}$$

где $\delta \in (0, \delta_0]$ — известные оценки погрешностей измерений.

Пусть $t_i = t_0 + i\Delta t$, $i = 1, \ldots, N$, $\Delta t > 0$.

CRP. После получения в текущий момент $t \geq t_2$ информации о непрерывной интерполяции измерений $y^\delta(\cdot)\colon [0, t] \to \mathbb{R}^n$ нужно реконструировать управление $u^\delta(\cdot)\colon [0, t - \Delta t] \to U$ и порождаемую им траекторию $x^\delta(\cdot)\colon [0, t - \Delta t] \to \mathbb{R}^n$ системы (1), (2) такие, что выполняются соотношения

$$\|x^\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_C = \max_{\tau \in [0, T - \Delta t]} \|x^\delta(\tau) - x^*(\tau)\| \to 0, \tag{4}$$

$$\|u^\delta(\cdot) - u^*(\cdot)\|_{L_2} = \int_0^{T - \Delta t} \|u^\delta(\tau) - u^*(\tau)\|^2 \, d\tau \to 0, \tag{5}$$

когда $\delta \to 0$, $\Delta t \to 0$.

Решение задачи динамической реконструкции. Чтобы решить задачу реконструкции CRP (4), (5), мы вводим вспомогательную задачу вариационного исчисления (CVP).

Мы рассматриваем интервал $[t_{i-2}, t_i]$, $i = 2, \ldots, N$, фиксированный параметр $\delta \in (0, \delta_0]$, непрерывную интерполяцию $y^\delta(\tau)$, $\tau \in [t_{i-2}, t_i]$, и вводим функционал интегральной невязки вида

$$I_{\tau_0, x_0}(u(\cdot)) = \int_{t_{i-2}}^{t_i} \left[-\frac{\|x(\tau) - y^\delta(\tau)\|^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \|v(\tau)\|^2 \right] d\tau, \tag{6}$$

где $\alpha > 0$ — малый регуляризующий параметр, $(\tau_0 = t_{i-2}, x_0) \in D_0 \subset$ $\subset \Pi_T$. Измеримая функция $v(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_m(\cdot), v_{m+1}(\cdot), \ldots, v_n(\cdot))$: $[t_{i-2}, t_i] \to \mathbb{R}^n$ имеет частью $(u_1(\cdot), \ldots, u_m(\cdot))$, т.е. сужение на отрезок $[t_{i-2}, t_i]$ допустимого измеримого ограниченного управления в системе (1), удовлетворяющего соотношениям (2). Функция $v(\cdot)$ означает вспомогательное управление для следующей модифицированной базовой динамической системы (1):

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = f(\tau, x(\tau)) + \hat{G}(\tau, x(\tau))v(\tau), \qquad \tau \in [t_{i-2}, t_i], \tag{7}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовые переменные, управления $v \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют ограничениям

$$v \in V = \big\{ v_i \in [a_i^-, a_i^+],\ a_i^- < a_i^+,\ i = 1, 2, \ldots, m \big\}, \tag{8}$$

$(n \times n)$-матрица $\hat{G}(\tau, x) = \{\hat{g}_{i,j}(\tau, x)\}$, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, n}$, имеет следующую структуру:

$$\hat{g}_{i,j}(\tau, x) = \begin{cases} g_{i,j}(\tau, x), & i \in \overline{1, n}, \quad j \in \overline{1, m}, \\ 0, & i \in \overline{1, m}, \quad j \in \overline{m+1, n}, \\ 0, & i \in \overline{m+1, n}, \quad j \in \overline{m+1, n}, \quad i \neq j, \\ 1, & i \in \overline{m+1, n}, \quad j \in \overline{m+1, n}, \quad i = j. \end{cases} \tag{9}$$

Функция $x(\tau)$, $\tau \in [t_{i-2}, t_i]$, в выражении (6) функционала невязки означает решение системы (7), которое выработалось в системе под воздействием допустимого управления $v(\cdot)$ на интервале $[t_{i-2}, t_i]$, и $x(t_{i-2}) = x_0$.

Сейчас при фиксированных $\delta \in (0, \delta_0]$, $\alpha > 0$ мы решаем следующую задачу вариационного исчисления (CVP).

CVP. Минимизировать функционал невязки (6) на всех решениях $x(\cdot)$ системы (7), удовлетворяющих краевым условиям

$$x(t_{i-2}) = x_0 = y^\delta(t_{i-2}), \qquad \frac{dx(t_{i-2})}{dt} = \frac{dy^\delta(t_{i-2})}{dt}. \tag{10}$$

Основной результат. В работе получены достаточные условия на входные данные задачи динамической реконструкции и условия согласования параметров δ, $\alpha = \alpha(\delta)$ и Δt такие, что управления $u^\delta(\tau) = u^{\delta,\alpha(\delta)}(\tau) = u^0(\tau)$, полученные из необходимых условий оптимальности в задаче CVP, удовлетворяют условиям (4), (5), т.е. они решают задачу реконструкции CRP.

Список литературы

1. Optimization techniques: with applications to aerospace systems / Ed. by G. Leitmann. Academic Press, 1962. V. 5.
2. *Летов А.М.* Динамика полета и управления. М.: Наука, 1969.
3. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Amsterdam: Gordon and Breach, 1995.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
5. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1988.
6. *Subbotina N.N., Tokmantsev T.B.* The method of characteristics in inverse problems of dynamics // Universal J. Control Autom. 2013. V. 1, N 3. P. 79–85.
7. *Subbotina N.N., Tokmantsev T.B.* Hamiltonian constructions in inverse problems of navigation. // IPACS J. Cybernetics and Physics. 2017. V. 6, N 4. P. 256–261.

Асимптотические регуляторы в задачах оптимального экономического развития (Asymptotic stabilizers in problems of optimal economic development)*

А. М. Тарасьев (A. M. Tarasyev)[а,б], **А. А. Усова (A. A. Usova)**[а]

[а]*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

[б]*Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*

tam@imm.uran.ru, anastasy.ousova@gmail.com

Общая постановка задачи управления на основе моделей экономического роста. В работе рассматриваются задачи оптимального управления, основанные на моделях экономического роста. Модели роста используются при описании динамических процессов в таких приложениях, как экономика, экология, демография, а также в исследовании процессов технологического развития.

В общем виде модель и соответствующая задача управления могут быть описаны следующим образом. Пусть компоненты x_i ($x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$) вектора x суть производственные факторы, влияющие на объем выпуска y согласно функции (*производственной функции*) $y = f(x)$. Предполагается, что производственная функция обладает свойствами строгого монотонного роста по каждой переменной и является строго вогнутой функцией своих переменных.

Динамика производственных факторов предполагается аффинной по управлению и нелинейной по фазовому вектору x:

$$\dot{x}(t) = F(x(t))u(t) + G(x(t)) = \Phi(x(t), u(t)), \qquad x(0) = x^0, \qquad (1)$$

где матрицу $F(\cdot) = \{f_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^{n,m}$ и вектор $G(\cdot) = \{g_i(\cdot)\}_{i=1}^{n}$ составляют дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Символ $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_m(\cdot))$ задает вектор параметров управления, которые в экономической интерпретации можно определить как инвестиции в производственные факторы.

В рамках предположения о замкнутости экономической системы справедливо уравнение баланса $y(t) = c(t) + \sum_{i=1}^{m} (u_i(t) + w_i(x(t)))y(t)$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 18-01-00264а.

Иными словами, агрегированный выпуск $y(t)$ распределяется между инвестициями $(u_i(t)+w_i(x(t)))y(t)$, $u_i(t) \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, в производственные факторы с целью увеличения их производительности и потреблением $c(t)$. Согласно уравнению баланса управления u_j ограничены:

$$0 < \sum_{j=1}^{m} u_j(t) < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \bar{u}_j \in (0,1)\colon\ u_j(t) \in [0, \bar{u}_j],\ j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

а текущий уровень потребления $c(t)$ может быть найден из соотношения

$$c(t) = \left(1 - \sum_{i=1}^{m} \big(u_i(t) + w_i(x(t))\big)\right) y(t) \approx \prod_{i=1}^{m} \big(1 - u_i(t) - w_i(x(t))\big) y(t).$$

Качество процесса управления оценивается интегральным индексом потребления, дисконтированным на бесконечном промежутке времени:

$$J(\cdot) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \ln c(t)\, dt. \tag{3}$$

Задача 1. Требуется построить управляемый процесс $(x^0(t), u^0(t))$, который максимизирует функцию полезности (3) вдоль траекторий динамической системы (1) при ограничениях (2) на управления $u(\cdot)$.

Исследование задачи осуществляется в рамках принципа максимума Понтрягина (ПМП) для задач на бесконечном промежутке времени [2, 1].

Стационарный гамильтониан задачи 1

$$H(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} \ln(1 - u_i - w_i(x)) + \ln f(x) + \psi^T \Phi(x, u)$$

обладает свойством строгой вогнутости по переменной управления u. Максимум гамильтониана по переменным управления достигается при $u = u^0(x, \psi)$, где

$$u_j^0 = \begin{cases} 0, & (x,\psi) \in \Delta_j^1 = \{w_j(x) + \Gamma(x,\psi) \geq 1\}, \\ 1 - w_j(x) - \Gamma(x,\psi), & (x,\psi) \in \Delta_j^2 = \{1 - \bar{u}_j \leq w_j(x) + \Gamma(x,\psi) \leq 1\}, \\ \bar{u}_j, & (x,\psi) \in \Delta_j^3 = \{w_j(x) + \Gamma(x,\psi) \leq 1 - \bar{u}_j\}, \end{cases}$$

$$\Gamma(x,\psi) = (\psi^T F_j(x))^{-1}.$$

Из свойств правых частей динамики (1) производственных факторов и гамильтониана $H(x, \psi, u)$ следует, что максимизированный гамильтониан $H_0(x, \psi) = H(x, \psi, u^0)$ есть гладкая функция переменных x и ψ.

Согласно ПМП [1, 2] гамильтонова система задачи 1 имеет вид

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H_0(x, \psi)}{\partial \psi}, \qquad \dot{\psi}(t) = \rho\psi - \frac{\partial H_0(x, \psi)}{\partial x}. \tag{4}$$

Предполагается, что гамильтонова система (4) обладает единственной стационарной точкой $P^* = (x^*, \psi^*)$, фазовые координаты которой положительны. Исследование асимптотического поведения решений гамильтоновой системы проводится при помощи построения нелинейного регулятора, условия существования и структура которого приводятся ниже.

Нелинейный регулятор конструируется при помощи построения устойчивого линейного многообразия Ω в окрестности O^*_δ положения равновесия P^*. Для поиска линейного подпространства Ω необходимо выписать якобиан гамильтоновой системы (4), вычисленный в стационарной точке P^*:

$$J^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \rho\mathbb{E}_n - A^T \end{pmatrix}, \quad A = \frac{\partial^2 H_0^*}{\partial\psi\,\partial x}, \quad B = \frac{\partial^2 H_0^*}{\partial\psi^2}, \quad C = -\frac{\partial^2 H_0^*}{\partial x^2}, \tag{5}$$
$$(x, \psi) = P^*.$$

Линеаризованная в окрестности положения равновесия O^*_δ гамильтонова система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = A\widetilde{x} + B\widetilde{\psi}, & \widetilde{x}(t) = x(t) - x^*, \\ \dot{\psi} = C\widetilde{x} + (\rho\mathbb{E}_n - A^T)\widetilde{\psi}, & \widetilde{\psi}(t) = \psi(t) - \psi^*. \end{cases} \tag{6}$$

Построение устойчивого многообразия Ω сводится к решению следующей задачи.

Задача 2. Найти такую матрицу $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, что линейное подпространство решений системы (6), удовлетворяющих соотношению

$$\widetilde{\psi}(t) = X\widetilde{x}(t), \tag{7}$$

непусто для любых начальных условий $\widetilde{x}_0 = x_0^* - x^*$, $(x_0^*, \psi^* + X\widetilde{x}_0) \in O^*_\delta$.

Теорема. *Пусть система* (6) *имеет асимптотически устойчивое решение, удовлетворяющее равенству* (7). *Тогда устойчивое многообразие* Ω *строится по собственным векторам* $v_1, \ldots, v_n$ *гамильтоновой* *матрицы* $M = J^* - (\rho/2)\mathbb{E}_{2n}$, *отвечающим ее отрицательным собственным значениям, а искомая матрица* X *находится по формуле*

$$X = V_2 V_1^{-1}, \qquad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (v_1, \ldots, v_n), \qquad V_1, V_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{8}$$

Замечание. Любая гамильтонова матрица [3] обладает тем свойством, что ее собственные значения симметричны относительно мнимой оси, поэтому в предположении об отсутствии чисто мнимых собственных значений у матрицы M можно гарантировать существование стабильного линейного многообразия Ω.

Окончательно нелинейный регулятор в окрестности положения равновесия строится по формуле $\widehat{u}(x) = u^0(x, X(x - x^*) + \psi^*)$, а нелинейная стабилизированная система имеет вид $\dot{x} = \partial H_0(x, X(x - x^*) + \psi^*)/\partial\psi$.

Список литературы

1. *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. М.: Наука, 2007. (Тр. МИАН; Т. 257).
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
3. *Paige C., Van Loan C.* A Schur decomposition for Hamiltonian matrices // Linear Algebra Appl. 1981. V. 41. P. 11–32.

Задача о сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр (An approach problem for a control system with an unknown parameter)*

В. Н. Ушаков (V. N. Ushakov),
А. А. Ершов (A. A. Ershov)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

ushak@imm.uran.ru, ershov@imm.uran.ru

Рассматривается управляемая система на конечном промежутке времени, содержащая неопределенный постоянный (т.е. не меняющийся со временем) параметр. Значение параметра, присутствующее в управляемой системе, описываемой векторным дифференциальным уравнением, неизвестно лицу, управляющему системой; известно лишь множество, содержащее значения параметра. Изучается задача о сближении управляемой системы с целевым множеством в фазовом пространстве в конечный момент времени [1–8].

Эту задачу можно рассматривать и как позиционную игровую задачу [1, 2, 9], в которой второй игрок владеет выбором значения из множества, ограничивающего постоянный параметр. Решение задачи, получаемое в рамках позиционной формализации, выделяет нам в качестве разрешающего множества исходных позиций множество позиционного поглощения; в качестве разрешающей стратегии для всех исходных позиций, входящих в множество разрешимости, можно использовать экстремальную позиционную стратегию [1, 2]. Экстремальная стратегия обеспечит и решение нашей исходной задачи о сближении, в которой значение параметра постоянно вплоть до момента окончания игры. Такой подход дает нам возможность не прибегать к процедуре идентификации параметра как к одному из основных этапов решения задачи. Однако такой подход не дает полного решения первоначальной задачи о сближении, так как множество позиционного поглощения у́же, вообще говоря, чем множество разрешимости первоначальной задачи. Стремясь к полному решению задачи, мы не прибегаем к каким-либо редукциям задачи о сближении, а конструируем ее (приближенное) решение,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00221 А).

используя ее специфику. При этом у нас неизбежно возникает необходимость восстановления параметра в самом начале процесса управления системой, точнее, на некотором малом начальном промежутке времени. Не имея возможности из-за сложности задачи восстановить параметр точно, восстанавливаем его приближенно. Таким образом, мы входим в круг задач теории динамического обращения [10–12].

Задачи о сближении управляемых систем с неопределенным постоянным параметром часто встречаются в механике, экологии и экономике [13, 14]. Математической постановкой таких задач является следующая [15].

На промежутке времени $[t_0, \theta]$ рассматривается управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, \alpha),$$

где t — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $u \in P$ — вектор управляющих воздействий, $P \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^p)$, $\alpha \in A$ — вектор-параметр, $A \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^q)$; здесь $\mathbb{R}^k$ — евклидово пространство размерности k, $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ — пространство компактов в $\mathbb{R}^k$ с хаусдорфовой метрикой $d(\cdot, \cdot)$.

Предполагается, что управляющему лицу в начальный момент t_0 неизвестно значение параметра α, присутствующего в системе; известно лишь ограничение A на параметр.

Требуется выбором управления $u = u(t) \in P$ на $[t_0, \theta]$ перевести фазовый вектор $x = x(t)$ из положения $x(t_0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ на целевое множество $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ в конечный момент времени θ.

Процедура конструирования приближенного решения задачи о сближении включает в себя три основных этапа. На первом этапе осуществляется приближенное вычисление так называемого множества разрешимости задачи о сближении. Под этим множеством мы имеем в виду множество всех тех исходных позиций управляемой системы, для которых при любом допустимом значении параметра существует допустимое управление, приводящее движение системы на целевое множество. Второй этап ассоциируется нами с приближенной идентификацией значения параметра, присутствующего в управляемой системе, посредством использования пробного управления на малом начальном промежутке времени. На третьем этапе на основе информации о приближенно вычисленном множестве разрешимости и значения параметра в системе конструируется разрешающее управление.

Рассмотрены конкретные примеры решения таких задач о сближении для управляемых систем, содержащих неопределенный постоянный параметр.

Список литературы

1. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. *Осипов Ю.С.* Альтернатива в дифференциально-разностной игре // ДАН СССР. 1971. Т. 197, №5. С. 619–624.
4. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
5. *Куржанский А.Б.* Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.
6. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* Об одном алгоритмическом критерии разрешимости игровых задач для линейных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, №1. С. 2–10.
7. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 119–158.
8. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
9. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
10. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011.
11. *Максимов В.И.* Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000.
12. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.
13. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
14. *Тарасьев А.М., Усова А.А.* Чувствительность фазовых портретов гамильтоновых систем для модели роста ресурсозависимой экономики // Динамика систем и процессы управления: Тр. Междунар. конф. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. С. 317–324.
15. *Ершов А.А., Ушаков В.Н.* О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Мат. сб. 2017. Т. 208, №9. С. 56–99.

Повторяющаяся игра как модель для анализа соглашений об охране окружающей среды (The repeated game as a model for analysis of environmental agreements)*

А. А. Васин (A. A. Vasin), А. Г. Дивцова (A. G. Divtsova)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

vasin@cs.msu.su, nastyakislaeva@gmail.com

Рассматривается повторяющаяся игра, в которой взаимодействие в каждый период происходит в два этапа. Первый этап представляет собой обобщение известной модели "трагедия общин" [3], в которой индивидуальная оптимизация производственной деятельности каждым игроком приводит к "плохому" равновесию с высоким уровнем загрязнения окружающей среды. На втором этапе игроки перераспределяют выигрыши с помощью побочных платежей. В каждый период отдельного участника интересует суммарный выигрыш за несколько предстоящих повторений до его горизонта планирования. Целью работы является поиск условий существования совершенного подыгрового равновесия (СПР) повторяющейся игры, реализующего парето-оптимальный исход, максимизирующий суммарный выигрыш в однократной игре. Подобные математические задачи рассматривались в работе [2]. Данная проблема представляет интерес в контексте изучения международных соглашений об ограничении загрязнений окружающей среды (см. [1, 4]). Существование СПР означает возможность стабильного и эффективного соглашения такого рода.

В однократной игре, моделирующей взаимодействие в данный период времени, стратегией i-го игрока является величина $z_i \in Z_i = [0, z_{\max,i}]$ выбрасываемого им загрязнения, прямо связанная с интенсивностью его производственной деятельности. Функция выигрыша $F_i(z) = v_i(z_i) - H_i\left(\sum_{j\in I} \pi_{ji} z_j\right)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, где $v_i(z_i)$ — полезность, которую получает страна i в результате своей деятельности, а $H_i(\hat{z}_i)$ — ущерб стране i от загрязнения, $\hat{z}_i = \sum_{j\in I} \pi_{ji} z_j$ — суммарное загрязнение, получаемое страной i от всех стран, π_{ji} обозначает переносимую на страну i долю загрязнения, выбрасываемого страной j. Пусть в игре существует

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 16-01-00353/16.

равновесие Нэша z^* в доминирующих стратегиях (например, $\pi_{ii} = 0$ или H_i — линейная функция в практически интересном диапазоне). Ситуация $\bar{z}$ называется оптимальной по Парето, если в ней реализуется максимум суммарной функции выигрыша $\max_{\vec{z}} \sum_{i=1}^{n} F_i(\vec{z})$.

В реальности рассматриваемое взаимодействие многократно повторяется в примерно одинаковых условиях. Формальной моделью служит повторяющаяся игра с полной информацией и скользящими горизонтами планирования, каждый период взаимодействия $t = 1, 2, \ldots$ включает в себя два этапа: на этапе $t1$ происходит выбор объемов загрязнения z_i^t, $i \in I$, которые определяют выигрыши $F_i^t = F_i(z^t)$, $i \in I$, с учетом потребления, затрат на очистку и ущерба от загрязнения. На этапе $t2$ игроки осуществляют побочные платежи y_i^t, $i \in I$, $\sum_i y_i^t = 0$, и определяют итоговые выигрыши $\bar{F}_i^t(z^t, y^t) = F_i(z^t) + y_i^t$, $i \in I$, за период t. Каждый игрок принимает решение на текущем этапе, исходя из полной информации о действиях всех игроков в предыдущее время. При этом игрок стремится максимизировать свой суммарный выигрыш за $T_i + 1$ периодов начиная с текущего. Последовательность действий игроков $h^{t-1} = (z^\tau, y^\tau)_{\tau=1}^{t-1}$ называется историей игры до этапа $t1$. К этапу $t2$ к истории добавляется значение z^t. Стратегия игрока i в каждый период t определяет выбор z_i^t, а затем y_i^t в зависимости от истории. Формально стратегия задается функциями $z_i^t = \sigma_i^1(h^{t-1})$, $y_i^t = \sigma_i^2(h^{t-1}, z^t)$. Ситуация σ является СПР, если для любых h и t имеем $\sigma_i^* = \arg\max_{\sigma_i} \sum_{\tau=t}^{t+T_i} \bar{F}_i(z^\tau(h^{t-1}, \sigma^* \| \sigma_i), y^\tau(h^{t-1}, \sigma^* \| \sigma_i))$, т.е. какова бы ни была предшествующая история до периода $t-1$, для игрока i оптимально следовать стратегии σ_i^*, если остальные игроки придерживаются своих стратегий σ_j^*, $j \in I \setminus i$.

Нас интересует существование СПР, для которого в каждом повторении реализуется парето-оптимальная ситуация $\bar{z}$. Рассмотрим конструкцию такого равновесия, основанную на следующих идеях. При отклонении на некотором этапе какого-то игрока остальные страны в простейшем случае (далее случай (а), см. также [1]) со следующего этапа переходят к реализации равновесия Нэша z^*, при этом побочные платежи, естественно, прекращаются. Во втором случае (случай (б)) после отклонения остальные страны продолжают сотрудничество без отклонившегося игрока. Размеры побочных платежей определяются заново. При отклонении второй страны все игроки переходят к равновесию Нэша.

Для любой вектор-функции $(f_i(z),\ i \in I)$ введем обозначения $f_i^* := := f_i(z^*)$, $\bar{f}_i := f_i(\bar{z})$, $f_\Sigma(z) := \sum_{i \in I} f_i(z)$, $f_{\Sigma(I \setminus i)}(z) := \sum_{j \in I \setminus i} f_j(z)$.

Теорема 1. *СПР для случая* (а) *существует, если и только если* $\sum_{i\in I}\big(\big(H_i^* - H_i\big(\sum_{j\in I\setminus i}\pi_{ji}\bar z_j + \pi_{ii}z_i^*\big)\big)/(1+T_i)\big) \le \bar F_\Sigma - F_\Sigma^*$. *При этом условии побочные платежи можно определить как* $y_i = F_i^* - \bar F_i - \big(H_i^* - H_i\big(\sum_{j\in I\setminus i}\pi_{ji}\bar z_j + \pi_{ii}z_i^*\big)\big)/(1+\lambda T_i)$, *где* $\lambda \le 1$ *— корень уравнения* $\sum_{i\in I}\big(\big(H_i^* - H_i\big(\sum_{j\in I\setminus i}\pi_{ji}\bar z_j + \pi_{ii}z_i^*\big)\big)/(1+\lambda T_i)\big) = \bar F_\Sigma - F_\Sigma^*$.

В случае (б) положим $\bar{\bar z}_{I\setminus i}(i) = \arg\max_{(z_j, j\in I\setminus i)} \sum_{j\in I\setminus i} F_j(z_{I\setminus i}, z_i{}^*)$, $\bar{\bar z}(i) = (\bar{\bar z}_{I\setminus i}, z_i^*)$, $\bar{\bar F}_j(i) := F_j(\bar{\bar z}(i))$ при всех $i, j \in I$.

Теорема 2. *СПР для случая* (б) *существует, если и только если выполняются следующие условия*:

1) $\bar{\bar F}_\Sigma \le \bar F_\Sigma$;
2) $\bar{\bar F}_{\Sigma(I\setminus i)} \ge F^*_{\Sigma(I\setminus i)} \quad \forall i \in I$;
3) $\sum_{i\in I}\big(\big(H_i\big(\sum_{j\in I}\pi_{ji}\bar{\bar z}_j(i)\big) - H_i\big(\sum_{j\in I\setminus i}\pi_{ji}\bar z_j + \pi_{ii}z_i^*\big)\big)/(1+T_i)\big) \le$ $\le \bar F_\Sigma - \bar{\bar F}_\Sigma$;
4) $\sum_{j\in I\setminus i}\big(\big(H_j\big(\sum_{k\in I}\pi_{kj}z_k^*\big) - H_j\big(\sum_{k\in I\setminus\{i,j\}}\pi_{kj}\bar{\bar z}_k + \pi_{ij}z_i^* + \pi_{jj}z_j^*\big)\big)/$ $/(1+T_j)\big) \le \bar{\bar F}_{\Sigma(I\setminus i)}(i) - F^*_{\Sigma(I\setminus i)}, \; i \in I$.

Замечание 1. Случай (б) описывает поведение игроков, более рациональное с точки зрения общего выигрыша, поскольку в нем предпринимается попытка сохранить кооперацию при отклонении одной страны. Однако условия существования СПР в этом случае не всегда выполнены даже при неограниченных горизонтах планирования. В то же время в случае (а) при достаточно длинных горизонтах планирования они выполнены всегда.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 допускают следующие обобщения для модели, в которой горизонты планирования $T_i(t)$ зависят от времени. Для существования указанных СПР достаточно, чтобы условия утверждений выполнялись для $T_i = \min_t T_i(t)$. Однако эти условия не являются необходимыми в общем случае. Другое обобщение связано с повторяющимися играми с переменным дисконтированием, в которых игрок i в период t стремится максимизировать приведенный будущий выигрыш $\sum_{\tau=t}^{\infty} d^i_{\tau t} W_i(\tau)$, где $W_i(\tau)$ — его выигрыш в период τ, $d^i_{\tau t}$ — коэффициент приведения к текущему периоду, $d^i_{tt} = 1$. Указанные утверждения остаются справедливыми как достаточные условия, если положить $T_i(t) = \sum_{\tau=t+1}^{\infty} d^i_{\tau t}$.

Список литературы

1. *Васин А.А., Дивцова А.Г.* Теоретико-игровая модель соглашения об ограничении загрязнения атмосферы // Математическая теория игр и приложения. 2017. Т. 9, № 1. С. 27–44.
2. *Kleimenov A.F., Kryazhimskiy A.V.* Minimum-noncooperative trajectories in repeated games // Complex dynamical systems with incomplete information / Ed. by E. Reithmeier, G. Leitmann. 1999. V. 1. P. 94–107.
3. *Hardin G.* The tragedy of the commons // Science, New Series. 1968. V. 162, N 3859.
4. *Sacco A., Zaccour G.* Impact of social externalities on the formation of an international environmental agreement: An exploratory analysis. 2016.

О снижении зашумленности при моделировании параметров методом динамической регуляризации (On the reduction of noisiness in the modeling of parameters by the method of dynamic regularization)

А. Ю. Вдовин (A. Yu. Vdovin), С. С. Рублева (S. S. Rubleva)

Уральский государственный лесотехнический университет, Екатеринбург, Россия

vdovin@usfeu.ru, rublevas@mail.ru

Рассматривается обратная задача для динамической системы, которая описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = f(t, x(t), v(t)) = f_1(t, x(t), v(t)) + f_2(t, x(t), v(t))v(t), \\ t \in [t_0, \vartheta] = T, \qquad x(t_0) = x_0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ — непрерывные отображения $T\times\mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^m$ с евклидовой нормой $|\cdot|$ и в пространство $\mathbb{R}^{m\times q}$ матриц со спектральной нормой. Решение $x(\cdot)$ по Каратеодори задачи (1) станем называть движением, а измеримую по Лебегу функцию $v(\cdot)\colon T \to Q \subset \mathbb{R}^q$ (Q — выпуклый компакт) — воздействием, порождающим это движение. Пусть

$t_0 < \ldots < t_i < \ldots < t_n = \vartheta$, $t_{i+1} - t_i = \Delta$, — разбиение временнóго промежутка T, а значение φ_i — значение функции $\varphi(\cdot)$ в узле разбиения t_i. По неточной информации о движении в узлах разбиения $|\xi_i^h - x_i| \le h$ требуется построить устойчивое приближение некоторого воздействия, порождающего движение $x(\cdot)$. Эта задача является некорректной. Из множества подходов к решению рассматриваемой проблемы остановимся на динамической процедуре, предложенной Ю.С. Осиповым и А.В. Кряжимским [1]. Построение приближения искомого воздействия рассматривалось как процесс позиционного управления специальной системой с помощью приема экстремального прицеливания из позиционных дифференциальных игр [2]. Эта операция проводилась пошагово на отрезках разбиения T, при этом осуществлялась ее регуляризация с использованием метода сглаживающего функционала [3]. Если $w_0^{h,\Delta,\alpha} = \xi_0$, то при $t \in (t_i, t_{i+1}]$ дискретная модель имела вид

$$w_{i+1}^{h,\Delta,\alpha} = w_i^{h,\Delta,\alpha} + f\big(t_i, \xi_i^h, u_i^h\big)\Delta(h), \tag{2}$$

а значение функции $u^h(t) = u_i^h$ равно проекции на Q векторы

$$f_2^T(t_i, \xi_i^h)\frac{\xi_i^h - w_i^{h,\Delta,\alpha}}{\alpha(h)}. \tag{3}$$

Величины $\alpha(h)$ и $\Delta(h)$ (величина шага разбиения) являются параметрами метода. Пусть h, $\alpha(h)$, $(h + \Delta(h))/\alpha(h)$ стремятся к нулю справа одновременно. В [1] установлено, что при выбранном согласовании параметров функция $w^{h,\Delta,\alpha}(\cdot)$ моделирует на T наблюдаемое движение, а $u^h(\cdot)$ — воздействие, обладающее в $L_2(T, \mathbb{R}^q)$ минимальной нормой среди всех допустимых воздействий, порождающих $x(\cdot)$. Известно, что на множестве всех измеримых воздействий со значениями из Q получить оценки точности регуляризованных приближений без дополнительной априорной информации невозможно. В [4] для функции $f(\cdot)$, липшицевой по первым двум переменным, матрицы $f_2(t, x(t))$ с постоянным рангом и нормального воздействия с ограниченной на T вариацией получены верхние оценки точности. Для этого рассматривалась непрерывная модель с точной информацией

$$\dot{w}^{0,\alpha}(t) = f(t, x(t), u^0), \qquad w^{0,\alpha}(t_0) = x_0. \tag{4}$$

Пусть $v_*(\cdot)$ — нормальное воздействие, порождающее $x(\cdot)$, а

$$u^0 = f_2^T(t, x(t))\frac{x(t) - w^{0,\alpha}(t)}{\alpha}.$$

Установлено, что при всех $k \in N$ и $\alpha/\delta \to 0$ при $\delta \to 0$

$$\|v_*(\cdot) - u^0(\cdot)\|_{L_1(T,\mathbb{R}^q)} \le C_1\left(\frac{4\alpha}{\lambda\delta}\right)^k(\vartheta - t_0) + \\ + \delta C_2 \operatorname{Var}(T, (f^+(\cdot))^T v_*(\cdot)) + C_3\alpha(\vartheta - t_0). \quad (5)$$

Рассматривая формулы (2), (3) как результат применения метода Эйлера к задаче (4), получаем оценку

$$\|u^0(\cdot) - u^h(\cdot)\|_{L_1(T,\mathbb{R}^q)} \le C_4\frac{h}{\alpha(h)} + C_5\frac{\Delta(h)}{\alpha(h)}. \quad (6)$$

Выбор оптимального согласования параметров в (5), (6) позволяет установить, что асимптотический порядок точности равен 1/2 и является оптимальным. Однако его практическая реализация показала высокую зашумленность $w^{h,\Delta,\alpha}(\cdot)$, $u^h(\cdot)$ относительно моделируемых ими объектов. Предпримем следующие шаги для борьбы с этим явлением. Первый — систему (1) рассмотрим в виде

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), v(t-\Delta)) + f_2(t, x(t), v(t-\Delta))\,(v(t) - v(t-\Delta)), \\ x(t_0) = x_0.$$

В ней за неизвестное воздействие примем $v(t) - v(t-\Delta)$.

Пусть $A(\cdot) = f_2(\cdot)f_2^T(\cdot)$, тогда непрерывная модель будет иметь вид

$$\dot{w}^{0,\alpha}(t) = f(t, x(t), u^0(t-\Delta)) + A(t, x(t))\frac{x(t) - w^{0,\alpha}(t)}{\alpha}, \quad w^{0,\alpha} = x_0.$$

Это жесткое уравнение является сингулярно возмущенным. Теория рекомендует для его решения применять неявные численные методы.

Вторым из анонсированных выше шагов станет использование неявного метода Эйлера, обладающего внутренним регуляризующим эффектом. Результат его применения есть

$$w_{i+1}^{0,\alpha,\Delta} = w_i^{0,\alpha,\Delta} + f\big(t_{i+1}, x_{i+1}, u_i^{0,\alpha,\Delta}\big)\Delta + \\ + A(t_{i+1}, x_{i+1})\big(x_{i+1} - w_{i+1}^{0,\alpha,\Delta}\big)\frac{\Delta}{\alpha} \pm x_{i+1}, \quad w_{i+1}^{0,\alpha,\Delta} = x_0.$$

Пусть $v_b(\cdot)$ обладает наименьшей вариацией среди допустимых воздействий, порождающих $x(\cdot)$, и $u_0^{h,\alpha,\Delta}$ — его приближение, $w_0^{h,\alpha,\Delta} = \xi_0$.

Тогда с учетом неточной информации о движении алгоритм принимает вид

$$w_{i+1}^{h,\alpha,\Delta} = \xi_{i+1} + \left(\frac{\alpha(h)}{\Delta(h)} + A(t_{i+1}, \xi_{i+1})\right)^{-1} \times$$
$$\times\, \alpha(h)\left[f(t_{i+1}, \xi_{i+1}, u_i^{h,\alpha,\Delta}) + \frac{\xi_{i+1} - w_i^{h,\alpha,\Delta}}{\Delta(h)}\right],$$
$$u_{i+1}^{h,\alpha,\Delta} = u_i^{h,\alpha,\Delta} + f_2\big(t_{i+1}, \xi_{i+1}\big)\frac{\xi_{i+1} - w_{i+1}^{h,\alpha,\Delta}}{\alpha(h)}.$$

Если h, $\Delta(h)$, $\alpha(h)/\Delta(h)$, $h/\Delta^2(h)$ стремятся к нулю справа, то последовательность кусочно постоянных приближений $u^{h,\alpha,\Delta}$, удовлетворяющих условию $u^{h,\alpha,\Delta}(t) = u_i^{h,\alpha,\Delta}$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$, сходится в $L_1(T, \mathbb{R}^q)$ к воздействию с наименьшей вариацией, порождающему $x(\cdot)$, и имеет слабую зашумленность. Следуя [5], предложенный прием можно применить и в случае, когда задача (1) нелинейна по $v(\cdot)$.

Список литературы

1. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.*. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. №2. С. 51–60.
2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
3. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151, №3. С. 501–504.
4. *Вдовин А.Ю., Рублева С.С.* О гарантированной точности процедуры динамического восстановления управления с ограниченной вариацией, зависящей от него линейно // Мат. заметки. 2010. Т. 87, №3. С. 337–358.
5. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.

On shift of the Lyapunov spectrum for linear stationary control systems in Banach spaces*

Vasilii Zaitsev

Udmurt State University, Izhevsk, Russia

verba@udm.ru

Let X and U be Banach spaces. Consider a linear control system

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad 0 \le t < +\infty, \tag{1}$$

where $x(t) \in X$, $u(t) \in U$, $A(t) \in L(X,X)$, $B(t) \in L(U,X)$, $t \ge 0$; $L(Q_1, Q_2)$ is the Banach space of linear bounded operators $P\colon Q_1 \to Q_2$. We suppose that $A(\cdot)$ and $B(\cdot)$ are piecewise continuous and, for some $M_1 > 0$, for all $t \ge 0$, the following inequalities hold: $\|B(t)\| \le M_1$ and

$$\|A(t)\| \le M_1. \tag{2}$$

Consider the corresponding free system

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \qquad 0 \le t < +\infty. \tag{3}$$

Denote by Σ_A the (*upper*) *Lyapunov spectrum* of system (3) [1, Ch. III, Sect. 4, p. 117]. By (2), we have $\Sigma_A \subset [-M_2, M_2] \subset (-\infty, +\infty)$ for some $M_2 > 0$. In particular, if $X = \mathbb{R}^n$ and $A(t) \equiv A$ then $\Sigma_A = \{\operatorname{Re}\mu_j \colon j = \overline{1,n}\}$, where μ_j ($j = \overline{1,n}$) are eigenvalues of A [1, p. 117].

Let us construct a linear state feedback control

$$u(t) = K(t)x(t), \qquad 0 \le t < +\infty, \tag{4}$$

where $K(t) \in L(X,U)$ for $t \ge 0$, $K(\cdot)$ is piecewise continuous, and $\|K(t)\| \le M_3$, $t \ge 0$, for some $M_3 > 0$ (we will call such an operator $K(t)$ admissible). The closed-loop system has the form

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)K(t))x(t). \tag{5}$$

Definition 1. We say that *the Lyapunov spectrum of system* (5) *is arbitrarily shiftable* if for any $\lambda \in \mathbb{R}$ there exists an admissible operator $K(t)$ such that $\Sigma_{A+BK} = \Sigma_A + \lambda$.

*Supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00346) and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the basic part (project no. 1.5211.2017/8.9).

Consider a stationary system (1):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad 0 \le t < +\infty, \tag{6}$$

where $A \in L(X, X)$ and $B \in L(U, X)$.

Definition 2. The control system (6) is said to be *exactly controllable on* $[0, T]$ [2, Ch. 3, p. 51] if for any points $x^0, x^1 \in X$ there exists a control function $\widehat{u} \in L^2([0, T], U)$ such that the solution $x(t)$ of system (6) with $u(t) = \widehat{u}(t)$ with the initial condition $x(0) = x^0$ satisfies the condition $x(T) = x^1$.

System (6) in closed loop with (4) becomes

$$\dot{x}(t) = (A + BK(t))x(t). \tag{7}$$

Theorem. *Assume that X is a reflexive Banach space and U is a Hilbert space. Let system* (6) *be exactly controllable on some* $[0, T]$*. Then the Lyapunov spectrum of the closed-loop system* (7) *is arbitrarily shiftable.*

For the case $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$, the theorem follows from [3, 4]. For system (6), obvious corollaries on stabilization or destabilization (by means of linear state feedback (4)) follow from the above theorem.

References

1. *Daleckii Ju.L., Krein M.G.* Stability of solutions of differential equations in Banach space. Am. Math. Soc., 1974.
2. *Curtain R.F., Pritchard A.J.* Infinite dimensional linear systems theory. Springer, 1978. (Lect. Notes Control Inf. Sci.; V. 8).
3. *Makarov E.K., Popova S.N.* On the global controllability of central exponents of linear systems // Russ. Math. 1999. V. 43, N 2. P. 56–63.
4. *Zaitsev V.A.* Lyapunov reducibility and stabilization of nonstationary systems with an observer // Diff. Eqns. 2010. V. 46, N 3. P. 437–447.

Существование равновесия по Ауманну в смешанных стратегиях (Existence of Aumann equilibrium in mixed strategies)

В. И. Жуковский (V. I. Zhukovskii)[а],
Л. В. Смирнова (L. V. Smirnova)[б]

[а]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

[б]*Государственный гуманитарно-технологический университет, Орехово-Зуево, Московская обл., Россия*

zhkvlad@yandex.ru, smirnovalidiya@rambler.ru

Рассматривается кооперативная игра N лиц с нетрансферабельными выигрышами

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle,$$

где $\mathbb{N} = \{1,\dots,N\}$, $x_i \in X_i \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^{n_i}$ — стратегии i-го игрока, $x = (x_1,\dots,x_N) \in X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \subset \mathbb{R}^n$ — ситуация, $f_i(\cdot) \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$ — функция выигрыша i-го игрока, $K \in 2^{\mathbb{N}}$, $K \neq \mathbb{N}$, — множество коалиций.

Ситуация $x^* \in X$ назовется [1] *сильно равновесной* (*по Ауманну*, ASE) в игре Γ, если для любой коалиции $K \subset \mathbb{N}$ и любой ее стратегии $x_K \in X_K = \prod_{j\in K} X_j$ несовместна система строгих неравенств

$$f_j(x^*) < f_j\big(x_K, x^*_{\mathbb{N}\setminus K}\big) \qquad (j \in K),$$

т.е. никакая коалиция $K \subset \mathbb{N}$ не может строго увеличить выигрыши всех своих членов, отклонившись от ASE x^*.

ASE, *во-первых*, обладает свойством *индивидуальной рациональности*: $f_i(x^*) \geq f_i^0 = \max_{x_i}\min_{x_{\mathbb{N}\setminus i}} f_i(x_i, x_{\mathbb{N}\setminus i})$ $(i \in \mathbb{N})$.

Во-вторых, множество X^* не является внутренне устойчивым: могут существовать две ситуации $x^{(1)}, x^{(2)} \in X^*$ такие, что $f_i(x^{(1)}) > f_i(x^{(2)})$ $(i \in \mathbb{N})$.

В-третьих, как правило, в чистых стратегиях ASE не существует [2].

Эти исследования, начатые Робертом Ауманном в 1959 г., сыграли не последнюю роль в присуждении в 2005 г. Нобелевской премии по экономике математику Роберту Ауманну и экономисту Томасу Шеллингу за то, что они “обогатили наше понимание конфликта и сотрудничества с помощью анализа в рамках теории игр”. Вот некоторые тезисы Нобелевской лекции Ауманна:

1) война не “иррациональна”, а должна быть изучена, понята как явление и в конечном счете преодолена;
2) изучение повторных игр показывает, что лучшего результата добиваются стратегии, которые меньше заинтересованы в выгоде “сейчас”, а больше в выгоде “потом”;
3) наивное миротворчество может привести к войне, а гонка вооружений, достоверная угроза войны и взаимное гарантированное уничтожение могут надежно предотвратить войну.

В настоящей работе предлагается новое понятие — коалиционная равновесность (KE) игры Γ, с помощью которого устанавливаются достаточные условия существования ASE и доказывается существование ASE в смешанных стратегиях при $X_i \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i(\cdot) \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$.

Определение. Ситуацию $x^a \in X$ назовем *коалиционно равновесной* (KE) в игре Γ, если для всех ее коалиций $K \subseteq \mathbb{N}$ и всех ее стратегий $x_K \in X_K = \prod_{j\in K} X_j$ несовместна система неравенств $f_j(x^a) \leq$ $\leq f_j(x_K, x^a_{\mathbb{N}\setminus K})$ $(j \in K)$, из которых по крайней мере одно строгое.

В отличие от ASE в KE, во-первых, условие максимума по Слейтеру (слабой эффективности) заменено на максимум по Парето (эффективность x^a); во-вторых, включена в определение и коалиция $K = \mathbb{N}$ всех игроков. Заметим, что KE является одновременно ASE, но обратное, вообще говоря, неверно.

Перейдем к достаточным условиям. Для этого используем новые переменные $z_i \in X_i$ и $z \in X$ и введем $2^{\mathbb{N}} - 1$ скалярных функций

$$\varphi_K(x, z) = \sum_{j\in K} f_j(x_K, z_{\mathbb{N}\setminus K}) - \sum_{j\in K} f_j(z) \qquad (K \in 2^{\mathbb{N}}).$$

Затем составим гермейеровскую свертку [3]

$$\varphi(x, z) = \max_{K\in 2^{\mathbb{N}}} \varphi_K(x, z).$$

С помощью предложенного в [4] подхода доказывается

Теорема 1. *Если удалось найти седловую точку* $(x^0, z^a) \in X \times X$ *антагонистической игры*

$$\Gamma^a = \langle \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}, \{X, Z = X\}, \varphi(x, z)\rangle$$

такую, что

$$\varphi(x, z^a) \le \varphi(x^0, z^a) \le \varphi(x^0, z) \qquad \forall\, x, z \in X,$$

то минимаксная стратегия z^a *является* KE.

Наконец, следуя Эмилю Борелю [5], Джону фон Нейману [6], Джону Нэшу [7, 8] и их последователям, установим теорему существования.

Теорема 2. *Если в игре* Γ *множества* X_i *принадлежат* $\operatorname{comp}\mathbb{R}^{n_i}$ *и функции выигрыша* $f_i(\cdot)$ *принадлежат* $C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$, *то существует* KE *в смешанных стратегиях.*

В доказательстве этой теоремы в основном используется теорема Гликсберга [9].

Список литературы

1. *Aumann R.J.* Acceptable points in general cooperative n-person games // Contributions to the theory of games IV / Ed. by A.W. Tucker, R.D. Luce. Princeton: Princeton Univ. Press, 1959. P. 287–324. (Ann. Math. Stud.; V. 40).
2. *Aumann R.J.* The core of a cooperative game without side payments // Trans. Am. Math. Soc. 1961. V. 98. P. 539–552.
3. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
4. *Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N.* Pareto-optimal Nash equilibrium: Sufficient conditions and existence in mixed strategies // Autom. Remote Control. 2016. V. 77, N 8. P. 1500–1510.
5. *Borel E.* La théorie du jeu et les équations intégrales a noyau symétrique // C. r. Acad. sci. 1921. V. 173. P. 1304–1308.
6. *Von Neumann J.* Zur Theorie der Gesellschaftsspiele // Math. Ann. 1928. Bd. 100. S. 295–320.
7. *Nash J.* Non-cooperative games // Ann. Math. 1951. V. 54, N 2. P. 286–295.
8. *Nash J.* Equillibrium points in N-person games // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1950. V. 36, N 1. P. 48–49.
9. *Гликсберг И.Л.* Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуациям равновесия в смысле Нэша // Бесконечные антагонистические игры / Под ред. Н.Н. Воробьева. М.: Физматгиз, 1963. С. 497–503.

Systems Analysis: Modeling and Control: Materials of the International Conference in memory of Academician A. V. Kryazhimskiy, Moscow, May 31 – June 1, 2018 / Ed. by K. O. Besov. – Moscow : Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences : MAKS Press, 2018. – 124 p.

ISBN 978-5-98419-079-4 (Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences)

ISBN 978-5-317-05838-8 (MAKS Press)

This collection of articles contains materials of the talks presented at the International Conference «Systems Analysis: Modeling and Control» in memory of Academician A. V. Kryazhimskiy, Moscow, May 31 – June 1, 2018.

Keywords: systems analysis, modeling, optimal control, numerical methods.

Научное издание

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Материалы Международной конференции,
посвященной памяти академика А. В. Кряжимского,
Москва, 31 мая – 1 июня 2018 г.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8
Тел. 8 (495) 984 81 41. Факс 8 (495) 984 81 39

Напечатано с готового оригинал-макета

Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*
Подписано в печать 18.05.2018 г.

Формат 60x90 1/16. Усл.печ.л. 7,75.
Тираж 100 экз. Заказ 105.

Издательство ООО “МАКС Пресс”
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891.